VI

DIE WICHTIGSTEN LEHREN
DER HÖHEREN DYNAMIK





VORLESUNGEN

ÜBER

TECHNISCHE MECHANIK

VON

DR. AUGUST FÖPPL

PROF. A. D. TECHN. HOCHSCHULE IN MÜNCHEN

IN SECHS BÄNDEN

SECHSTER BAND

DIE WICHTIGSTEN LEHREN DER HÖHEREN DYNAMIK

MIT 30 ABBILDUNGEN IM TEXT



LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1910

Vorwort.

Im Jahre 1900 lagen meine „Vorlesungen“ zum ersten Male fertig in vier Bänden vor. Als ich dann aber später neue Auflagen für die einzelnen Bände zu bearbeiten hatte, drängte sich mir immer mehr die Notwendigkeit auf, den in den beiden letzten Bänden vorgetragenen Lehrstoff erheblich zu ergänzen, um den häufig noch weiter gehenden Ansprüchen des Leserkreises, für den das Werk von vornherein bestimmt war, vollständig genügen zu können. Da mir aber eine Vergrößerung des Umfanges der beiden letzten Bände durchaus nicht ratsam erschien, blieb mir nur übrig, jeden dieser beiden Bände in zwei selbständige Teile zu zerlegen. Die Neubearbeitung, die sich dadurch erforderlich machte, ist jetzt abgeschlossen. Der dritte und vierte Band umfassen nur noch die einfacheren Lehren, mit denen sich jeder Ingenieur begnügen kann, solange er nicht durch äußere Umstände oder auch durch inneren Trieb veranlaßt wird, über das gewöhnliche Maß einer tüchtigen wissenschaftlichen Ausbildung hinausgehende Studien zu machen, während der fünfte und sechste Band weitergehende Bedürfnisse zu befriedigen bestimmt sind.

An der jetzt getroffenen Einteilung gedenke ich auch späterhin festzuhalten. An den ersten vier Bänden werde ich in späteren Auflagen nichts Wesentliches mehr ändern und jedenfalls auch den Umfang nicht über das jetzt bestehende Maß hinaus wachsen lassen. Anders beabsichtige ich es dagegen mit dem fünften und sechsten Bande zu halten. Für den Fall, daß auch diese es zu neuen Auflagen bringen werden, sollen ohne Rücksicht auf eine Vermehrung des Umfangs die wichtigsten Arbeiten auf diesen Gebieten, die inzwischen neu herauskommen werden, oder die ich etwa früher zu Unrecht

weggelassen oder übersehen hatte, bei einer Neubearbeitung berücksichtigt werden. Voraussetzung dafür ist natürlich, daß es sich hierbei um Dinge handelt, die nach meinem Urteile zur Aufnahme in ein Lehrbuch der Technischen Mechanik überhaupt geeignet sind.

Nach der bisherigen Gestaltung des Absatzes dieser Bücher ist zu erwarten, daß zum mindesten einzelne der Bände weitere Auflagen auch dann noch erfahren werden, wenn ich sie selbst nicht mehr bearbeiten kann. Meinem etwaigen Nachfolger in diesem Geschäfte könnte es dann unter Umständen von Nutzen sein, daß ich meine Absichten über die spätere Fortführung des Werkes hier zum Ausdruck gebracht habe.

Von diesem Schlußbande des ganzen Werkes enthält der erste Abschnitt eine ziemlich ausführliche Darstellung der Lehre von der relativen Bewegung. Davon werden zunächst die grundlegenden Fragen der ganzen Dynamik betroffen. Früher war es freilich nicht Brauch, in einem Lehrbuche der Technischen Mechanik auf diese Dinge näher einzugehen. Aber ich hielt es für nötig, sie genauer zu besprechen, weil sich ein wissenschaftlich gebildeter und selbständig denkender Ingenieur, wenn er sich auch sonst mit Recht mehr an die unmittelbar praktisch verwendbaren Lehren der Mechanik hält, bei vielen Anlässen dazu gedrängt fühlen wird, sich auch über diese letzten und tiefsten Fragen der Mechanik ein klares Urteil zu bilden.

Man wird bemerken, daß dieser Teil des ersten Abschnitts durch die Arbeiten von Mach, die stets einen nachhaltigen Eindruck auf mich gemacht haben, stark beeinflußt ist. Sehr zweifelhaft ist mir freilich noch, ob sich Mach selbst mit den Einzelheiten meiner Auffassung wird einverstanden erklären können. Die Ansichten über diese Dinge sind noch nicht vollständig abgeklärt und daher legt sie sich jeder, der ernsthaft darüber nachdenkt, einstweilen noch auf seine besondere Art zurecht. Jedenfalls würde ich aber auf ein Urteil von Mach über diesen Teil meiner Arbeit, namentlich insoweit es etwa ablehnend lauten sollte, das größte Gewicht legen.

Der Rest des ersten Abschnitts bildet eine Fortsetzung des gleichbezeichneten Abschnitts im vierten Bande. Ich nehme an, daß er einem Ingenieur, der mit der Untersuchung von Relativbewegungen in praktischen Fällen zu tun bekommt, eine brauchbare Anleitung dazu geben kann.

Der zweite Abschnitt behandelt die „mehrläufigen Verbände", also das, was man sonst häufig als „System-Mechanik" bezeichnet. Hierbei war ich namentlich darauf bedacht, das Verfahren von Lagrange zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen nicht nur kurz zu besprechen, wie dies früher schon in den älteren Auflagen des vierten Bandes geschehen war, sondern es auch so eingehend zu erläutern, daß der Leser dadurch in den Stand gesetzt werden kann, dieses Verfahren auf neue Aufgaben selbständig und mit Sicherheit anzuwenden. Dazu soll besonders die ausführliche Durchsprechung einiger geeigneter Beispiele verhelfen, von denen übrigens das „Doppelpendel" und das „rollende Rad" auch schon ihrem Gegenstande nach die Aufmerksamkeit des Technikers herausfordern dürften.

Auch das Verfahren von Lagrange hat früher in den Lehrbüchern der Technischen Mechanik keinen Platz gefunden. Es verdient ihn aber meiner Ansicht nach zweifellos. Ich halte es zwar keineswegs für nötig, daß sich die Mehrzahl der Studierenden der Ingenieurwissenschaften damit schon auf der Hochschule vertraut macht, und halte dies auch nicht für möglich. Nicht etwa weil der Gegenstand zu schwierig wäre, denn das ist er bei einer verständigen Darstellung durchaus nicht; sondern wegen des Zeitmangels, der es mit Rücksicht auf andere Lehren, die eben doch noch wichtiger sind, verbietet, in den regelmäßigen Vorlesungen über Technische Mechanik darauf einzugehen. Wer aber später durch seine Berufsaufgaben in die Lage kommt, von den Lehren der Dynamik zuweilen auch bei etwas schwierigeren Untersuchungen Gebrauch zu machen, sollte den Versuch nicht unterlassen, sich mit diesem oft sehr nützlichen Hilfsmittel bekannt zu machen. Ich glaube ihm auch in Aussicht stellen zu dürfen, daß ihm

dies an der Hand der hier gegebenen Darstellung kaum besonders schwer fallen kann.

Der dritte Abschnitt ist der Lehre vom Kreisel gewidmet, also einem Gegenstande, der durch mancherlei Anwendungen, die davon teils gemacht, teils geplant wurden, neuerdings auch in der praktischen Technik immer mehr in den Vordergrund getreten ist, während er in der analytischen Mechanik schon von jeher eine wichtige Rolle gespielt hat. Besonders eingehend habe ich dabei den Schlickschen Schiffskreisel besprochen: nicht nur wegen der Bedeutung, die dieser Einrichtung an sich schon zukommt, sondern auch als ein Musterbeispiel für die genauere Untersuchung der Eigenschaften von „Kreiselverbänden“ überhaupt.

Der vierte Abschnitt enthält verschiedene Anwendungen der Dynamik: auf die Schwingungen der Regulatoren von Kraftmaschinen, das „Pendeln“ von elastisch gekuppelten Maschinen, sowie auf die Planetenbewegung.

Der fünfte und letzte Abschnitt gilt der Hydrodynamik. Der größte Teil seines Inhalts ist aus der zweiten Auflage des vierten Bandes übernommen. Bei der dritten Auflage war nämlich der die Hydrodynamik behandelnde Abschnitt besonders stark gekürzt worden und was damals wegfiel, findet man jetzt hier wieder. Indessen sind auch verschiedene Gegenstände in zum Teil ziemlich ausführlicher Behandlung neu aufgenommen; so wurde namentlich die neuere Theorie der Wasserbewegung in den Turbinen, die sich auf die in Zylinderkoordinaten ausgedrückten Eulerschen Gleichungen stützt, ihren Grundzügen nach dargestellt.

Aus diesen Inhaltsangaben geht übrigens zugleich hervor, was ich unter den „wichtigsten Lehren der höheren Dynamik“ verstehe. Eine Erläuterung des für diesen Band gewählten Titels ist ja in der Tat nötig, da verschiedene Beurteiler, namentlich wenn sie verschiedenen Fachrichtungen angehören, wie etwa ein Ingenieur, ein Physiker und ein Mathematiker, sehr verschiedener Ansicht darüber sein können, welche Lehren der Dynamik als die „wichtigsten“ anzusehen oder auch nur,

welche zu den „höheren" Teilen der Dynamik zu rechnen sind. Ich brauche indessen kaum noch besonders hervorzuheben, daß ich diese Bezeichnungen im Sinne des Ingenieurs verstanden wissen will und daß ich mich bemüht habe, bei der Auswahl des Stoffes vor allem auf die Bedürfnisse der Technik zu achten.

Wenn nun auch noch dieser Band in den Kreisen, für die er bestimmt ist, eine ähnlich freundliche Aufnahme finden sollte, wie die ihm vorhergehenden Bände, so würde ich mich für die gewiß nicht geringe Mühe, die mir die Abfassung des ganzen, jetzt endlich und endgültig abgeschlossenen Werkes verursacht hat, reichlich belohnt fühlen.

München, im Oktober 1909.

A. Föppl.

Inhaltsübersicht.

Erster Abschnitt.

Die relative Bewegung.

Vorbemerkung. In diesem Abschnitte sollen die Lehren des vierten Bandes über die Relativbewegung nach zwei Richtungen hin ergänzt werden. Zunächst (§ 1 bis § 6) nach der begrifflichen Seite hin durch eine Erörterung der schwierigen und viel umstrittenen Frage nach der sogenannten absoluten Bewegung und dessen, was damit zusammenhängt, und dann nach der praktischen Seite durch eine weitere Ausführung der schon im vierten Bande angestellten Betrachtungen (§ 7 bis § 11).

§ 1. Beschreibung der Bewegung eines isolierten Punkthaufens.

Gegeben sei ein Haufen von n materiellen Punkten, die sich in beliebiger Weise gegeneinander bewegen. Die Massen dieser Punkte $m_1, m_2 \ldots m_n$ sehen wir als gegeben an. Dagegen soll über die Kräfte, die an den Punkten angreifen und ihre Bewegungen beeinflussen, nichts bekannt sein. Außer den Punkten sei noch ein Beobachter vorhanden, der alle Messungen über die relative Lage der Punkte zueinander jederzeit leicht vorzunehmen vermag und der seinen Standpunkt nach Belieben zu wählen und jederzeit nach Wunsch zu wechseln vermag. Dagegen soll es dem Beobachter an jeder äußeren Orientierung fehlen. Von anderen Massen als den zu dem Punkthaufen gehörigen soll er überhaupt nichts wahrnehmen. Unter diesen Umständen sprechen wir von einem „isolierten“ Punkthaufen.

Als Aufgabe des Beobachters betrachten wir es, eine geeignete Beschreibung der von ihm wahrgenommenen Bewegungen für einen bestimmten Zeitraum zu geben. Dazu wird er sich zuerst nach einem geeigneten Zeitmaße umsehen

müssen. Um die Betrachtung ganz allgemein durchzuführen, müßten wir von dem Beobachter verlangen, daß er sich dieses Zeitmaß auf Grund seiner Wahrnehmungen erst selbst verschafft. Wir wollen ihm aber die Aufgabe dadurch erleichtern, daß wir ihm außer den Meßinstrumenten, die er zur Ausführung von Längen- und Winkelmessungen nötig hat, auch eine Uhr mitgeben. Um jedoch die Gültigkeit unserer Betrachtungen dadurch nicht einzuschränken, wollen wir dahingestellt sein lassen, ob die Uhr auch wirklich „richtig" geht, in dem Sinne, den wir mit diesem Worte bei der Ausführung unserer Zeitmessungen verbinden.

Wir machen jedoch eine Einschränkung, die sehr wichtig ist, an die man aber trotzdem bei der Ausführung von Betrachtungen dieser Art bis vor wenigen Jahren nicht gedacht hat. Wir können uns nämlich den Beobachter nicht als allgegenwärtig vorstellen. Wenn wir dem Beobachter auch die Freiheit zusprechen, seinen Beobachtungsort nach Belieben einzunehmen und nach Bedarf zu wechseln, so müssen wir ihn uns doch im übrigen als einen Menschen denken, der sich zu einer gegebenen Zeit an einer bestimmten Stelle befindet und der von da aus die materiellen Punkte, die er zu überwachen hat, durch den Gesichtssinn wahrnimmt. Nun braucht aber das Licht eine gewisse Zeit, um von einem der materiellen Punkte zu dem Beobachter zu gelangen. Und zwar ist diese Zeit verschieden je nach der Entfernung, d. h. je nach der Lage, die der Beobachter gerade einnimmt. Hat sich der Beobachter bereits für eine bestimmte Stellung entschieden, so steht es ihm zwar frei, bei der Berechnung seiner Beobachtungen die Zeit, die das Licht brauchte, um von den einzelnen materiellen Punkten zu ihm zu gelangen, nachträglich zu berücksichtigen. Er wird dann auch imstande sein, die für ihn „gleichzeitigen" Stellungen der einzelnen materiellen Punkte anzugeben. Aber wie wird es, wenn er selbst oder ein zweiter Beobachter sich für eine andere Aufstellung entscheidet? In der Tat verliert der an sich scheinbar so einfache und selbstverständliche Begriff der „Gleichzeitigkeit"

jede eindeutige Bestimmtheit, wenn sich die materiellen Punkte gegeneinander und hiermit auch die verschiedenen möglichen Aufstellungen des Beobachters gegeneinander selbst mit Geschwindigkeiten bewegen, die mit der Lichtgeschwindigkeit vergleichbar sind.

Ein einfaches Beispiel genügt, um dies verständlich zu machen. Man beschränke sich auf die Betrachtung von zwei materiellen Punkten (oder Weltkörpern) 1 und 2. Ein Beobachter A, der in der Mitte der Verbindungslinie aufgestellt ist, möge die Wahrnehmung machen oder aus geeigneten Beobachtungen, die er von da aus vornimmt, schließen, daß sich die Körper 1 und 2 vorher dauernd in gleichem Abstande voneinander und daher auch von ihm befanden, daß aber zu einer bestimmten Zeit von beiden ein Signal aufblitzte und sie sich von da ab mit beschleunigter Bewegung voneinander entfernten. Wenn die Signale beide zur gleichen Zeit wahrgenommen wurden, wird der Beobachter schließen, daß sie auch gleichzeitig abgegeben wurden und zwar zu einer Zeit, die um so viel vor der Beobachtungszeit liegt, als das Licht nötig hat, um die anfängliche Entfernung zwischen jedem der beiden Körper und dem Beobachter A zu durchlaufen. Bezeichnen wir diese Zeit mit t_1 und mit t_2 die Zeit, die noch weiterhin verstreicht, bis das vom Körper 1 ausgehende Licht seinen Weg von A bis zum Körper 2 fortgesetzt hat, so ist für den Beobachter A zweifellos, daß t_2 größer sein muß als t_1, weil sich inzwischen der Abstand des Körpers 2 von A vergrößert hat. Man kann natürlich auch leicht ausrechnen, um wieviel t_2 größer ist als t_1, wenn die anfänglichen Abstände, die Beschleunigung der hierauf eintretenden Bewegung und die Lichtgeschwindigkeit gegeben sind. Nun denke man sich einen zweiten Beobachter B auf 2 aufgestellt, der eine Uhr besitzt, die mit der von A gleich geht. B nimmt das von 2 ausgehende Signal ohne Zeitverlust wahr und das von 1 ausgehende, wenn die vorhergehenden Überlegungen physikalisch zutreffen, nach der Zeit $t_1 + t_2$. Für den Beobachter B ruht der Körper 2, während der Körper 1 nach Aufblitzen des

Signals sich von ihm entfernt. Wenn sich nun der Beobachter B die Frage vorlegt, wann das Signal auf 1 abgegeben wurde, wird er schließen, daß dies zur Zeit $2t_1$ vor dem Augenblicke geschehen sei, in dem er es wahrgenommen hat, da das Licht, wenn Körper 2 ruht, doppelt so viel Zeit braucht, um nach ihm zu gelangen, als vorher nach A. Da er aber das Signal erst nach der Zeit $t_1 + t_2$ wahrgenommen hat, von dem Augenblick an gerechnet, in dem das Signal an dem Aufstellungsorte von B abgegeben wurde, muß er zu dem Schlusse kommen, daß das Signal auf 1 um die Zeit $t_2 - t_1$ später abgegeben wurde, als das auf 2. Umgekehrt würde ein Beobachter auf 1 schließen, daß das Signal auf 1 früher abgegeben wurde, als das auf 2.

Wie man aus dieser Betrachtung erkennt, fehlt es in der Tat an jedem eindeutigen Kriterium für das gleichzeitige Eintreten zweier Ereignisse, solange noch nichts darüber festgesetzt ist, welche Aufstellung der Beobachter einnehmen soll, der darüber zu entscheiden hat. Es war ein großes Verdienst des Herrn Einstein, auf diese Dinge zuerst hingewiesen zu haben. Der Gedanke wurde von anderen schnell aufgenommen, und es scheint, daß sich daran jetzt eine sehr folgenreiche Entwicklung der Elektrodynamik, insbesondere der Elektronentheorie knüpft. Für die Elektronentheorie sind nämlich diese Betrachtungen von besonders großer Bedeutung, weil man die Kathodenstrahlen und andere verwandte Erscheinungen auf Bewegungen von Elektronen zurückführt, die mit sehr großen Geschwindigkeiten erfolgen, die nicht viel unter der Lichtgeschwindigkeit liegen.

Es kann kaum ausbleiben, daß auch die Mechanik in den Kreis dieser neuen Theorie hineingezogen wird.[1]) Immerhin wäre es aber jetzt noch zu früh, auf diesen Gedankenkreis

---

1) Einen Versuch nach dieser Richtung hin hat inzwischen der uns leider vor kurzem durch den Tod entrissene geistvolle Göttinger Mathematiker Minkowski gemacht. Was dabei für die Fassung der Grundbegriffe der Mechanik endgültig herauskommen wird, erscheint mir aber einstweilen noch zweifelhaft.

hier noch weiter einzugehen, als es durch die vorhergehenden Andeutungen bereits geschehen ist.

Um davon absehen zu können, genügt es, wenn wir die Annahme machen, daß die Geschwindigkeiten, mit denen die einzelnen Punkte des Haufens ihre Entfernungen voneinander ändern, sehr klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind. Wenn die Lichtgeschwindigkeit als unendlich groß betrachtet werden kann, fallen nämlich die vorher besprochenen Schwierigkeiten, die Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse festzustellen, weg und die Betrachtung läßt sich so weiter führen, wie man es vor der Veröffentlichung der Einsteinschen Untersuchung stets getan und dabei als ganz selbstverständlich betrachtet hat.

Nach dieser Einschaltung kehren wir zu der zuerst gestellten Aufgabe zurück. Der Beobachter des Punkthaufens muß sich für eine bestimmte Aufstellung entscheiden, von der aus er seine Aufnahmen machen und auf die er die Beschreibung der Bewegungen beziehen will. Es handelt sich dabei nicht nur um die Wahl und die Angabe des Ortes der Aufstellung, sondern ebenso auch um die Bezeichnung der Richtungen im Raume, die der Beobachter bei seiner Beschreibung als fest ansehen will. Am anschaulichsten drückt man dies dahin aus, daß der Beobachter in einem Fahrzeuge oder auf einem Sessel Platz nimmt und die Bewegungen relativ zu diesem Sitze beschreibt. Auf die besondere Gestalt dieser Sitzgelegenheit kommt es natürlich nicht an. Es genügt vielmehr, wenn drei rechtwinklig zueinander stehende Geraden hervorgehoben werden, die in dem Sitze etwa als Kanten vorkommen oder sonst darin festgelegt sind. Wir kommen dadurch auf ein Koordinatensystem, das als die dürftigste, für unsern Zweck aber bereits genügende Skizze des Fahrzeugs oder Sessels betrachtet werden kann.

Die Beschreibung der Beobachtungen wird erst dann benutzbar, wenn sie mit einer genauen Angabe über die Aufstellung des Beobachters versehen ist. Diese Angabe muß ausreichen, um das Fahrzeug, wenn es verloren gegangen war, zu jeder Zeit wieder auffinden zu können. Das kann z. B.

dadurch geschehen, daß man den Ursprung des Koordinatensystems fortwährend mit einem der materiellen Punkte des Haufens zusammenfallen, ferner die X-Achse stets durch einen zweiten und die XY-Ebene außerdem noch durch einen dritten materiellen Punkt gehen läßt. Unter der Voraussetzung, daß die Punkte so ausgewählt wurden, daß während der Beobachtungszeit niemals alle drei in eine Gerade fallen, ist durch diese Festsetzungen die Stellung des Koordinatensystems für jede Zeit völlig bestimmt.

Nun steht der Ausführung und Anfzeichnung der Beobachtungen nichts mehr im Wege. Die zunächst gestellte Aufgabe ist gelöst, sobald die Koordinaten aller Punkte als Funktionen der Zeit ermittelt sind. Wenn dies geschehen ist, vermag man auch durch bloße Umrechnungen die Koordinaten für ein in anderer Weise festgelegtes Koordinatensystem anzugeben. Das kommt nur auf eine Koordinatentransformation hinaus. Ferner vermag man auch Abweichungen im Gange der Uhr, die bei den Beobachtungen benutzt wurde, gegenüber einer später etwa in anderer Weise zu wählenden Zeitskala nachträglich ohne Schwierigkeit Rechnung zu tragen.

Daran schließen sich aber sofort weitere Fragen. Vor allem wird man sich unter allen möglichen Arten der Festlegung des Koordinatensystems nach jenen umsehen, die sich vor den anderen durch die Einfachheit der Darstellung, die sie zu gewähren vermögen, besonders auszeichnen. In dem zuerst gewählten Systeme beschreibt der Massenmittelpunkt des ganzen Haufens irgend eine Bahn, die sich auf Grund der vorhergehenden Beobachtungen leicht ermitteln läßt. Der Beobachter, den wir mit allen Kenntnissen, die uns zu Gebote stehen, ausgerüstet voraussetzen, wird die Willkür, die ihm bei der Wahl des Bezugssystems offen gelassen ist, dazu benutzen, um nach der Erledigung der zuerst vorgenommenen Ausarbeitung weiterhin zu einem Koordinatensystem überzugehen, in dem der Massenmittelpunkt dauernd in Ruhe ist. Er kann dies, indem er den Ursprung des neuen Koordinatensystems mit dem Massenmittelpunkt zusammenfallen läßt. Die

Richtungen der Koordinatenachsen mögen dabei zunächst in beliebiger Weise ähnlich wie vorher festgelegt sein.

Nun mag für dieses zweite Koordinatensystem der Drall des ganzen Punkthaufens, also die Summe der statischen Momente der Bewegungsgrößen aller materiellen Punkte für den Ursprung als Momentenpunkt berechnet werden. Der Drall ist eine gerichtete Größe, die sich für jeden Augenblick auf Grund der vorhergehenden Arbeiten nach Größe und Richtung (diese bezogen auf das zweite Koordinatensystem) berechnen läßt. Wir wissen schon, welche wichtige Rolle der Drall in der Dynamik spielt, und werden daher jetzt zu einem dritten Bezugssystem übergehen, in dem der Drall dauernd gleich Null bleibt. Das ist sofort und zwar (im wesentlichen) in eindeutiger Weise möglich. Das dritte Koordinatensystem, dessen Ursprung natürlich immer noch mit dem Massenmittelpunkt zusammenfallen soll, muß sich dazu in jedem Augenblicke gegen das zweite mit solcher Geschwindigkeit und um eine solche Achse drehen, daß der Drall eines starren Körpers, der aus den materiellen Punkten in ihren augenblicklichen Lagen gebildet ist, für diese Winkelgeschwindigkeit, bezogen auf das zweite Koordinatensystem, mit dem vorher ermittelten Dralle für die tatsächlich festgestellten Bewegungen des Punkthaufens übereinstimmt.

Durch diese Betrachtungen ist der Weg gewiesen, auf dem der Beobachter zu einer Aufstellung gelangen kann, für die der Schwerpunkt des ganzen Punkthaufens ruht und der Drall der Bewegung dauernd gleich Null ist. Welchen Vorteil bietet aber nun diese Wahl des Bezugssystems? Das zeigt sich, wenn wir nach der Erledigung der geometrischen Beschreibung der Bewegungen dazu übergehen, nach ihren Ursachen, d. h. nach einem festen gesetzmäßigen Zusammenhang zu suchen, auf Grund dessen die weitere Bewegung in Übereinstimmung mit dem Ergebnisse der Beobachtung vorausgesagt werden kann. Wir wissen schon, daß die Einführung des Kraftbegriffes sich dazu sonst sehr geeignet erwiesen hat. Wenn nun auch bei der Aufgabe, mit der wir uns hier zu beschäftigen haben, von

vornherein keineswegs feststeht, ob der Kraftbegriff hier ebenfalls so wie in anderen Fällen, die sich auf tatsächlich von uns beobachtete Naturvorgänge beziehen, zu einer einfachen gesetzmäßigen Darstellung zu führen vermag, so wird unser Beobachter, der von den früheren Fällen Kenntnis hat, jedenfalls den Versuch dazu machen.

Er wird also das Produkt aus der ihm von vornherein gegebenen Masse jedes materiellen Punktes und der auf das grade angenommene Koordinatensystem bezogenen Beschleunigung als eine Kraft deuten, die an dem Punkte angreift. Der Vorteil des gewählten Bezugssystems zeigt sich dann darin, daß nach dem Satze von der Bewegung des Schwerpunkts und nach dem Flächensatze keine äußeren Kräfte an dem Punkthaufen anzubringen sind, sondern alle Kräfte nur als innere betrachtet werden können, die zwischen den einzelnen Punkten des Haufens übertragen werden. Die beiden genannten Sätze sind nämlich ohne weiteres anwendbar, da sie nur mathematische Folgerungen der dynamischen Grundgleichung bilden, also aus einer Gleichung hervorgehen, die in unserem Falle infolge der Definition für die an einem materiellen Punkte angreifende Kraft ohne weiteres erfüllt ist.

Zugleich ist ferner durch die Wahl des Bezugssystems erreicht, daß für die in der angegebenen Weise definierten Kräfte das Wechselwirkungsgesetz in seiner allgemeinsten Fassung erfüllt ist. Da nämlich in diesem Systeme jederzeit $\Sigma m\mathfrak{r} = 0$ ist, folgt, daß auch $\sum m \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = 0$ und daher $\Sigma \mathfrak{P} = 0$ ist, wenn wir diese Buchstaben in der von früher her bekannten Bedeutung gebrauchen, nämlich unter $\mathfrak{r}$ den Radiusvektor von m in unserem Bezugssystem und unter $\mathfrak{P}$ die an dem zugehörigen Punkt angreifende Kraft verstehen. Ebenso folgt aus der durch die Wahl des Koordinatensystems erfüllten Bedingung, daß zu jeder Zeit

$$\Sigma V m \mathfrak{v} \mathfrak{r} = 0$$

wird, durch Differentiation auch

$$\sum V m \frac{d\mathfrak{v}}{dt} \mathfrak{r} = 0 \quad \text{oder} \quad \Sigma V \mathfrak{P} \mathfrak{r} = 0.$$

Die beiden Gleichungen $\Sigma\mathfrak{P} = 0$ und $\Sigma V\mathfrak{P}\mathfrak{r} = 0$ bilden aber zusammen den analytischen Ausdruck für die Gültigkeit des Wechselwirkungsgesetzes in der aus Band I, § 21 bekannten allgemeineren Form.

Man sieht leicht die Wichtigkeit dieser Betrachtungen für eine kritische Würdigung der Grundlagen der Mechanik ein. Denn es folgt daraus, daß auch in einer Welt, die ganz anderen Gesetzen unterworfen wäre, als die uns aus der Erfahrung bekannte wirkliche Welt, ein Beobachter trotzdem eine Dynamik aufstellen könnte, die sich mit der unsrigen in den Grundzügen deckt. Durch passende Wahl des Bezugssystems in Verbindung mit der vorher angegebenen Definition des Kraftbegriffes könnte er es immer erreichen, daß die dynamische Grundgleichung mit allen aus ihr gezogenen Folgerungen, sowie das Wechselwirkungsgesetz erfüllt sind. Die Abweichung der Gesetze jener anderen Welt gegenüber der unsrigen würde sich erst herausstellen, wenn der Beobachter untersuchte, was für Kräfte unter gegebenen Umständen an den einzelnen materiellen Punkten angreifen.

Daraus folgt zugleich, daß auch bei dem Aufbau unserer Mechanik die Erfahrung erst an dieser Stelle einsetzt, während alles, was vorausgeht, nicht aus der Erfahrung entspringt, sondern durch die von uns gewählte besondere Darstellungsmethode hineingetragen wird. Das gilt auch für die sogenannte „absolute“ Bewegung, nämlich von den Bewegungen der materiellen Punkte unserer wirklichen Welt gegen das in der vorher beschriebenen Weise für sie konstruierte Koordinatensystem, das wir auch als das Hauptbezugssystem bezeichnen wollen. Ein Gegensatz zur relativen Bewegung soll damit nicht hervorgehoben werden, wenn hier von der absoluten Bewegung gesprochen wird. Vielmehr wird nur unter allen an sich möglichen und geometrisch sonst ganz gleichberechtigten Arten, die Bewegungen innerhalb unserer Welt zu beschreiben, eine besonders hervorgehoben, weil sie zu der einfachsten Fassung der Kraftgesetze führt, und ihr ein besonderer Namen gegeben, der darauf hinweisen soll.

Man kann auch umgekehrt verlangen, zu einem in beliebiger Weise bewegten isolierten Punkthaufen ein Bezugssystem aufzusuchen, für das das Wechselwirkungsgesetz für die zwischen den Punkten des Haufens auftretenden inneren Kräfte erfüllt ist, und zwar natürlich so, daß äußere Kräfte dabei nicht zu Hilfe genommen werden müssen. Das vorher besprochene Bezugssystem, für das der Schwerpunkt ruht und der Drall stets gleich Null bleibt, genügt, wie wir schon wissen, den Bedingungen dieser Aufgabe; aber es ist nicht das einzige. Man kann auch Koordinatensysteme angeben, deren Ursprung ebenfalls mit dem Schwerpunkt zusammenfällt, die sich aber gegen das vorige stets so drehen, daß der Drall dauernd irgend einen Vektor von beliebig angenommener Größe und Richtung darin bildet. Für diese ist dann $\Sigma V m \mathfrak{v}\mathfrak{r} = \mathfrak{C}$, worin $\mathfrak{C}$ eine Konstante bedeutet. Durch Differentiation nach der Zeit findet man aber daraus, wie vorher, $\Sigma V \mathfrak{P}\mathfrak{r} = 0$, d. h. das Wechselwirkungsgesetz ist auch in allen diesen Fällen erfüllt. *Die bloße Forderung, das Wechselwirkungsgesetz zu erfüllen, reicht daher nicht aus, um das Bezugssystem eindeutig festzulegen.* Das Hauptbezugssystem zeichnet sich indessen vor den übrigen, die die genannte Eigenschaft mit ihm teilen, auch noch dadurch aus, daß die lebendige Kraft darin den angemessensten Wert erhält, wie ich sofort näher ausführen werde.

§ 2. Die lebendige Kraft bei der relativen Bewegung.

Wir kehren zurück zu dem im Anfange des vorigen Paragraphen besprochenen Falle eines isolierten Punkthaufens, dessen Bewegung relativ zu einem in beliebiger Weise festgelegten Koordinatensystem bereits dargestellt sein soll. Wir berechnen die über alle Punkte des Haufens erstreckte Summe

$$L = \tfrac{1}{2} \Sigma m \mathfrak{v}^2$$

und bezeichnen sie als die lebendige Kraft des Punkthaufens in bezug auf das gewählte Koordinatensystem.

Zunächst ist leicht einzusehen, daß der Satz von der lebendigen Kraft für diese relative Bewegung seine Gültigkeit in der gewöhnlichen Form behält, obschon ihm jetzt keineswegs die Bedeutung eines Naturgesetzes, sondern nur eine formale Bedeutung zukommt, weil wir uns die Kräfte an den materiellen Punkten nicht besonders gegeben denken, sondern sie erst aus den beobachteten Beschleunigungen ableiten. Bezeichnen wir nämlich die Kraft am Punkt i mit $\mathfrak{P}_i$ und das im Zeitelemente dt relativ zu dem gewählten Koordinatensystem zurückgelegte Wegelement mit $d\mathfrak{s}_i$, so hat man

$$\mathfrak{P}_i d\mathfrak{s}_i = m_i \frac{d\mathfrak{v}_i}{dt} \cdot \mathfrak{v}_i dt = m_i \mathfrak{v}_i d\mathfrak{v}_i = \tfrac{1}{2} m_i d(\mathfrak{v}_i^2),$$

woraus bei Summation über alle Punkte

$$\Sigma \mathfrak{P} d\mathfrak{s} = dL \tag{1}$$

folgt. Diese Gleichung spricht aber den Satz von der lebendigen Kraft aus, der somit auch für die relativen Bewegungen gilt, falls man nur die Kräfte an jedem Punkte proportional mit den relativen Beschleunigungen wählt.

Wir fragen ferner, wie sich die lebendige Kraft ändert, wenn man von einem Koordinatensystem zu einem anderen übergeht. Zu diesem Zwecke gehen wir zuerst aus von dem Hauptbezugssysteme, das im vorigen Paragraphen eingeführt war, also von jenem, in dem der Schwerpunkt ruht und der Drall jederzeit gleich Null ist. Die Geschwindigkeit von m_i relativ zu diesem sei zum Unterschiede mit $\mathfrak{v}_i'$ bezeichnet. Die zugehörige lebendige Kraft ist dann

$$L' = \tfrac{1}{2} \Sigma m \mathfrak{v}'^2 . \tag{2}$$

Nun sei ein anderes Koordinatensystem betrachtet, das mit dem Hauptbezugssysteme im Ursprung zusammenfällt und sich dagegen mit einer Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ dreht, die irgend eine Funktion der Zeit sein kann. Auf dieses System beziehe sich die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_i$; dann kann

$$\mathfrak{v}_i = \mathfrak{v}_i' + V \mathfrak{u} \mathfrak{r}_i \tag{3}$$

gesetzt werden, und für die lebendige Kraft L, bezogen auf das neue Koordinatensystem, erhält man

$$L = \tfrac{1}{2} \Sigma m \mathfrak{v}^2 = \tfrac{1}{2} \Sigma m \mathfrak{v}'^2 + \Sigma m \mathfrak{v}' \mathrm{V} \mathfrak{u} \mathfrak{r} + \tfrac{1}{2} \Sigma m (\mathrm{V} \mathfrak{u} \mathfrak{r})^2 .$$

Das erste Glied dieses Ausdruckes ist gleich L'. Das zweite Glied wird zu Null. Um dies zu zeigen, machen wir von dem Satze der Vektoranalysis

$$\mathfrak{A} \mathrm{V} \mathfrak{B} \mathfrak{C} = \mathfrak{B} \mathrm{V} \mathfrak{C} \mathfrak{A} \qquad (4)$$

Gebrauch, der in den früheren Bänden dieses Werkes noch nicht angewendet wurde und daher hier zuerst zu beweisen ist.

Nach der Definition des äußeren Produkts (Band I, Gl. 53) hat man

$$\mathrm{V} \mathfrak{B} \mathfrak{C} = \mathfrak{i}(B_2 C_3 - B_3 C_2) + \mathfrak{j}(B_3 C_1 - B_1 C_3) + \mathfrak{k}(B_1 C_2 - B_2 C_1),$$

und daher wird

$$\mathfrak{A} \mathrm{V} \mathfrak{B} \mathfrak{C} = A_1 (B_2 C_3 - B_3 C_2) + A_2 (B_3 C_1 - B_1 C_3) + A_3 (B_1 C_2 - B_2 C_1).$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite läßt sich aber durch andere Zusammenfassung der Glieder auch in der Form

$$B_1 (C_2 A_3 - C_3 A_2) + B_2 (C_3 A_1 - C_1 A_3) + B_3 (C_1 A_2 - C_2 A_1)$$

schreiben, was mit der Entwicklung von $\mathfrak{B} \mathrm{V} \mathfrak{C} \mathfrak{A}$ zusammenfällt. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir erhalten nun durch Anwendung dieses Satzes

$$\Sigma m \mathfrak{v}' \mathrm{V} \mathfrak{u} \mathfrak{r} = \Sigma m \mathfrak{u} \mathrm{V} \mathfrak{r} \mathfrak{v}' = \mathfrak{u} \Sigma m \mathrm{V} \mathfrak{r} \mathfrak{v}' = - \mathfrak{u} \Sigma \mathrm{V} m \mathfrak{v}' \mathfrak{r},$$

wobei der konstante Faktor $\mathfrak{u}$ herausgehoben werden konnte. Der zuletzt vorkommende Summenausdruck gibt aber den Drall des Punkthaufens für das Hauptbezugssystem an, der nach Definition gleich Null ist. In der Tat verschwindet daher das zweite Glied in dem Ausdrucke für L.

Auch für die Umformung des dritten Gliedes stützen wir uns auf einen Satz der Vektor-Algebra. Nach dem vorhergehenden Satze hat man nämlich, indem man $\mathfrak{A}$ in Gl. (4) durch $\mathrm{V} \mathfrak{B} \mathfrak{C}$ ersetzt,

$$\mathrm{V} \mathfrak{B} \mathfrak{C} \cdot \mathrm{V} \mathfrak{B} \mathfrak{C} = \mathfrak{B} \mathrm{V} \mathfrak{C} \mathrm{V} \mathfrak{B} \mathfrak{C}$$

und andererseits ist nach einem schon in Band IV (Gl. 118 der 3. Aufl.) bewiesenen Satze

$$V\mathfrak{C}V\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C}^2 - \mathfrak{C}\cdot\mathfrak{B}\mathfrak{C}.$$

Im Ganzen wird daher

$$(V\mathfrak{B}\mathfrak{C})^2 = \mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2 - (\mathfrak{B}\mathfrak{C})^2. \tag{5}$$

Wenden wir diesen Satz auf das dritte Glied in dem Ausdrucke für L an, so erhalten wir

$$\Sigma m (V\mathfrak{u}\mathfrak{r})^2 = \mathfrak{u}^2 \Sigma m \mathfrak{r}^2 - \Sigma m (\mathfrak{u}\mathfrak{r})^2.$$

Setzen wir hierin $\mathfrak{u} = u\mathfrak{u}_1$, verstehen also unter $\mathfrak{u}_1$ den in der Richtung von $\mathfrak{u}$ gezogenen Einheitsvektor, so geht dies über in

$$u^2 \Sigma m (\mathfrak{r}^2 - (\mathfrak{u}_1\mathfrak{r})^2).$$

Nun ist $\mathfrak{u}_1\mathfrak{r}$ die Projektion von $\mathfrak{r}$ auf die Richtung von $\mathfrak{u}$, und nach dem Pythagoreischen Satze stellt daher die Summe das Trägheitsmoment des Punkthaufens in bezug auf die Achse $\mathfrak{u}$ dar. Schreiben wir dafür Θ, so wird schließlich

$$L = L' + \tfrac{1}{2} u^2 \Theta. \tag{6}$$

Da die Punkte nicht alle in einer einzigen Geraden liegen sollten, ist Θ für alle Achsen, die man ziehen mag, eine von Null verschiedene positive Größe. Es ist daher bewiesen, daß die lebendige Kraft für das Hauptbezugssystem kleiner ist als für jedes andere Koordinatensystem, das mit jenem den Ursprung gemeinsam hat.

Dieser Satz läßt sich sofort auch auf jedes andere Koordinatensystem übertragen, bei dem die angegebene Beschränkung wegfällt. Zu jedem beliebig festgelegten Koordinatensysteme läßt sich nämlich ein zweites angeben, das ihm jederzeit parallel bleibt, dessen Ursprung aber wie vorher mit dem Schwerpunkt des Punkthaufens zusammenfällt. Die Geschwindigkeiten relativ zu dem einen unterscheiden sich dann von denen relativ zu dem andern um ein konstantes Glied $\mathfrak{a}$, das die augenblickliche Geschwindigkeit der Translationsbewegung beider Koordinatensysteme gegeneinander angibt. Bildet man nun von neuem die lebendige Kraft, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m(\mathfrak{v} + \mathfrak{a})^2 = \tfrac{1}{2}\Sigma m \mathfrak{v}^2 + \Sigma m \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{a} + \tfrac{1}{2}\Sigma m \mathfrak{a}^2.$$

Für das dauernd mit dem Schwerpunkt zusammenfallende Koordinatensystem ist aber $\Sigma m \mathfrak{v} = 0$. Die lebendige Kraft in bezug auf ein beliebiges Koordinatensystem läßt sich daher, wenn wir den Buchstaben L jetzt darauf beziehen, in der aus Gl. (6) hervorgehenden Form

$$L = L' + \tfrac{1}{2} u^2 \Theta + \tfrac{1}{2} a^2 M \tag{7}$$

anschreiben und daraus folgt, daß in der Tat die lebendige Kraft für das Hauptbezugssystem kleiner ist als für jedes andere mögliche Bezugssystem. Unter M ist in der vorherhergehenden Formel natürlich die Gesamtmasse des ganzen Haufens und unter a der Absolutbetrag der Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{a}$ zu verstehen.

Ein Beobachter, der nur mit dem ihm gegebenen isolierten und unbekannten Wirkungsgesetzen unterworfenen Punkthaufen zu tun hat, der dabei aber immerhin weiß, was sich in einer anderen, nämlich in unserer wirklichen Welt schon bewährt hat, wird bei der ihm freistehenden Wahl des Bezugssystems Rücksicht darauf nehmen, daß ein Begriff, der für uns von so großer Bedeutung geworden ist, wie der Energiebegriff, womöglich auch für ihn anwendbar bleibt. Wenn die lebendige Kraft des Punkthaufens aber als eine „Energie“ angesehen werden soll, muß sie einen nur durch die relativen Bewegungen der Massen zueinander eindeutig bestimmten Wert haben. Durch diese Forderung wird die vorher noch bestehende Willkür in der Wahl des Bezugssystems aufgehoben; nur für das Hauptbezugssystem, wie wir es vorher schon genannt haben, erhält die lebendige Kraft einen solchen ausgezeichneten und hiermit zugleich eindeutig bestimmten Wert. Ob sich in einer anderen, uns ganz fremden Welt, wie sie durch den isolierten Punkthaufen angedeutet werden soll, der Energiebegriff auch noch als ein so weit reichendes Hilfsmittel zur einfachen Darstellung der vorkommenden Gesetzmäßigkeiten bewähren würde, wie bei uns, ist natürlich ganz ungewiß. Aber der Beobachter, der, aus unserer Welt kommend, sich in der ihm fremden zurecht finden soll, kann gar nicht anders handeln, als auf Grund der

vorhergehenden Erwägungen das Hauptbezugssystem als das vor allen anderen ausgezeichnete zu wählen. Es steht ihm dann auch frei, die darauf bezogenen Bewegungen als die für ihn „absoluten“ zu bezeichnen.

§ 3. Zeit und Masse.

Wir müssen jetzt auf einige Fragen zurückkommen, über die wir bisher stillschweigend hinweggegangen sind. Von dem Beobachter des isolierten Punkthaufens war vorausgesetzt, daß er sich im Besitze einer Uhr befinde, mit der er seine Zeitmessungen vornehme. Ob die Uhr richtig gehe oder nicht, blieb dahingestellt. Wir können jetzt noch hinzufügen, daß, selbst wenn die Uhr in unserem Sinne richtig gehen sollte, dies für den isolierten Punkthaufen, der eine Welt für sich bilden soll, ganz ohne Bedeutung ist. Welches Zeitmaß das für ihn angemessenste ist, muß der Beobachter erst selbst herausfinden, gerade so wie er sich auch das angemessenste Bezugssystem erst selbst schaffen mußte. Die Uhr, gleichgültig ob sie richtig oder falsch ging, hatte nur den Zweck, zunächst einmal einen Satz von Beobachtungen zu ermöglichen, der dann später, wenn die Abweichungen des Uhrganges von einem besser geeigneten Zeitmaße festgestellt sind, auf diese neue richtigere Zeit umgerechnet werden kann.

Bezeichnen wir die von der Uhr abgelesene Zeit mit t, die „wahre“ Zeit, wie wir der Kürze halber sagen wollen, mit T, so wird zwischen beiden irgend ein Zusammenhang bestehen, den wir in der Form

$$t = \varphi(T)$$

zum Ausdruck bringen wollen.

Hatten wir nun ein Koordinatensystem in beliebiger Weise festgelegt, so ergaben sich die Relativgeschwindigkeiten der materiellen Punkte gegen dieses Koordinatensystem als die Differentialquotienten der darauf bezogenen Radienvektoren nach der Zeit. Die Zeit aber kann entweder die Uhrzeit t oder die wahre Zeit T sein, und je nachdem wir die eine oder die andere wählen, erhält die Geschwindigkeit verschiedene

Werte. Zwischen beiden Werten besteht indessen der einfache Zusammenhang

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dT} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{dT} = \varphi' \frac{d\mathfrak{r}}{dt}. \tag{8}$$

Um von der Uhrzeit zur wahren Zeit überzugehen, genügt es daher, die Geschwindigkeit jedes Punktes mit dem für alle Punkte gleichen Faktor φ' zu multiplizieren, der selbst freilich im Laufe der Zeit seinen Wert ebenfalls ändern kann. Zu irgend einer bestimmten Zeit finden wir aber z. B. den auf die wahre Zeit bezogenen Drall aus der früheren Darstellung durch einfache Multiplikation mit dem Faktor φ', während die lebendige Kraft mit dem Quadrat von φ' zu multiplizieren ist.

Daraus folgt aber sofort, daß es für die früheren Betrachtungen, die zur Festsetzung des Hauptbezugssystems für den Punkthaufen führten, überhaupt ganz gleichgültig ist, ob dabei eine richtig oder eine falsch gehende Uhr gebraucht wurde. Denn die Bedingung, daß der Drall für das Hauptbezugssystem jederzeit verschwinden soll, bleibt immer noch erfüllt, wenn man auch jedes darin auftretende Glied mit einem konstanten Faktor multipliziert, und ebenso bleibt auch Gl. (7) immer noch bestehen, wenn auch jeder Beitrag zur lebendigen Kraft des Punkthaufens mit dem Quadrat von φ' multipliziert wird.

Anders ist es freilich mit den Kräften, denen wir, wenn die Zeitmessung geändert wird, ganz andere Werte beilegen müssen als vorher. Für die Beschleunigung im neuen Zeitmaße erhält man nämlich, wenn die Differentialquotienten von φ wieder durch Striche bezeichnet werden,

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dT^2} = \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} \cdot \varphi'^2 + \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\varphi''. \tag{9}$$

Die Kräfte an den verschiedenen Punkten werden daher nicht nur der Größe, sondern auch der Richtung nach geändert und zwar in verschiedenem Maße.

Da nun der Beobachter durch andere zwingende Rücksichten nicht genötigt wird, eine Art der Zeitzählung vor einer anderen zu bevorzugen, so bleibt ihm nur übrig, die Wahl

danach einzurichten, daß der Ausdruck für die lebendige Kraft einerseits und die beschleunigenden Kräfte andererseits möglichst einfache, für den weiteren Gebrauch dienliche Werte erlangen. Es hängt daher von Umständen ab, über die wir bei unserem isolierten Punkthaufen keine Voraussetzungen gemacht haben, wie die Zeitskala zu wählen ist, die für den Beobachter als die angemessenste erscheint und die er aus diesem Grunde dann als die für ihn „wahre" Zeit bezeichnen wird.

Ferner haben wir angenommen, daß für den Beobachter des isolierten Punkthaufens alle Massen von vornherein gegeben seien. Wenn man sich die Körper, die wir als materielle Punkte betrachteten, alle aus demselben Stoffe bestehend denkt, kann man dies damit rechtfertigen, daß die Massen dann einfach dem aus der Beobachtung zu entnehmenden Volumen proportional zu setzen sind. Im anderen Falle freilich würde für den Beobachter, wenn wir ihn ganz unabhängig von uns machen wollen, die weitere Aufgabe zufallen, die Verhältnisse der einzelnen Massen zueinander erst selbst noch in geeigneter Weise festzustellen. Für die Lösung dieser Aufgabe vermögen wir ihm ohne eine nähere Kenntnis des besonderen Verhaltens des Punkthaufens keine Anweisung mit auf den Weg zu geben. Man kann nur sagen, daß die Wahl jedenfalls so zu treffen ist, daß die Kraftgesetze, zu denen er bei dieser Wahl gelangt, möglichst einfach und leicht übersehbar ausfallen.

§ 4. Trägheitsgesetz und absolute Bewegung.

Der Zweck der vorhergehenden Betrachtungen besteht selbstverständlich darin, durch möglichst weitgehende Verallgemeinerung der Aufgabe, sich in einem isolierten Punkthaufen zurecht zu finden, einen Maßstab für die Lösung zu finden, die wir selbst davon für die Vorgänge in unserer wirklichen Welt im Laufe der geschichtlichen Entwicklung der Wissenschaft gegeben haben. Wir müssen daher jetzt zusehen, was zu dem, was ganz allgemein gültig ist, in unserem besonderen Falle, und zwar nicht mehr als Folge einer bloß logischen Verstandestätigkeit, sondern auf Grund der Ver-

wertung von Beobachtungsergebnissen in unserer wirklichen Welt hinzugetreten ist.

Da steht voran das Trägheitsgesetz, und wir werden uns vor allem danach zu fragen haben, welche Bedeutung ihm im Sinne der vorhergehenden Ausführungen zukommt.

Wenn man sagt, ein materieller Punkt, an dem keine Kraft angreift, bleibe entweder in Ruhe oder er setze seine Bewegung mit unveränderter Geschwindigkeit in der gleichen Richtung fort, so ist diese Aussage ohne weitere ergänzende Zusätze ganz bedeutungslos. Zunächst kommt es ganz darauf an, welches Bezugssystem wir für die Beschreibung der Bewegung zugrunde legen. In jedem isolierten Punkthaufen können wir es durch geeignete Festlegung des Koordinatensystems erreichen, daß ein beliebiger materieller Punkt entweder ruht oder eine gleichförmig geradlinige Bewegung beschreibt. Nun haben wir freilich gesehen, daß sich in jedem isolierten Punkthaufen, wenn wir die Massen darin als gegebene Größen ansehen dürfen, ein Hauptbezugssystem angeben läßt, das wir ohnehin notwendig wählen müssen, wenn wir die wichtigsten Begriffe, die wir zur Beschreibung der Naturvorgänge ausgebildet haben, darauf anwenden wollen. Wir können daher unbedenklich sagen, daß die Aussage des Trägheitsgesetzes auf dieses Hauptbezugssystem gemünzt ist.

Aber auch, wenn sie so gedeutet wird, bleibt die Aussage des Trägheitsgesetzes zunächst noch inhaltsleer. Gewiß dürfen wir im Sinne der früheren Ausführungen sagen, daß an einem materiellen Punkte, dessen Bewegung relativ zu dem Hauptbezugssysteme oder (wie wir dafür kürzer sagen können) dessen absolute Bewegung geradlinig und gleichförmig ist, keine Kraft angreift. Aber das ist dann keine Erfahrungstatsache, sondern eine Folge der Definition des Begriffes der Kraft. In der Tat haben wir ja gar kein anderes Mittel, um die Kräfte festzustellen, die zwischen den Himmelskörpern auftreten, als sie aus den beobachteten Beschleunigungen abzuleiten.

Und doch spricht das Trägheitsgesetz eine grundlegende Erfahrungstatsache aus, wie wir auch ohne eingehendere

Analyse von vornherein schon fühlen. Sie besteht in folgendem. Die Forschung hat uns dazu geführt, zwischen den Körpern bestimmte Kräfte anzunehmen, die von verhältnißmäßig leicht übersehbaren Umständen abhängen und die einfachen Wirkungsgesetzen unterliegen. Die Physik liefert uns ein Verzeichnis dieser Kräfte und die Erfahrung zeigt uns, daß dieses Verzeichnis in der Tat ziemlich vollständig sein muß. Wir können uns nun auf Grund dieser Kenntnis sehr wohl einen materiellen Punkt in unserer Welt vorstellen, der sich unter solchen Umständen befindet, daß die in jenem Verzeichnis aufgeführten Kräfte entweder überhaupt (ganz oder nahezu) wegfallen oder sich gegenseitig aufheben. Das Trägheitsgesetz sagt uns dann aus, daß der materielle Punkt unter diesen Umständen entweder (ganz oder nahezu) eine geradlinig gleichförmige Bewegung beschreibe oder daß andernfalls das Verzeichnis der Kräfte noch nicht vollständig, sondern einer als Aufgabe der Forschung zu betrachtenden weiteren Ergänzung bedürftig sei.

Als Inhalt des Trägheitsgesetzes ist daher der Ausdruck der Überzeugung unserer heutigen Naturforschung anzusehen, daß sie mit den von ihr aufgestellten Gesetzen über das Auftreten besonderer Kräfte die Bewegungsvorgänge im Hauptbezugssysteme (abgesehen von geringfügigen Ausnahmen, die noch ihrer Eingliederung in das bestehende System harren mögen) vollständig darzustellen vermag. Oder mit anderen Worten: Bei der Aussage des Trägheitsgesetzes ist der Ton auf das Wort „Kraft“ zu legen und darunter eine von jenen Kräften zu verstehen, die von der Physik anerkannt und näher besprochen sind. Das sind also die Oberflächenkräfte, die zwischen Körpern übertragen werden, die in Berührung miteinander stehen, dann die Newtonsche Gravitationskraft und die elektrischen und magnetischen Fernkräfte: Daß eine Kraft eine Beschleunigung hervorbringt, ist also nach unserer Darstellung die Folge der Definition des Wortes Kraft; daß aber die in der wirklichen Welt zu beobachtenden Kräfte, diese bezogen auf das Hauptbezugssystem, sich alle in diese

kurze Liste einreihen lassen, ist ein Ergebnis der experimentellen Forschung, und nichts anderes als dieses Ergebnis kommt im Trägheitsgesetze zum Ausdrucke.

Wenn eine solche theoretische Darstellung der Bewegungsvorgänge möglich sein soll, muß sie mit einer bestimmten Art der Zeitmessung verbunden sein. Wir sahen vorher, daß im isolierten Punkthaufen die Zeitskala von vornherein willkürlich ist und daß die Entscheidung über die angemessenste Art der Zeitzählung erst aus besonderen Erfahrungen über die Einzelheiten der Bewegungsvorgänge abgeleitet werden kann. In unserem Falle wird durch das Trägheitsgesetz darüber entschieden. Ein materieller Punkt, an dem keine der offiziell anerkannten Kräfte wirkt, beschreibt gegen das Hauptbezugssystem nach dem Trägheitsgesetze eine geradlinige, gleichförmige Bewegung. Damit ist die Zeitskala festgelegt. Wir müssen unsere Uhren so einrichten oder ihre Angaben nötigenfalls derart verbessern, daß sie um gleich viel fortschreiten, während ein zu unserer Welt gehöriger materieller Punkt unter den angegebenen Umständen gleiche Wege durchlaufen hat. Gleichbedeutend damit ist auch die Forderung, daß ein materieller Punkt, der einer Zentralkraft unterworfen ist, in gleichen Zeiten gleiche Sektorenflächen beschreibt, oder daß sich ein starrer Körper, der um eine Hauptträgheitsachse rotiert, in gleichen Zeiten um gleiche Winkel dreht, wenn keine Kräfte an ihm wirken, oder nur solche, die sich zu einer durch den Massenmittelpunkt gehenden Resultierenden zusammensetzen lassen. Denn daß dies so sein muß, bildet eine notwendige Folgerung aus dem Trägheitssatze, wie schon aus den Lehren des vierten Bandes bekannt ist.

Die früheren Ausführungen über die Bedeutung des Trägheitsgesetzes sind daher noch dahin zu ergänzen, daß es zugleich eine Anweisung dafür liefert, wie die Zeiten zu zählen sind, oder mit anderen Worten, was wir in unserer Welt unter der „wahren“ Zeit zu verstehen haben.

Ähnlich ist es auch mit den Massen. Wenn wir einen Vorgang zu beobachten vermögen, bei dem nur zwei Körper, die wir als materielle Punkte ansehen können, Kräfte aufeinander ausüben, während alle anderen Kräfte davon ausgeschlossen sind, folgt das Verhältnis der Massen der beiden Punkte aus dem Verhältnisse ihrer Beschleunigungen gegen das Hauptbezugssystem. Denn das Gesetz der Wechselwirkung ist, wie wir schon früher erkannten, bereits durch die Wahl des Hauptbezugssystems für die Gesamtheit aller Kräfte erfüllt und muß auch noch erfüllt bleiben, wenn die Kräfte zwischen diesen Punkten neu hinzutreten, woraus hervorgeht, daß auch die beiden Kräfte für sich dem Wechselwirkungsgesetze genügen.

Natürlich ist es nicht möglich, alle Massen, mit denen wir zu tun haben, auf diesem Wege miteinander zu vergleichen. Hier tritt vielmehr noch die Erfahrung ergänzend hinzu, daß, sooft wir einen solchen Versuch auch erneuern mögen, sich dabei immer wieder herausstellt, daß gleiche Rauminhalte von chemisch und physikalisch gleichen Stoffen auch gleiche Massen besitzen.

An sich sind die Kräfte ihrer Definition nach von dem Koordinatensystem abhängig, auf das wir die Beschreibung der Bewegungen innerhalb des Punkthaufens beziehen. Es war daher schon von vornherein darauf hinzuweisen, daß jede Aussage über eine Kraft ein bestimmtes Bezugssystem fordert und daß insbesondere das Trägheitsgesetz dahin zu erläutern ist, daß das Hauptbezugssystem unseres Weltalls dabei zugrunde gelegt werden muß. Auch alle Aussagen der Experimentalphysik über die unter besonderen Umständen auftretenden Kräfte sind in diesem Sinne zu verstehen. Hierbei ist jedoch zu bemerken, daß es bei den Kräften nur auf die Beschleunigungen ankommt und daß es daher für sie nichts ausmacht, wenn man das Hauptbezugssystem mit einem andern Koordinatensystem vertauscht, in dem die Beschleunigungen dieselben Werte behalten. Das trifft bei jedem Koordinatensysteme zu, das gegen das Hauptbezugssystem eine geradlinige,

gleichförmige Translationsbewegung beschreibt. Jedes Bezugssystem, von dem dies zutrifft, vermag daher bei der Aussage des Trägheitsgesetzes das Hauptbezugssystem zu ersetzen und wird aus diesem Grunde als ein Inertialsystem bezeichnet. Ferner ist auch zu bedenken, daß es bei der experimentellen Bestimmung von Kräften, die stets mit unvermeidlichen Versuchsfehlern behaftet ist, gewöhnlich gar nichts ausmacht, wenn man die Kräfte anstatt auf ein Inertialsystem auf ein anderes Koordinatensystem, das etwa mit der Erde fest verbunden ist, bezieht, falls darin die Beschleunigungen so wenig von denen gegen ein Inertialsystem abweichen, daß die Abweichungen gegenüber den Messungsfehlern unerheblich sind.

Die im Hauptbezugssysteme oder in einem Inertialsysteme festgestellten Kräfte kann man der kürzeren Ausdrucksweise wegen als die „wirklich vorhandenen“ oder die „physikalisch existierenden“ Kräfte bezeichnen. Zu ihnen kommen, sobald man auf ein anderes Koordinatensystem übergeht, die „Ergänzungskräfte der Relativbewegung“, wie dies schon im vierten Bande ausführlich besprochen wurde. Nachdem sie beigefügt sind, ist für diese neue Aufstellung des Beobachters wieder die dynamische Grundgleichung mit den bereits bestimmten Kräften, ferner auch der Flächensatz, der Satz von der lebendigen Kraft usf. erfüllt. Dagegen ist das Wechselwirkungsgesetz nicht mehr allgemein erfüllt und auch die relative lebendige Kraft kann nicht mehr allgemein als eine Energiegröße gedeutet werden, in dem Sinne etwa, daß die Umwandlung von lebendiger Kraft in Wärme unter allen Umständen nach einem festen Verhältnisse erfolgen müßte. Darauf wird noch zurückzukommen sein. In der zuletzt genannten Hinsicht zeichnet sich das Hauptbezugssystem in der Tat vor allen anderen und zwar auch vor den übrigen Inertialsystemen in sehr vorteilhafter Weise aus, so daß wir alle Ursache haben, dies durch einen besonderen Namen hervorzuheben, indem wir die darauf bezogenen Bewegungen als die absoluten Bewegungen bezeichnen.

Das „Hauptbezugssystem“ bildet eine Forderung der von

uns gewählten Darstellung der Bewegungsvorgänge im Weltall. Die Anweisung, die ursprünglich zu seiner Ermittlung aufgestellt wurde, läßt sich aber praktisch nicht ausführen, da wir nicht über alle Massen und ihre Verteilung im ganzen Weltraume unterrichtet sind. Nimmt man jedoch an, daß die Hauptmassen mit den sichtbaren Fixsternen verbunden sind, so folgt, daß es diesen gegenüber festzulegen ist. Ein Koordinatensystem, das in geeigneter Weise gegen den Fixsternhimmel orientiert ist, kann daher keine merkliche Drehbewegung gegen das geforderte Hauptbezugssystem mehr ausführen. Als eine Aufgabe der Astronomie ist es zu betrachten, diese Orientierung so genau als möglich zu bewirken.

Um die Betrachtungen über das Trägheitsgesetz nochmals kurz zusammenzufassen, können wir sagen, daß es sich durch einen einfachen Satz ebensowenig vollständig wiedergeben läßt, wie etwa der Inhalt eines Buches durch die Angabe des Titels. Das Trägheitsgesetz ist nicht ein einfacher Erfahrungssatz, sondern es bildet das Programm, nach dem wir unsere Naturbeschreibung durchzuführen entschlossen sind: freilich ein Programm, das nicht willkürlich gewählt ist, für das wir uns vielmehr nur deshalb entscheiden, weil die Erfahrung uns bereits gelehrt hat, daß es zu einer einfachen und fruchtbringenden Auffassung der Naturvorgänge führt.

§ 5. Zwei Punkthaufen.

Wir wollen jetzt die allgemeinen Betrachtungen über den isolierten Punkthaufen noch etwas weiter führen. Dabei nehmen wir an, daß der Beobachter die ihm früher gestellte Aufgabe für einen ihm empirisch gegebenen isolierten Punkthaufen bereits gelöst, insbesondere also dessen Hauptbezugssystem festgestellt und sich für ein geeignetes Zeitmaß entschieden habe. Außerdem möge es ihm auch bis zu einem gewissen Grade schon gelungen sein, durch die Aufstellung von besonderen Kraftgesetzen, die von den unsrigen natürlich vollständig abweichen können, eine ausreichende Beschreibung von

den nun für ihn als „absolute“ zu bezeichnenden Bewegungen zu geben. Nachdem er so weit gekommen ist, möge er plötzlich bemerken, daß außer dem ersten Punkthaufen in einiger Entfernung davon noch ein zweiter vorhanden ist, der seiner Beobachtung bis dahin ganz entgangen war. Wie wird er sich nun dieser Entdeckung gegenüber zu verhalten haben?

Die nächsten Schritte sind klar vorgezeichnet. Der Beobachter wird vorerst die Bewegungen innerhalb des zweiten Punkthaufens feststellen, und wir setzen voraus, daß ihm hierzn wie im früheren Falle die Mittel ohne weiteres zu Gebote stehen. Welches Koordinatensystem er anfänglich dazu benutzt, ist ziemlich gleichgültig, obschon es ihm am nächsten liegt, vorläufig das ihm bereits gewohnt gewordene Hauptbezugssystem des ersten Punkthaufens zu wählen. Dann wird er aber ferner auch für den zweiten Punkthaufen nach denselben Grundsätzen wie früher für den ersten das für diesen für sich gültige Hauptbezugssystem ableiten. Und endlich wird er erwägen, ob es nicht vorteilhafter für ihn ist, beide Punkthaufen zusammen als ein Ganzes zu betrachten und für den vereinigten Punkthaufen ebenfalls dessen Hauptbezugssystem aufsuchen. Dadurch gewinnt er drei verschiedene Aufstellungen, die wir in der angegebenen Reihenfolge als die erste, zweite und dritte bezeichnen wollen und deren Bedeutung nun gegeneinander abzuwägen ist.

Je nach der Aufstellung wirken an den einzelnen materiellen Punkten verschiedene Kräfte. Wir hatten angenommen, daß für die erste Aufstellung die Kräfte im ersten Punkthaufen schon durch einfache, aus den Beobachtungen abgeleitete Kraftgesetze in befriedigender Weise dargestellt worden seien. Daraus folgen dann die auf die dritte Aufstellung bezogenen Kräfte durch Beifügung der Ergänzungskräfte nach dem Satze von Coriolis, denn die Bewegung des ersten und des dritten Bezugssystems gegeneinander ist auf Grund der vorgenommenen Beobachtungen als bereits bekannt anzusehen. Die Mühe, die vorher darauf verwendet worden war, die Kraftgesetze innerhalb des ersten Punkthaufens aufzustellen, ist also durch die jetzt eingetretene Erweiterung der Aufgabe nicht verloren gegangen, sondern ihr

Ergebnis kann nach einfacher Umrechnung mittels des Satzes von Coriolis sofort übernommen werden. Dasselbe trifft auch für den zweiten Punkthaufen zu, falls sich herausstellen sollte, daß sich auch für die in ihm vorkommenden Bewegungen, bezogen auf die zweite Aufstellung, ähnlich einfache Kraftgesetze angeben lassen wie vorher für den ersten.

Aber nun entsteht die Frage, welche Aufstellungsart weiterhin den Vorzug verdient oder welche, wie man in solchen Fällen zu sagen pflegt, die naturgemäße ist. Denn unter der Voraussetzung, daß beide Punkthaufen stets so weit entfernt voneinander bleiben, daß sie stets deutlich voneinander getrennt werden können, ist es offenbar ganz dem Gutdünken des Beobachters überlassen, ob er jeden Punkthaufen unter Zugrundelegung der ersten und zweiten Aufstellung für sich als isolierten Punkthaufen behandeln, oder ob er beide von vornherein zu einer höheren Einheit zusammenfassen, also sich für die dritte Aufstellung entscheiden will.

Ihre Rechtfertigung kann die zu treffende Entscheidung nur darin finden, daß für sie die Kraftgesetze einfacher und namentlich auch genauer in Übereinstimmung mit den Beobachtungen ausfallen, als im andern Falle. Es könnte sich z. B. zeigen, daß die Ergänzungskräfte der Relativbewegung beim Übergange von der ersten zur dritten Aufstellung im Verhältnisse zu den auf die erste Aufstellung bezogenen Kräften nur sehr geringfügig sind, daß aber bei ihrer Zufügung ein genauerer Anschluß an die Beobachtungen gewonnen wird als er vorher bestand. Das trifft z. B. zu, wenn man unsere Erde unter dem ersten Punkthaufen versteht und unter dem zweiten die ganze übrige Welt. Bei der ersten Aufstellung genügen die in der Physik aufgestellten Kraftgesetze in den meisten Fällen von irdischen Bewegungserscheinungen zu einer befriedigenden Erklärung. Aber die seitliche Ablenkung fallender Körper oder, um ein anderes Beispiel zu nennen, die Ebbe- und Flutbewegung lassen sich damit nicht erklären und man müßte daher, um sie mit zu umfassen, die Liste der Kraftgesetze erweitern, wenn man an der ersten Aufstellung festhalten

wollte. Diese Nötigung fällt dagegen weg, wenn man sich für die andere Aufstellung entscheidet.

Von besonderer Bedeutung ist ferner auch der Ausdruck für die lebendige Kraft. Für die erste Aufstellung sei die lebendige Kraft innerhalb des ersten Punkthaufens bereits berechnet und wie in § 2 mit L' bezeichnet. Dann liefert für die dritte Aufstellung der erste Punkthaufen zu der darauf bezogenen lebendigen Kraft nach Gl. (7) S. 14 den Beitrag

$$L = L' + \frac{1}{2}u^2\Theta + \frac{1}{2}a^2M,$$

und ein entsprechender Ausdruck gilt auch für den Beitrag des zweiten Punkthaufens. Die beiden letzten Glieder auf der rechten Seite geben zusammen die lebendige Kraft eines starren Körpers an von derselben Masse und derselben Gestalt, die der erste Punkthaufen zur Zeit grade besitzt, wenn er sich mit der Winkelgeschwindigkeit u und der Schwerpunktsgeschwindigkeit a gegen die dritte Aufstellung des Beobachters bewegt.

Diesem Ergebnisse kommt eine einfache Bedeutung zu. Die gesamte lebendige Kraft L des ersten Punkthaufens setzt sich jetzt aus zwei Teilen zusammen, von denen der erste, L', nur von den Vorgängen innerhalb dieses Punkthaufens selbst abhängt, während der andere Teil, der durch die Summe der beiden letzten Glieder gebildet wird, daher rührt, daß noch ein zweiter Punkthaufen besteht, mit dem er zu einer Einheit zusammengefaßt werden kann.

Stellen wir uns einmal vor, es wäre ein Eingriff möglich in der Art, daß die Bewegungen innerhalb des ersten Punkthaufens durch eine Herstellung starrer Verbindungen plötzlich gehemmt würden. Durch den unelastischen Stoß, der damit verbunden ist, würde die lebendige Kraft L' vernichtet und, wie wir annehmen wollen, in Wärme verwandelt. Das gilt zunächst für die erste Aufstellung; aber man erkennt leicht, daß sich auch für die dritte Aufstellung die lebendige Kraft um denselben Betrag vermindert. Der auf die dritte Aufstellung bezogene Drall des ersten Punkthaufens kann sich

nämlich durch den Stoßvorgang innerhalb des ersten Punkthaufens nicht geändert haben; ebenso muß auch die Schwerpunktsgeschwindigkeit unverändert bleiben. Aus den schon in § 1 angestellten Überlegungen folgt aber, daß der Drall vor Herstellung der starren Verbindungen gleich war der geometrischen Summe aus dem Drall in bezug auf die erste Aufstellung und dem Drall eines starren Körpers, der sich mit der Winkelgeschwindigkeit u und der Schwerpunktsgeschwindigkeit a gegen die dritte Aufstellung bewegte. Da nun die erste Aufstellung auf dem Hauptbezugssysteme für den ersten Punkthaufen genommen wurde, so ist der zugehörige Drall gleich Null und es bleibt nur das andere Glied übrig. Aus dieser Betrachtung folgt, daß sich der starre Körper, der durch die Herstellung der starren Verbindungen aus dem ersten Punkthaufen hervorgegangen ist, unmittelbar nachher mit derselben Winkelgeschwindigkeit u und derselben Schwerpunktsgeschwindigkeit a gegen die dritte Aufstellung bewegt, wie vor dem Stoße das Hauptbezugssystem des ersten Punkthaufens. Wenn wir also nach dem Stoße die lebendige Kraft für die dritte Aufstellung von neuem berechnen, so fällt aus dem Ausdrucke für L nur das Glied L' heraus, während die beiden anderen Glieder ihre Werte unverändert behalten.

Damit ist bewiesen, daß es für die Berechnung des Verlustes an lebendiger Kraft durch den Stoß gleichgültig ist, ob wir dabei die erste oder die dritte Aufstellung zugrunde legen. Es ist daher in beiden Fällen die Umwandlung von lebendiger Kraft in Wärme nach demselben festen Verhältnisse zu erwarten. Das ist aber als Vorbedingung dafür zu betrachten, daß man die in der einen oder anderen Weise berechnete lebendige Kraft in jedem Falle als eine Energiegröße ansehen kann.

Aus dem jetzt betrachteten Zusammenhange heraus läßt sich daher kein zwingender Grund für die Wahl der einen oder anderen Aufstellung ableiten.

Zu einem etwas anderen Ergebnisse gelangt man dagegen, wenn man den Flächensatz heranzieht. Für die dritte Auf-

stellung bleibt ihrer Definition nach der Drall für die Gesamtheit beider Punkthaufen dauernd gleich Null. Der Drall für den ersten Punkthaufen allein wird dagegen in bezug auf die dritte Aufstellung im allgemeinen von Null verschieden sein. Zeigt es sich nun, daß sich dieser Drall im Laufe der Zeit weder der Größe noch der Richtung nach ändert, so sind wir auch bei der dritten Aufstellung, obschon sie von vornherein das Zusammenwirken beider Punkthaufen ins Auge faßt, nicht veranlaßt, das Bestehen von Kräften zwischen beiden Punkthaufen anzunehmen. Wir können vielmehr auch dann noch alle Bewegungen innerhalb jedes Punkthaufens ausschließlich auf innere Kräfte zurückführen. Die Zusatzkräfte, die beim Übergange von der ersten zur dritten Aufstellung beizufügen sind, lassen sich also dann ebenfalls durch innere Kräfte innerhalb des ersten Punkthaufens erklären.

Im anderen Falle muß man dagegen, sobald man sich nur überhaupt einmal für die dritte Aufstellung entschieden hat, auch „physikalisch existierende“ Kräfte (in dem früher besprochenen Sinne) zwischen beiden Punkthaufen annehmen. Unter diesen Umständen wird man viel mehr geneigt sein, den partikularistischen Standpunkt aufzugeben und sich für den unitarischen zu entscheiden.

Immerhin muß aber betont werden, daß dieser Grund keineswegs zwingend ist. Entscheidend wird es immer bleiben, bei welcher Auffassung man zur einfachsten, dabei aber immer ausreichend genau mit den Beobachtungen innerhalb jedes einzelnen Punkthaufens übereinstimmenden Erklärung der Erscheinungen gelangt, d. h. unter welchen Umständen die besonderen Kraftgesetze, die man nach dem Vorbilde der in unserer Physik aufgestellten Liste zur Ableitung der Bewegungserscheinungen anzunehmen hat, am einfachsten ausfallen. Nur die Vermutung kann ausgesprochen werden, daß der unitarische Standpunkt in dem zuletzt besprochenen Falle die besseren Aussichten bietet; aber erst die Einzeluntersuchung kann lehren, ob dies auch zutrifft. Dabei kann hinzugefügt werden, daß die Erfahrung in unserer Welt allerdings bereits

in diesem Sinne entschieden hat, insofern als man mit einfacheren Kraftgesetzen auskommt, wenn man nicht die Erde für sich als isolierten Punkthaufen betrachtet, sondern sie mit der ganzen übrigen Welt zu einer einzigen Einheit zusammenfaßt. Und zwar, wie wohl zu beachten ist, auch dann, wenn man sich auf die Untersuchung irdischer Bewegungsvorgänge allein zu beschränken beabsichtigt.

Es bedarf kaum der Bemerkung, daß das, was hier für zwei Punkthaufen besprochen wurde, auch auf das Zusammensein von drei oder mehr Punkthaufen sinngemäß übertragen werden kann.

§ 6. Ein Punkthaufen und ein einzelner materieller Punkt.

Die Überlegungen des vorigen Paragraphen sollen jetzt auf den damit schon umfaßten besonderen Fall angewendet werden, daß der zweite Punkthaufen, von dem die Rede war, durch einen einzigen materiellen Punkt ersetzt wird. Die vorher als „zweite" bezeichnete Aufstellung des Beobachters verliert in diesem Falle ihre Bedeutung; dagegen sollen die beiden anderen in demselben Sinne wie vorher immer noch als die „erste" und „dritte" bezeichnet werden.

Wenn der neu hinzutretende Einzelpunkt gegen das Hauptbezugssystem des ersten Punkthaufens eine geradlinige gleichförmige Bewegung beschreibt, liegt der Fall vor, von dem wir vorher zuerst sprachen, nämlich der Fall, in dem man zunächst geneigt sein wird, an der vor der Entdeckung des Einzelpunktes aufgestellten Theorie festzuhalten, also den Punkthaufen und den Einzelpunkt so zu behandeln, als wenn sie sich gar nichts angingen. Das ist jedenfalls zulässig; ob es aber zweckmäßig ist, kann sich erst durch den Versuch herausstellen, ob man durch die Hereinziehung des Einzelpunktes zu einer entweder einfacheren oder noch genauer mit der Beobachtung übereinstimmenden „Kraftliste" gelangt.

Sieht man den Einzelpunkt als gleichberechtigten Bestandteil des Ganzen an, so muß man von der ersten zur dritten Aufstellung des Beobachters übergehen. Das dritte Koordinaten-

system führt gegen das erste außer einer gleichförmigen geradlinigen Translationsbewegung auch noch eine Drehung aus. Die Winkelgeschwindigkeit der Drehbewegung ist aber sowohl der Richtung als der Größe nach veränderlich. Für irgend einen bestimmten Augenblick kann die Winkelgeschwindigkeit aus den als bekannt anzusehenden Stellungen und Geschwindigkeiten gegen das erste Bezugssystem nach den bekannten Lehren des vierten Bandes berechnet werden. Nachdem dies geschehen ist, folgen dann auch nach dem Satze von Coriolis die an jedem Punkte des Haufens anzubringenden Ergänzungskräfte, die zu den vorher relativ zum ersten Bezugssysteme ermittelten Kräften hinzutreten. Da weiterhin die Bewegungen gegen das dritte Bezugssystem als die absoluten zu bezeichnen sind, müssen dann auch die auf die angegebene Art berechneten Ergänzungskräfte nachträglich als „physikalisch existierende“ betrachtet werden. Diese hängen aber von der Geschwindigkeit des neu hinzugetretenen Einzelpunktes gegen das erste und somit auch gegen das dritte Bezugssystem ab.

Diese Überlegungen reichen aus, um die Vermutung zu begründen, daß man zu einer logisch besser als die uns geläufige befriedigenden Darstellung der Bewegungen im Weltraume gelangen könnte, indem man Kräfte zwischen den Weltkörpern einführte, die von den Geschwindigkeiten abhängen und die ich aus diesem Grunde bei einer früheren Gelegenheit, als ich mich zum erstenmal mit diesen Dingen beschäftigte, als „Geschwindigkeitskräfte“ bezeichnete. Ich wurde dadurch auch veranlaßt, einen Versuch anzustellen, ob sich solche Kräfte etwa unmittelbar nachweisen ließen. Dazu verwendete ich ein schnell rotierendes Schwungrad, das luftdicht eingekapselt war und in dessen Nähe ich ein Pendel oder eine Torsionswage aufhängte. Ich dachte, daß es vielleicht möglich sein würde, an einem Ausschlage des Pendels oder der Torsionswage eine auf die Rotation des Schwungrads zurückzuführende Kraft nachzuweisen. Dieser Versuch ist mißlungen. Als entscheidend kann dieser Mißerfolg aber schon deshalb nicht angesehen werden, weil es ja sehr wohl möglich wäre, daß die

Kraft bei meiner Versuchsanordnung nur zu klein gewesen wäre, um sie beobachten zu können.

Ich habe ausdrücklich nur von einer „Vermutung“ gesprochen, die uns veranlassen könnte, nach Geschwindigkeitskräften zu suchen. Welche Darstellung unter allen, die an sich als möglich erkannt sind, tatsächlich den Vorzug für unsere wirkliche Welt verdient, kann dagegen nur die Erfahrung lehren.

Immerhin glaube ich, daß die hier entwickelte Anschauung einige Beachtung verdient, da es mir keineswegs ausgeschlossen erscheint, daß sie noch zu fruchtbaren Folgerungen führen könnte. Ich verzichte jedoch darauf, die vorher angedeutete Rechnung über die Ergänzungskräfte hier anzuschreiben, da sie mich bisher wenigstens nur zu langen Formeln geführt hat, aus denen es mir nicht gelungen ist, ein einfaches Ergebnis abzuleiten. Der schönste Erfolg würde natürlich darin bestehen, wenn es etwa gelingen sollte, die Newtonsche Gravitationskraft durch Geschwindigkeitskräfte zu ersetzen oder, was auf dasselbe hinauskommt, sie aus solchen herzuleiten. Für unmöglich halte ich dies nicht und auch nicht einmal für unwahrscheinlich. Die Zukunft allein wird lehren können, ob ich damit recht habe.

Zum mindesten aber hoffe ich, daß es mir gelungen sein möge, den Leser, der sich die Mühe genommen hat, über alle vorhergehenden Ausführungen ernstlich nachzudenken, von den Zweifeln und logischen Schwierigkeiten zu befreien, zu denen der Begriff der absoluten Bewegung so leicht zu führen vermag.

Hierauf verlasse ich diesen Gegenstand und wende mich zu mehr praktischen Dingen.

§ 7. Relativbewegungen im gleichförmig rotierenden Raum.

Bei den praktischen Anwendungen der Lehre von der Relativbewegung handelt es sich meistens um Bewegungen gegen ein Fahrzeug (ein Gefäß u. dergl.), das eine Drehbewegung um eine feststehende Achse mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit beschreibt. Bezogen ist diese Fahrzeugbewegung zunächst auf den „absoluten“ Raum im Sinne

der vorhergehenden Darlegungen. Wenn das Fahrzeug sehr schnell rotiert im Verhältnisse zur Winkelgeschwindigkeit der Erde, die sich in jedem Sterntage nur einmal gegen den Fixsternhimmel dreht, macht es aber praktisch keinen Unterschied, wenn man von der Bewegung der Erde ganz absieht und die Bewegung des Fahrzeugs gegen die Erde so behandelt, als wenn sie eine absolute Bewegung wäre. Das soll hier geschehen.

Die allgemeine Aussage des Satzes von Coriolis vereinfacht sich in diesem Falle erheblich, insofern als sich für die Beschleunigung der Fahrzeugbewegung ein sehr einfacher Ausdruck angeben läßt. In Band IV wurde dieser Satz durch Gl. (209) der 3. Aufl.

$$\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2} = \frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2} + \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} + 2V\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\mathfrak{u} \tag{10}$$

ausgesprochen. Darin bedeutete $\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2}$ die absolute, $\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}$ die relative Beschleunigung eines bewegten materiellen Punktes, $\frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2}$ die absolute Beschleunigung des Fahrzeugpunktes, mit dem der bewegte materielle Punkt zur Zeit t zusammenfällt, und $\mathfrak{u}$ die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich das Fahrzeug dreht. In unserem besonderen Falle ist zunächst $\mathfrak{u}$ konstant und die Fahrzeugbeschleunigung $\frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2}$ besteht in einer einfachen Zentripetalbeschleunigung, von der schon in Band I, § 14 der 3. Aufl. gezeigt wurde, daß sie in die Richtung der von dem Punkte auf die Drehachse gezogenen Senkrechten fällt und gleich u^2R gesetzt werden kann, wenn unter R die Länge dieser Senkrechten oder der Halbmesser des von dem Fahrzeugpunkte beschriebenen Kreises und unter u der Absolutbetrag der Winkelgeschwindigkeit verstanden wird.

Multipliziert man Gl. (10) mit der Masse m des materiellen Punktes, so folgt

$$m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = m\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2} - m\frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2} - 2mV\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\mathfrak{u}$$

oder, wenn wir mit $\mathfrak{P}$ die physikalisch existierende, d. h. also die auf den absoluten Raum bezogene, an dem materiellen

Punkte angreifende Kraft und mit $\mathfrak{C}$ die Zentrifugalkraft bezeichnen, von der wir bereits wissen, wie sie in einfacher Weise angegeben werden kann,

$$m \frac{d^2 \mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{P} + \mathfrak{C} - 2m V \frac{d\mathfrak{r}}{dt} \mathfrak{u}. \tag{11}$$

Alle Sätze der Dynamik bleiben daher auf die Relativbewegung des materiellen Punktes anwendbar, wenn wir daran eine Kraft annehmen, die sich in der auf der rechten Seite der Gleichung angegebenen Weise aus drei Gliedern zusammensetzt. Das erste Glied $\mathfrak{P}$ ist aus der „Kraftliste" der Physik zu entnehmen und daher durch die näheren Umstände des einzelnen Falles bestimmt und hiermit als bekannt zu betrachten. Die beiden anderen Glieder liefern die Ergänzungskräfte der Relativbewegung, die in der weiteren Behandlung dieselbe Rolle spielen, als wenn sie ebenfalls physikalisch existierende Kräfte und zwar Fernkräfte wären, die an dem materiellen Punkte angreifen.

Die Kraft $\mathfrak{P}$ bedarf noch einer näheren Besprechung. Zunächst war die Anweisung gegeben, sie aus den im absoluten Raume festgestellten Verhältnissen zu entnehmen. Wir müssen aber darnach trachten, uns von dieser Beziehung auf den absoluten Raum so weit als möglich frei zu machen. Gehört die Kraft $\mathfrak{P}$ zu einem im absoluten Raume feststehenden stationären Kraftfelde, so ist das Kraftfeld relativ zum Fahrzeuge im allgemeinen nicht mehr stationär, sondern nur dann, wenn das Kraftfeld im absoluten Raume um die Drehachse des Fahrzeugs herum symmetrisch war. Rotiert also das Fahrzeug z. B. um eine lotrechte Achse, so darf man gewöhnlich genau genug annehmen, daß das Schwerefeld der Erde um die Achse herum symmetrisch und überdies homogen ist, und dann kann jener Anteil von $\mathfrak{P}$, der von dem Gewichte des materiellen Punktes herrührt, auch relativ zum Fahrzeuge als der Größe und Richtung nach konstant betrachtet werden. Bei der Rotation um eine anders gerichtete Achse würde dagegen das Gewicht als eine der Richtung relativ zum Fahrzeuge nach veränderliche Kraft einzuführen sein.

Außer dem Gewichte tragen zu $\mathfrak{P}$ bei den gewöhnlichen Anwendungen nur noch die Oberflächenkräfte bei, die von anderen Körpern herrühren, deren Bewegung ebenfalls relativ zum Fahrzeuge betrachtet wird. Diese Kräfte hängen aber ausschließlich von Umständen ab, die mit der Bewegung selbst unmittelbar nichts zu tun haben, also bei den elastisch-festen Körpern von ihrer elastischen Formänderung, bei den Gasen von der Temperatur und dem spezifischen Volumen usf., so daß es gleichgültig ist, ob wir bei ihrer Feststellung vom absoluten Raume oder vom Fahrzeuge ausgehen.

Es wird daher in der Regel leicht möglich sein, bei der Behandlung einer bestimmten Aufgabe die Kraft $\mathfrak{P}$ derart anzugeben, daß dabei der absolute Raum weiterhin außer Betracht bleiben kann, sondern alle Angaben nur auf den Fahrzeugraum bezogen sind. Erst wenn dies geschehen ist, haben wir es bei der Untersuchung der Bewegungen innerhalb des Fahrzeugs mit einer Aufgabe zu tun, die nach Zufügung der Ergänzungskräfte genau so behandelt werden kann, als wenn es sich dabei um eine absolute Bewegung handelte.

Für die weitere Durchführung der Rechnung wird sich häufig die Benutzung eines Zylinder-Koordinatensystems empfehlen, das im Fahrzeuge so festgelegt ist, daß die Zylinderachse mit der Umdrehungsachse des Fahrzeugs zusammenfällt. Die Lage des bewegten Punktes relativ zum Fahrzeuge wird dann durch Angabe der drei Koordinaten z, R und φ beschrieben, von denen z den Abstand des Punktes von einer senkrecht zur Zylinderachse gelegten Ebene, R den Abstand von der Zylinderachse und φ den Winkel bedeutet, den eine durch die Zylinderachse und den Punkt gelegte Ebene mit einer im Fahrzeug festgelegten Ebene $\varphi = 0$ bildet. Die Abstände z sollen positiv gerechnet werden, wenn sie in jener Richtung gehen, nach der hier der Winkelgeschwindigkeitsvektor $\mathfrak{u}$ gemäß den dafür früher getroffenen Festsetzungen abzutragen ist. Ebenso soll der Winkel φ nach jener Richtung herum positiv gezählt werden, in der die Drehung des Fahrzeugs erfolgt. Abgesehen davon, daß es nichts ausmacht, wenn

der Winkel φ um 2π oder ein Vielfaches davon vermehrt oder vermindert wird, wird die Lage des Punktes durch die Angabe der drei Zylinderkoordinaten z, R und φ in eindeutiger Weise beschrieben; der Abstand R ist dabei stets als eine positive Größe zu betrachten.

Um die Vektorgleichung (11) in drei Komponentengleichungen zu zerlegen, die sich auf das in dieser Weise eingeführte Koordinatensystem beziehen, setze ich zunächst den Vektor $\mathfrak{r}$, dessen Anfangspunkt mit dem Ursprung dieses Koordinatensystems, also mit dem Punkte $z = 0$ der Achse zusammenfällt,

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{k} z + \mathfrak{m} R. \tag{12}$$

so daß also $\mathfrak{k}$ einen mit der Zylinderachse und mit $\mathfrak{u}$ gleichgerichteten und $\mathfrak{m}$ einen anderen Einheitsvektor bedeutet, der in der Richtung von R und zwar von der Achse auf den bewegten Punkt hin geht. Dann erhält man für die relative Geschwindigkeit

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \mathfrak{k}\frac{dz}{dt} + \mathfrak{m}\frac{dR}{dt} + R\frac{d\mathfrak{m}}{dt}. \tag{13}$$

Hierbei ist nämlich zu beachten, daß sich mit der Lage des Punktes gegen das Fahrzeug auch die Richtung von $\mathfrak{m}$ ändert, während $\mathfrak{k}$ konstant ist. Bezeichnet man einen dritten Einheitsvektor, der senkrecht zu $\mathfrak{m}$ und zu $\mathfrak{k}$ und zwar nach jener Richtung hin gezogen ist, in der der Winkel φ wächst, mit $\mathfrak{n}$, so hat man

$$\frac{d\mathfrak{m}}{dt} = \mathfrak{n}\frac{d\varphi}{dt}, \tag{14}$$

da $\mathfrak{m}$ dauernd ein Einheitsvektor bleibt und daher der Zuwachs $d\mathfrak{m}$, den $\mathfrak{m}$ erfährt, zur Richtung von $\mathfrak{m}$ senkrecht stehen muß. Die Geschwindigkeit

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \mathfrak{k}\frac{dz}{dt} + \mathfrak{m}\frac{dR}{dt} + \mathfrak{n}R\frac{d\varphi}{dt} \tag{15}$$

wird hierdurch in drei Komponenten zerlegt, die man der Reihe nach als achsial, radial und tangential bezeichnen kann.

Die relative Beschleunigung erhält man daraus durch nochmalige Differentiation nach der Zeit zu

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{k}\frac{d^2z}{dt^2} + \mathfrak{m}\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{d\mathfrak{m}}{dt}\frac{dR}{dt} + \mathfrak{n}\left(R\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{dR}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right) + \frac{d\mathfrak{n}}{dt}R\frac{d\varphi}{dt}.$$

Der Vektor $\mathfrak{n}$ ist ein Einheitsvektor, der stets senkrecht zu $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{k}$ bleibt und sich mit $\mathfrak{m}$ zusammen und mit derselben Winkelgeschwindigkeit um die $\mathfrak{k}$-Achse dreht. Aus Abb. 1, die dies verdeutlicht, folgt

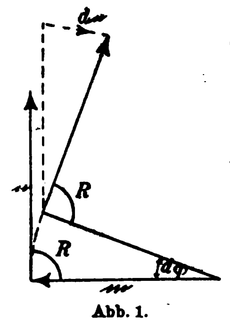


Abb. 1.

$$\frac{d\mathfrak{n}}{dt} = -\mathfrak{m}\frac{d\varphi}{dt}, \tag{16}$$

und für die Beschleunigung erhält man daher

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} &= \mathfrak{k}\frac{d^2z}{dt^2} + \mathfrak{m}\left(\frac{d^2R}{dt^2} - R\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right) \\ &\quad + \mathfrak{n}\left(R\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dR}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right),\end{aligned} \tag{17}$$

wodurch sie ebenfalls in eine achsiale, eine radiale und eine tangentiale Komponente zerlegt ist.

Auch alle anderen Glieder in Gl. (11) zerlegen wir in derselben Weise in Komponenten. Die von $\mathfrak{P}$ seien mit P_1, P_2, P_3 bezeichnet. Die Zentrifugalkraft $\mathfrak{C}$ geht selbst in radialer Richtung und kann

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{m} m u^2 R$$

gesetzt werden. Ferner erhält man

$$V\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\mathfrak{u} = \begin{vmatrix} \mathfrak{n} & \mathfrak{m} & \mathfrak{k} \\ R\frac{d\varphi}{dt} & \frac{dR}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ 0 & 0 & u \end{vmatrix} = \mathfrak{n}u\frac{dR}{dt} - \mathfrak{m}uR\frac{d\varphi}{dt},$$

da die Einheitsvektoren $\mathfrak{n}\mathfrak{m}\mathfrak{k}$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem im Raume bilden, wie aus Abb. 1 hervorgeht, wenn man bedenkt, daß $\mathfrak{n}$ und daher $\mathfrak{k}$ in dieser Zeichnung nach unseren Vorzeichenfestsetzungen senkrecht zur Papierfläche auf den Beschauer hin geht.

Setzt man diese Werte in Gl. (11) ein, so enthält sie nur noch Glieder, die in den Richtungen der $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{t}$ gehen. Damit zerfällt sie in die drei folgenden Komponentengleichungen

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2z}{dt^2} &= P_1 \\ m\left(\frac{d^2R}{dt^2} - R\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right) &= P_2 + mu^2R + 2muR\frac{d\varphi}{dt} \\ m\left(R\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dR}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right) &= P_3 - 2mu\frac{dR}{dt} \end{aligned}\right\}, \tag{18}$$

die sich jetzt wieder der Reihe nach auf die achsiale, radiale und tangentiale Richtung beziehen.

Die Bewegungskomponente parallel zur Zylinderachse erfolgt genau so, als wenn das Gefäß nicht rotierte. Setzt man in den Gleichungen nachträglich $u = 0$, so sprechen sie zusammen die dynamische Grundgleichung für die absolute Bewegung mit den Ausdrucksmitteln der Zylinderkoordinaten aus. Dieser Zusammenhang geht noch deutlicher hervor, wenn man durch geeignete Zusammenfassung der Glieder die Gleichungen (18) auf die folgende Form bringt

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2z}{dt^2} &= P_1 \\ m\left(\frac{d^2R}{dt^2} - R\left(u + \frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right) &= P_2 \\ m\left(R\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dR}{dt}\left(u + \frac{d\varphi}{dt}\right)\right) &= P_3 \end{aligned}\right\}. \tag{19}$$

In der Tat unterscheiden sich die Gleichungen für die relative Bewegung von denen für die absolute Bewegung nur durch die Zufügung des konstanten Summanden u zur relativen Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$. Die Summe $u + \frac{d\varphi}{dt}$ gibt aber zugleich die Winkelgeschwindigkeit an, mit der sich der vorher mit $\mathfrak{m}$ bezeichnete Vektor gegen den absoluten Raum dreht. Bei dieser Deutung gelten daher die Gleichungen (19) auch für die absolute Bewegung des materiellen Punktes. Aus dieser Überlegung heraus hätte man die Gleichungen (19) in der Tat sofort ableiten können, ohne von dem Satze von Coriolis Gebrauch zu machen. Die Koordinatentransformation von dem

bewegten auf das ruhende Koordinatensystem, aus der sich der Satz von Coriolis stets ableiten läßt, gestaltet sich in dem vorliegenden Falle eben besonders einfach.

Um hier sofort wenigstens an einem Beispiele die Anwendung der vorhergehenden Gleichungen zu zeigen, betrachte ich die geradlinige harmonische Schwingung eines materiellen Punktes längs eines Halbmessers im rotierenden Fahrzeuge. Der Körper, der als materieller Punkt angesehen wird, sei durch eine in radialer Richtung gehende Stange geführt, so daß er sich nur in dieser Richtung bewegen kann. Als physikalisch existierende Kraft wirke nur noch ein Federzug auf ihn ein, der in der Lage A gleich Null und bei der Entfernung x von A gleich cx ist (Abb. 2). In diesem Falle fällt die erste der Gleichungen (19) fort. In den beiden anderen ist $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ und

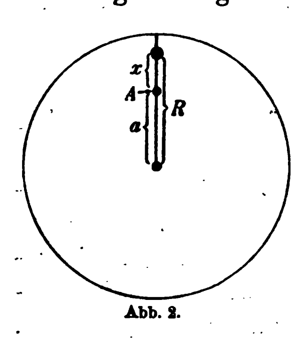


Abb. 2.

$$P_2 = -cx = -c(R-a)$$

zu setzen. Die zweite Gleichung geht damit über in

$$m\frac{d^2R}{dt^2} = mRu^2 - cR + ca.$$

Die Lösung der Gleichung hängt davon ab, ob mu^2 größer oder kleiner als c ist. Im ersten Falle wird die Gleichung durch Exponentialfunktionen gelöst. Im zweiten Falle, der allein zu Schwingungen führen kann, ist die Lösung

$$R = A \sin \alpha t + B \cos \alpha t + \frac{ca}{c - mu^2},$$

wenn unter α der Wert

$$\alpha = \sqrt{\frac{c}{m} - u^2}$$

verstanden wird. Daraus ergibt sich auch sofort die Schwingungsdauer und aus der Formel für R die Gleichgewichtslage, um die sich die Schwingung vollzieht. Aus der dritten der Glei-

chungen (19) folgt hierauf die Kraft P_3, d. h. der Führungsdruck zwischen dem bewegten Körper und der Führungsstange.

Von anderen Anwendungen der Gleichungen (19) wird später die Rede sein.

§ 8. Relativbewegungen im ungleichförmig rotierenden Raum.

Wir erweitern jetzt die vorhergehenden Betrachtungen, indem wir die Voraussetzung fallen lassen, daß die Winkelgeschwindigkeit u auch der Größe nach konstant sei. Dagegen soll immer noch u der Richtung nach konstant sein und das Fahrzeug stets um dieselbe Achse rotieren. Die Fahrzeugbeschleunigung $\frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2}$ in Gl. (10) setzt sich dann aus zwei Komponenten, einer radialen und einer tangentialen, zusammen. Die radiale Komponente ist ebenso groß wie im vorhergehenden Falle, während die tangentiale Komponente die Größe $R\frac{du}{dt}$ hat. Das folgt schon aus den in Band I, § 14 angestellten Betrachtungen über die kreisförmige Bewegung eines materiellen Punktes. In Gl. (11) ist daher dementsprechend ein weiteres Glied beizufügen.

Die Gleichungen (12) bis (17) des vorhergehenden Paragraphen können ohne Änderung übernommen werden, da bei ihrer Ableitung von der Voraussetzung, daß u konstant sei, kein Gebrauch gemacht wurde. Die einzige Änderung in den Gleichungen (18) besteht daher darin, daß in der letzten von ihnen noch ein Glied hinzutritt, das von der tangentialen Komponente der Fahrzeugbeschleunigung herrührt. Die Gleichungen lauten daher jetzt, wenn wir sie sofort in der ihnen in (19) gegebenen Form anschreiben,

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2z}{dt^2} &= P_1 \\ m\left(\frac{d^2R}{dt^2} - R\left(u + \frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right) &= P_2 \\ m\left(R\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dR}{dt}\left(u + \frac{d\varphi}{dt}\right) + R\frac{du}{dt}\right) &= P_3 \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Wir können nun zu einer Anwendung dieser Gleichungen übergehen, die der am Schlusse des vorigen Paragraphen besprochenen sehr ähnlich ist, dabei aber zu einem erheblich wichtigeren Ergebnisse führt. Wir betrachten nämlich wiederum eine in radialer Richtung vor sich gehende geradlinige Bewegung des bewegten materiellen Punktes relativ zum Fahrzeuge, verfügen aber über die veränderliche Winkelgeschwindigkeit u in der Art, daß der Führungsdruck, der vorher nötig war, um die geradlinige Bewegung zu erzwingen, jetzt zu Null wird. Auch jetzt fällt wieder die erste Gleichung ganz fort und die beiden anderen lauten, nachdem sowohl $\frac{d\varphi}{dt}$ als P_3 gleich Null gesetzt ist,

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2R}{dt^2} &= mRu^2 + P_2 \\ 2\frac{dR}{dt}u + R\frac{du}{dt} &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{21}$$

Über die radiale Kraft P_2 machen wir einstweilen keine bestimmte Voraussetzung; sie kann entweder wie früher von einem Federzuge herrühren oder auch einem anderen Gesetze folgen.

Die letzte der Gleichungen (21) wird sofort integrabel, wenn man sie in der Form

$$2\frac{dR}{R} + \frac{du}{u} = 0$$

anschreibt. Die Integration liefert

$$2\lg R + \lg u = \text{const}$$

oder in anderer Form

$$uR^2 = C_1. \tag{22}$$

Entnimmt man hieraus u und setzt den Wert in die erste der Gleichungen (21) ein, so erhält man

$$m\frac{d^2R}{dt^2} = m\frac{C_1^2}{R^3} + P_2. \tag{23}$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $\frac{dR}{dt}$, so geht sie über in

$$\frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = m\frac{C_1^2}{R^3}\frac{dR}{dt} + P_2\frac{dR}{dt},$$

woraus durch eine Integration nach t folgt

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = -\frac{m}{2}\frac{C_1^2}{R^2} + \int P_2 dR. \tag{24}$$

Die Integrationskonstante ist in dem unbestimmten Integrale von P_2 mit enthalten.

Aus diesen Formeln lassen sich nun verschiedene wichtige Folgerungen ziehen, indem man für das bisher unbestimmt gelassene Gesetz, dem die radiale Kraft P_2 folgen soll, verschiedene Annahmen macht. Setzen wir zunächst noch allgemeiner voraus, daß

$$P_2 = KR^n \tag{25}$$

ist, worin n irgend eine positive oder negative Zahl bedeutet, so läßt sich, wenn wir dabei der Einfachheit halber von dem besonderen Falle $n = -1$ absehen, Gl. (24) ersetzen durch

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = -\frac{m}{2}\frac{C_1^2}{R^2} + \frac{K}{n+1}R^{n+1} + C_2, \tag{26}$$

und man sieht leicht ein, wie die Gleichung nochmals integriert werden kann.

Die Bedeutung dieser Betrachtungen ergibt sich, wenn man die absolute Bewegung des materiellen Punktes, der diese relative Bewegung ausführt, ins Auge faßt. Gegen den absoluten Raum bewegt sich der materielle Punkt in einer Kurve und zwar unter dem alleinigen Einflusse der „physikalisch existierenden" Kraft P_2. Wir sind daher nach Ausführung der vorher besprochenen Integrationen in den Stand gesetzt, auch die krummlinige Bewegung eines materiellen Punktes anzugeben, der dem Einflusse einer Zentralkraft ausgesetzt ist, die eine beliebige Funktion der Entfernung sein kann.

Die Betrachtung der relativen Bewegung hat bei dieser Anwendung nur die Bedeutung eines Kunstgriffes zur einfacheren Ausführung der Integration der dynamischen Grundgleichung für eine solche Zentralbewegung. Gl. (22) kann dahin gedeutet werden, daß die veränderliche Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Koordinatensystems so zu wählen ist, wie es durch den Flächensatz gefordert wird, denn $u^2 R$ gibt ja in

der Tat das Doppelte der Sektorengeschwindigkeit der zu untersuchenden Zentralbewegung an. Die damit erreichte Zurückführung der krummlinigen absoluten Bewegung auf eine geradlinige Bewegung relativ zum rotierenden Koordinatensysteme bildet aber eine erhebliche Erleichterung für die Ausführung der Integrationen.

Nehmen wir zunächst einmal an, die Kraft P_2 sei eine Anziehung, die umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung von dem auf der Achse gelegenen Anziehungszentrum ist. Dann haben wir

$$P_2 = -\frac{K}{R^3}$$

zu setzen und an Stelle von Gl. (26) erhalten wir

$$\frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{1}{R^2}\left(\frac{K}{m} - C_1^2\right) + \frac{2C_2}{m}}.$$

Die Integration der Gleichung, die nach Trennung der Variabeln leicht vorgenommen werden kann, liefert

$$\frac{m}{2C_2}\sqrt{\frac{K}{m} - C_1^2 + \frac{2C_2}{m}R^2} = t + C_3,$$

woraus man R sofort als Funktion von t erhalten kann. Nachdem dies geschehen ist, folgt auch u aus Gl. (22). Die Integrationskonstanten C_1, C_2, C_3 ergeben sich aus den Anfangsbedingungen, indem für $t = 0$ sowohl u als R und $\frac{dR}{dt}$ gegeben sein müssen, wenn man den weiteren Verlauf der Bewegung voraussagen soll. Hierauf ist die Bewegung durch die vorhergehenden Formeln vollständig beschrieben.

In derselben Weise ist auch für jedes andere Gesetz zu verfahren, dem die Zentralkraft P_2 unterworfen ist. Schwierigkeiten können sich dabei nur insofern ergeben, als die Quadratur, die zur Integration der Gl. (24) erforderlich ist, nicht immer in geschlossener Form ausgeführt oder nicht in den gewöhnlichen einfachen Funktionen ausgedrückt werden kann.

Von besonderer Bedeutung ist natürlich wegen der Anwendung, die davon auf die Planetenbewegung gemacht werden

kann, der Fall, daß P_2 umgekehrt proportional mit der zweiten Potenz der Entfernung vom Anziehungszentrum ist. In diesem Falle ist

$$P_2 = -\frac{K}{R^2}$$

zu setzen und Gl. (26) geht damit über in

$$\frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{2K}{mR} - \frac{C_1^2}{R^2} + \frac{2C_2}{m}}. \tag{27}$$

Setzen wir den Wert auf der rechten Seite gleich Null und lösen die dadurch entstehende quadratische Gleichung nach R auf, so erhalten wir, unter der Voraussetzung, daß die Wurzeln reell sind, den größten und den kleinsten Wert, die R während der Bewegung annimmt. Wir können aber auch umgekehrt verfahren, nämlich mit Rücksicht auf das Ziel unserer Untersuchung die beiden Extremwerte R_1 und R_2 von R als gegeben ansehen und die bisher unbestimmt gebliebenen Integrationskonstanten C_1 und C_2 in ihnen ausdrücken. Die beiden Gleichungen

$$\frac{2K}{mR_1} - \frac{C_1^2}{R_1^2} + \frac{2C_2}{m} = 0,$$

$$\frac{2K}{mR_2} - \frac{C_1^2}{R_2^2} + \frac{2C_2}{m} = 0$$

liefern durch Auflösen nach C_1^2 und C_2

$$C_1^2 = \frac{2K}{m} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}; \qquad C_2 = -\frac{K}{R_1 + R_2}, \tag{28}$$

und wenn man dies einsetzt, geht Gl. (27) über in

$$\frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{2K}{m}\left(\frac{1}{R} - \frac{R_1 R_2}{R^2(R_1 + R_2)} - \frac{1}{R_1 + R_2}\right)}. \tag{29}$$

Wir trennen die Variabeln und bringen die Gleichung auf die Form

$$\frac{R\,dR}{\sqrt{\frac{2K}{m}\left(R - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R^2}{R_1 + R_2}\right)}} = dt.$$

Die Integration kann jetzt leicht ausgeführt werden. Sie liefert

$$\begin{aligned} &-\sqrt{(R_1+R_2)(R(R_1+R_2)-R_1R_2-R^2)} \\ &-\frac{1}{2}(R_1+R_2)^{\frac{3}{2}}\arcsin\frac{R_1+R_2-2R}{R_1-R_2}=t\sqrt{\frac{2K}{m}}+C_3. \end{aligned} \tag{30}$$

Da arcsin eine unendlich vieldeutige Funktion ist, gehören zu einem bestimmten Werte von R unendlich viele Werte von t. Wenn die Gleichung für zwei Werte von R und t erfüllt war, bleibt sie auch noch erfüllt, wenn man bei demselben Werte von R die Zeit t um ein ganzes Vielfaches des Betrages T vermehrt oder vermindert, der einer Änderung des arcsin auf der linken Seite der Gleichung um 2π entspricht. Die Bewegung ist damit als eine periodische erkannt. Die Schwingungsdauer T erhalten wir aus der Gleichung

$$T\sqrt{\frac{2K}{m}}=\frac{1}{2}(R_1+R_2)^{\frac{3}{2}}\cdot 2\pi,$$

also, wenn wir an Stelle von R_1+R_2 kürzer $2a$ schreiben,

$$T=2\pi\sqrt{\frac{ma^3}{K}}. \tag{31}$$

Bei der absoluten Bewegung beschreibt, wie sich alsbald zeigen wird, der materielle Punkt während der Zeit T eine geschlossene Bahn, und es kann daher schon jetzt darauf hingewiesen werden, daß Gl. (31) das dritte Keplersche Gesetz für die Umlaufsdauer eines Planeten um die Sonne ausdrückt.

Um die Bahnkurve der absoluten Bewegung zu erhalten, bezeichnen wir mit ψ den Winkel, den der nach dem bewegten Punkt gezogene Radiusvektor R zur Zeit t mit einer im absoluten Raum festgehaltenen Anfangslage bildet. Unsere Aufgabe besteht dann darin, R als Funktion des Winkels ψ darzustellen. Zunächst ist die Winkelgeschwindigkeit u, mit der sich das bewegte Koordinatensystem gegen den absoluten Raum dreht,

$$u=\frac{d\psi}{dt}$$

zu setzen. Ferner läßt sich jetzt, wenn R als Funktion von ψ angesehen wird,

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{dt} = u \frac{dR}{d\psi}$$

schreiben oder auch, wenn man u aus Gl. (22) und C_1 aus Gl. (28)' entnimmt,

$$\frac{dR}{dt} = \frac{C_1}{R^2} \frac{dR}{d\psi} = \frac{1}{R^2} \frac{dR}{d\psi} \sqrt{\frac{2K}{m} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}.$$

Diesen Wert führen wir in Gl. (29) ein. Sie geht damit über in

$$\frac{1}{R^2} \frac{dR}{d\psi} \sqrt{\frac{2K}{m} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = \sqrt{\frac{2K}{m} \left(\frac{1}{R} - \frac{R_1 R_2}{R^2 (R_1 + R_2)} - \frac{1}{R_1 + R_2} \right)}.$$

Durch einfache Umformungen und mit Benutzung der vorher schon eingeführten Abkürzung $2a$ für $R_1 + R_2$ wird daraus

$$\frac{dR}{R \sqrt{R \frac{2a}{R_1 R_2} - 1 - \frac{R^2}{R_1 R_2}}} = d\psi.$$

Die Integration läßt sich mit Hilfe bekannter Integralformeln sofort ausführen und liefert, wie man sich auch durch Ausführung einer Differentation an der nachfolgenden Formel nachträglich leicht überzeugen kann,

$$\arcsin \frac{aR - R_1 R_2}{R \sqrt{a^2 - R_1 R_2}} = \psi + C_4.$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$\frac{aR - R_1 R_2}{R \sqrt{a^2 - R_1 R_2}} = \sin(\psi + C_4).$$

Um die Integrationskonstante C_4 zu bestimmen, wollen wir festsetzen, daß der Winkel ψ von jener Lage an gerechnet werden soll, in der $R = R_1$ war. Für diesen Wert von R nimmt die linke Seite der Gleichung den Wert 1 an, wie man erkennt, wenn man sich der Bedeutung von a erinnert. Da für diesen Fall $\psi = 0$ sein soll, ist daher C_4 ein rechter Winkel, d. h. gleich $\frac{\pi}{2}$. Der sin auf der rechten Seite der

Gleichung läßt sich, wenn man dies beachtet, durch $\cos\psi$ ersetzen. Die Auflösung der Gleichung nach R liefert hierauf

$$R = \frac{R_1 R_2}{a - \cos\psi \cdot \sqrt{a^2 - R_1 R_2}}, \tag{32}$$

und damit ist die Gleichung der Bahnkurve in Polarkoordinaten gefunden. Das ist aber die Gleichung einer Ellipse, von der ein Brennpunkt mit dem Koordinatenursprunge zusammenfällt. Um sie auf die übliche Form zu bringen, braucht man nur

$$R_1 = a + e; \quad R_2 = a - e \quad \text{und} \quad b^2 = a^2 - e^2$$

zu setzen, womit die neu eingeführten Konstanten e und b definiert sind. Die Gleichung geht dann über in

$$R = \frac{b^2}{a - e\cos\psi} \tag{33}$$

und der Vergleich mit der in der analytischen Geometrie abgeleiteten Ellipsengleichung zeigt uns, daß a die große, b die kleine Halbachse der Ellipse und e die Exzentrizität, d. h. die Entfernung des Brennpunktes von dem Mittelpunkte der Ellipse ist.

Nachdem die Bahnkurve ermittelt ist, kehren wir nochmals zu Gl. (30) zurück, um die Zeit t als Funktion des Winkels ψ darzustellen, der von $t = 0$ an durchlaufen wurde. Durch Einsetzen der inzwischen bestimmten Werte erhalten wir zunächst

$$R(R_1 + R_2) - R_1 R_2 - R^2 = 2aR - b^2 - R^2 = e^2 - (R - a)^2$$

$$= e^2 - e^2 \left(\frac{a\cos\psi - e}{a - e\cos\psi}\right)^2 = e^2 \frac{(a - e\cos\psi)^2 - (a\cos\psi - e)^2}{(a - e\cos\psi)^2}$$

$$= e^2 \frac{(a^2 - e^2)\sin^2\psi}{(a - e\cos\psi)^2} = e^2 \frac{b^2 \sin^2\psi}{(a - e\cos\psi)^2}.$$

Gl. (30) läßt sich daher auch auf die Form bringen

$$-\sqrt{2a}\left\{\frac{eb\sin\psi}{a - e\cos\psi} - a \cdot \arcsin\frac{e - a\cos\psi}{a - e\cos\psi}\right\} = t\sqrt{\frac{2K}{m}} + C_3.$$

Wenn wir die Zeit t von dem Augenblick an zählen, in dem $\psi = 0$ war, folgt für C_3

$$C_3 = -a\frac{\pi}{2}\sqrt{2a}.$$

Für die Zeit t erhält man daher

$$t = \sqrt{\frac{am}{K}}\left\{a\frac{\pi}{2} - \frac{eb\sin\psi}{a - e\cos\psi} + a\arcsin\frac{e - a\cos\psi}{a - e\cos\psi}\right\} \tag{34}$$

mit dem Vorbehalte, daß für die unendlich vieldeutige Funktion arcsin jener Wert einzusetzen ist, der bei stetigem Wachstum von ψ aus dem Werte $-\frac{\pi}{2}$ für $\psi = 0$ hervorgeht. Daß der Ausdruck, von dem der arcsin zu nehmen ist, für alle Werte von ψ zwischen -1 und $+1$ liegt, wie es sein muß, damit der Ausdruck reell bleibt, läßt sich leicht zeigen. Da a größer ist als e, wird bei von Null an wachsendem ψ der Bruch, der zuerst den Wert -1 hatte, dem Absolutbetrage nach zunächst kleiner, bis er bei einem gewissen spitzen Winkel zu Null wird, worauf er bei weiterem Wachsen von ψ positiv und immer größer und für $\psi = \pi$ zu $+1$ wird. Der hierzu gehörige arcsin ist gleich $+\frac{\pi}{2}$ zu setzen. Wächst jetzt ψ noch weiter, so durchläuft der Bruch, von dem der arcsin zu nehmen ist, die vorige Wertreihe von neuem in umgekehrter Richtung, während der arcsin selbst weiter wächst. Wenn endlich ψ den Wert 2π erreicht, wird der Bruch wieder wie zu Anfang gleich -1, der arcsin davon ist aber jetzt nicht gleich $-\frac{\pi}{2}$, sondern gleich $\frac{3\pi}{2}$ zu setzen. Ebenso wäre, wenn man das Wachsen des Winkels ψ noch über 2π hinaus verfolgen wollte, bei $\psi = 4\pi$ der arcsin (-1) gleich $\frac{7\pi}{2}$ zu setzen usf.

Für einen vollen Umlauf des bewegten Punktes längs der elliptischen Bahn findet man daher

$$T = 2a\pi\sqrt{\frac{am}{K}}$$

in Übereinstimmung mit Gl. (31), womit die an diese Gleichung vorläufig als Behauptung angeschlossene Bemerkung nachträglich bewiesen ist.

Endlich soll noch als drittes Beispiel die Bewegung besprochen werden, die der materielle Punkt ausführt, wenn die Kraft P_2 eine Anziehung ist, die proportional mit dem Abstande R von der Achse wächst. Wir haben dann

$$P_2 = -KR,$$

womit Gl. (26) übergeht in

$$\frac{dR}{dt} = \sqrt{-\frac{C_1^2}{R^2} - \frac{K}{m}R^2 + \frac{2C_2}{m}}.$$

Drücken wir auch jetzt wieder die Integrationskonstanten C_1 und C_2 in den beiden Extremwerten R_1 und R_2 von R aus, so wird daraus

$$R\frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{K}{m}}(R^2(R_1^2 + R_2^2) - R^4 - R_1^2R_2^2). \qquad (35)$$

Betrachtet man R^2 als die Integrationsvariable, so läßt sich die Gleichung wie in den vorhergehenden Fällen sofort integrieren. Man erhält dann

$$\arcsin\frac{2R^2 - R_1^2 - R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} = 2t\sqrt{\frac{K}{m}} + C_3,$$

oder auch, wenn man diese Gleichung nach R^2 auflöst,

$$R^2 = \frac{R_1^2 + R_2^2}{2} + \frac{R_1^2 - R_2^2}{2}\sin\left(2t\sqrt{\frac{K}{m}} + C_3\right). \qquad (36)$$

Zählt man die Zeit von einem Augenblicke an, in dem $R = R_1$ war, so folgt aus dieser Grenzbedingung $C_3 = \frac{\pi}{2}$, und die Gleichung läßt sich daher auch schreiben

$$R^2 = \frac{R_1^2 + R_2^2}{2} + \frac{R_1^2 - R_2^2}{2}\cos 2t\sqrt{\frac{K}{m}}.$$

Um die Bahnkurven im absoluten Raume zu finden, setzen wir wie früher

$$\frac{dR}{dt} = \frac{C_1}{R^2}\frac{dR}{d\psi},$$

oder, wenn wir den hier zutreffenden Wert von C_1 einführen,

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{R^2}\frac{dR}{d\psi}\cdot R_1R_2\sqrt{\frac{K}{m}}.$$

Hiermit geht Gl. (35) über in

$$R_1 R_2 \frac{R\,dR}{R^2\sqrt{R^2(R_1^2+R_2^2)-R^4-R_1^2R_2^2}} = d\psi.$$

Auch hier läßt sich die Integration ausführen, wenn man R^2 als Variable betrachtet, und man erhält

$$\arcsin\frac{R^2(R_1^2+R_2^2)-2R_1^2R_2^2}{R^2(R_1^2-R_2^2)} = 2\psi + C_4.$$

Wird der Winkel ψ von jener Lage aus gezählt, in der $R = R_1$ war, so folgt $C_4 = \frac{\pi}{2}$, und durch Auflösen der Gleichung nach R^2 erhält man daher

$$R^2 = \frac{2R_1^2R_2^2}{R_1^2+R_2^2-(R_1^2-R_2^2)\cos 2\psi},$$

wofür man auch nach Entwicklung von $\cos 2\psi$

$$R^2 = \frac{R_1^2R_2^2}{R_1^2\sin^2\psi + R_2^2\cos^2\psi} \tag{37}$$

schreiben kann. Man überzeugt sich leicht, daß dies die Gleichung einer Ellipse in Polarkoordinaten ist, deren Mittelpunkt mit dem Pole zusammenfällt.

Damit hat man nur ein früher schon (in Band IV) auf viel einfacherem Wege abgeleitetes Ergebnis wieder gefunden. Bei dem letzten Beispiele bringt daher die Behandlung mit Hilfe der Relativbewegung keine Erleichterung, sondern vielmehr eine Erschwerung der Lösung, ganz im Gegensatz zu dem vorhergehenden Beispiele, das sich auf die Planetenbewegung bezog. Es schien indessen wünschenswert, trotz der dadurch bedingten umständlicheren Rechnung, zur besseren Erläuterung des ganzen Verfahrens, auch die elliptische harmonische Schwingung auf diesem Wege zu behandeln.

§ 9. Fadenpendel im ungleichförmig rotierenden Raum.

In Band IV habe ich die Bewegung des gewöhnlichen Fadenpendels für größere Ausschläge nur unter der Voraussetzung behandelt, daß es ebene Schwingungen ausführe. Im allgemeinen Falle beschreibt aber der materielle Punkt des

Fadenpendels eine doppelt gekrümmte sphärische Kurve. Darauf werde ich später bei der Theorie der Kreiselbewegung, mit der die Pendelbewegung sehr eng verwandt ist, nochmals zurückkommen. An dieser Stelle soll aber gezeigt werden, wie man die Differentialgleichungen für die allgemeine Bewegung des Fadenpendels nach der Methode der Relativbewegung, also nach dem schon im vorigen Paragraphen angewandten Verfahren, unabhängig von allen anderen Betrachtungen aufstellen kann.

Wir lassen also ein Koordinatensystem um die durch den Aufhängungspunkt gezogene Lotrechte derart rotieren, daß das Pendel relativ zu diesem Koordinatensystem ebene Schwingungen ausführt. Wir können dann die Aufgabe dadurch lösen, daß wir nach Einführung der Ergänzungskräfte der Relativbewegung das Gesetz aufsuchen, dem diese ebenen Schwingungen gehorchen.

Zunächst überzeugt man sich leicht, daß die Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Raumes auch in diesem Falle, wie schon in Gl. (22), der Gleichung

$$uR^2 = C_1 \tag{38}$$

genügen muß, wenn die Buchstaben die frühere Bedeutung behalten. Anstatt die frühere Betrachtung auf die Pendelbewegung zu übertragen, genügt es zum Beweise dafür, den Flächensatz in bezug auf die durch den Aufhängepunkt gezogene Lotrechte als Achse für die absolute Bewegung des Pendels anzuwenden. Die beiden einzigen Kräfte, die an dem materiellen Punkte angreifen, das Gewicht und die Fadenspannung haben beide das Moment Null für diese Achse, und daher muß auch das statische Moment der Bewegungsgröße für diese Achse konstant bleiben. Zerlegt man nun die Geschwindigkeit in zwei Komponenten, von denen die eine in der durch den Faden gelegten Lotebene enthalten ist, während die andere dazu senkrecht steht, so trägt die erste Bewegungskomponente zum Drall nichts bei, weil die Richtungslinie der Geschwindigkeit die Momentenachse schneidet, und die andere Bewegungskomponente mit der Geschwindigkeit uR liefert den Drall muR^2, womit Gl. (38) von neuem bewiesen ist.

Gehen wir jetzt zur Betrachtung der Relativbewegung über, so sind an dem bewegten Punkte zum Gewichte und der Fadenspannung noch die Ergänzungskräfte anzubringen. Die zweite Ergänzungskraft steht stets senkrecht zur Relativgeschwindigkeit, also hier senkrecht zur Bewegungsebene. Die erste Ergänzungskraft können wir, wie es schon im vorigen Paragraphen geschehen war, in zwei Komponenten zerlegen, von denen die eine die Zentrifugalkraft und daher in der Bewegungsebene enthalten ist, während die andere senkrecht zu dieser Ebene steht. Wir wissen aber schon, daß diese Komponente mit der zweiten Ergänzungskraft im Gleichgewicht stehen muß, da das Pendel nicht aus der Bewegungsebene heraustritt und die anderen Kräfte alle in dieser Ebene enthalten sind. Die ebene Pendelbewegung erfolgt daher unter der Einwirkung von den drei Kräften: Gewicht, Fadenspannung und Zentrifugalkraft.

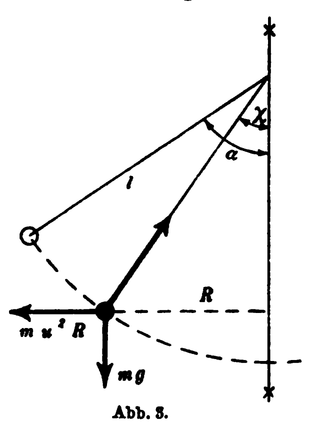


Abb. 3.

In Abb. 3 sind die drei Kräfte eingezeichnet. Die Bewegungsgleichungen können jetzt in derselben Weise aufgestellt werden wie früher bei der Theorie der ebenen Pendelschwingungen. Wir wenden dazu den Satz von der lebendigen Kraft an. Der größte Pendelausschlag sei mit α bezeichnet. Die lebendige Kraft des materiellen Punktes relativ zum rotierenden Raume ist an dieser Stelle gleich Null. Die lebendige Kraft in der durch den Winkel χ bezeichneten Lage ist daher gleich der Arbeit der Kräfte beim Übergange aus der einen in die andere Lage zu setzen. Die Fadenspannung leistet keine Arbeit, da sie stets senkrecht zum Wege steht. Die Arbeit des Gewichtes mg läßt sich sofort angeben. Die Arbeit der Zentrifugalkraft muß dagegen erst noch berechnet werden. Mit Rücksicht auf Gl. (38) erhält man für die Zentrifugalkraft den Ausdruck

$$m u^2 R = m \frac{C_1^2}{R^3} = m \frac{C_1^2}{l^3 \sin^3 \chi},$$

und die Arbeit beim Übergange aus einer Lage in eine benachbarte wird daraus durch Multiplikation mit dR gefunden. Geht daher das Pendel aus der Lage χ in die Lage α über, so wird die Arbeit der Zentrifugalkraft gleich

$$mC_1^2 \int_\chi^\alpha \frac{dR}{R^3} = mC_1^2 \left[-\frac{1}{2R^2}\right]_\chi^\alpha = \frac{mC_1^2}{2l^2}\left(\frac{1}{\sin^2\chi} - \frac{1}{\sin^2\alpha}\right)$$

gefunden. Bei der Bewegung in der entgegengesetzten Richtung ist das Vorzeichen umzukehren. Die Gleichung von der lebendigen Kraft liefert daher, mit Weglassung des allen Gliedern gemeinsamen Faktors m

$$\frac{1}{2}\left(l\frac{d\chi}{dt}\right)^2 = gl(\cos\chi - \cos\alpha) - \frac{C_1^2}{2l^2}\left(\frac{1}{\sin^2\chi} - \frac{1}{\sin^2\alpha}\right). \quad (39)$$

Eine Lösung der Gleichung ist zunächst $\chi = \alpha$; aber dann darf α nicht ein beliebig gegebener Wert sein, sondern es muß der Gleichgewichtslage des Pendels im rotierenden Raume entsprechen. Bei dieser Gleichgewichtslage geht die Resultierende aus dem Gewichte und der Zentrifugalkraft in der Richtung des Fadens, oder mit anderen Worten: das statische Moment des Gewichtes in bezug auf den Aufhängepunkt muß gleich dem statischen Moment der Zentrifugalkraft sein. Bezeichnet man den der Gleichgewichtslage entsprechenden Winkel mit β, so folgt β aus der Momentengleichung

$$m\frac{C_1^2}{R^3} l\cos\beta = mgR,$$

wenn darin $R = l\sin\beta$ gesetzt wird. Die Gleichung geht dann über in

$$\operatorname{tg}\beta\sin^3\beta = \frac{C_1^2}{gl^3}. \quad (40)$$

Wenn C_1 fest gegeben ist, kann man immer einen und nur einen spitzen Winkel angeben, der dieser Gleichung genügt, da sowohl $\sin^3\beta$ als $\operatorname{tg}\beta$ bei wachsendem β innerhalb des Quadranten fortwährend von 0 an und zwar $\operatorname{tg}\beta$ bis zu ∞ zunehmen. Das gilt allgemein; in dem besonderen Falle, daß $\chi = \beta$ bleibt, läßt sich aber die Gleichung erheblich verein-

fachen, indem dann nach Gl. (38) u konstant ist. Man kann dann C_1 in u ausdrücken und erhält an Stelle von Gl. (40)

$$\cos\beta = \frac{g}{u^2 l}\,. \tag{41}$$

Im absoluten Raume beschreibt das Pendel in diesem Falle eine Kreiskegelfläche, d. h. es handelt sich dann um das schon im ersten Bande behandelte Zentrifugalpendel. Damit diese Bewegung möglich ist, muß, wie schon damals besprochen wurde, u groß genug sein, um den auf der rechten Seite stehenden Bruch zu einem echten zu machen.

Eine besondere Beachtung verdient aber ferner eine Pendelbewegung, die der soeben besprochenen stets eng benachbart bleibt, so also, daß die ebenen Pendelschwingungen im rotierenden Raume kleine Schwingungen um die jetzt aus Gl. (40) zu berechnende Gleichgewichtslage β bilden. In diesem Falle vereinfacht sich Gl. (39) erheblich, wenn wir

$$\chi = \beta + \chi_1$$

setzen und χ_1 als eine kleine Größe ansehen, deren höhere Potenzen gegenüber der ersten und zweiten vernachlässigt werden dürfen. Auch α wird dann

$$\alpha = \beta + \alpha_1\,,$$

und α_1 ist ebenfalls eine kleine Größe, von der dasselbe gilt wie von χ_1. Man hat dann, wenn man bis auf Glieder, die von der zweiten Ordnung klein sind, nach dem Taylorschen Satze entwickelt,

$$\cos\chi = \cos\beta - \chi_1 \sin\beta - \frac{\chi_1^2}{2}\cos\beta$$

$$\cos\chi - \cos\alpha = (\alpha_1 - \chi_1)\sin\beta + \tfrac{1}{2}(\alpha_1^2 - \chi_1^2)\cos\beta$$

$$\frac{1}{\sin^2\chi} = \frac{1}{\sin^2\beta} - \chi_1\frac{2\cos\beta}{\sin^3\beta} + \frac{\chi_1^2}{2}\left(\frac{2}{\sin^2\beta} + \frac{6\cos^2\beta}{\sin^4\beta}\right)$$

$$\frac{1}{\sin^2\chi} - \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{2\cos\beta}{\sin^3\beta}(\alpha_1 - \chi_1) + (\chi_1^2 - \alpha_1^2)\left(\frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{3\cos^2\beta}{\sin^4\beta}\right).$$

Diese Werte setzen wir in Gl. (39) ein und ebenso den aus Gl. (40) folgenden Wert von C_1^2. Es zeigt sich dann, daß

sich auf der rechten Seite der Gleichung die von der ersten Ordnung kleinen Glieder gegeneinander wegheben. Das war von vornherein zu erwarten, da ja auch die linke Seite von der zweiten Ordnung klein ist, und darin besteht auch der Grund, aus dem es nötig war, vorher die Entwicklung nach dem Taylorschen Satze bis zu den Gliedern von der zweiten Ordnung fortzusetzen. Nach einfachen Umformungen geht Gl. (39) über in

$$\left(\frac{d\chi_1}{dt}\right)^2 = (\alpha_1^2 - \chi_1^2) \cdot \frac{g}{l} \cdot \frac{1 + 3\cos^2\beta}{\cos\beta}. \tag{42}$$

Die Integration läßt sich nun leicht ausführen, indem man zunächst

$$\frac{d\chi_1}{\sqrt{\alpha_1^2 - \chi_1^2}} = dt\sqrt{\frac{g}{l} \cdot \frac{1 + 3\cos^2\beta}{\cos\beta}}$$

schreibt, worauf man

$$\arcsin\frac{\chi_1}{\alpha_1} = C + t\sqrt{\frac{g}{l} \cdot \frac{1 + 3\cos^2\beta}{\cos\beta}}$$

erhält. Zählen wir die Zeit von einem Augenblicke an, in dem $\chi_1 = 0$ war, so folgt für die Integrationskonstante $C = 0$. Die Gleichung läßt sich dann schreiben

$$\chi_1 = \alpha_1 \sin t\sqrt{\frac{g}{l} \cdot \frac{1 + 3\cos^2\beta}{\cos\beta}}. \tag{43}$$

Daraus schließen wir zunächst, daß χ_1 zwischen den Grenzen $-\alpha_1$ und $+\alpha_1$ schwankt. Das Pendel schlägt also nach der einen Seite von der Gleichgewichtslage β um ebensoviel aus als nach der anderen. Die Amplitude α_1 ist im übrigen beliebig, abgesehen natürlich davon, daß sie als klein anzusehen war. Für die Dauer T einer vollen Schwingung erhält man

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g} \cdot \frac{\cos\beta}{1 + 3\cos^2\beta}}. \tag{44}$$

Bezeichnet man mit u_0 die Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Raumes in dem Augenblicke, in dem das Pendel durch die Gleichgewichtslage β hindurchgeht, so ist nach Gl. (38)

$$C_1 = u_0 l^2 \sin^2\beta,$$

und hiermit folgt aus Gl. (40), ganz wie früher in Gl. (41),

$$\cos\beta = \frac{g}{u_0^2 l}, \tag{45}$$

so daß Gl. (44) auch auf die Form

$$T = \frac{2\pi u_0 l}{\sqrt{u_0^4 l^2 + 3g^2}} \tag{46}$$

gebracht werden kann.

Dabei ist jedoch zu beachten, daß diese Formel nur unter der Voraussetzung gilt, daß u_0 groß genug ist, um den auf der rechten Seite von Gl. (45) stehenden Bruch nicht größer als die Einheit werden zu lassen, da andernfalls die hier betrachtete Schwingung überhaupt nicht möglich ist.

Für u findet man aus Gl. (38)

$$u = u_0 \frac{\sin^2\beta}{\sin^2(\beta + \chi_1)} = u_0(1 - 2\chi_1 \operatorname{cotg}\beta),$$

und hiermit kann der ganze Bewegungsvorgang bereits als genügend beschrieben angesehen werden. Es mag nur noch darauf hingewiesen werden, daß T nach Gl. (46) kleiner ist als die Dauer eines Umlaufs des rotierenden Raumes, die gleich $\frac{2\pi}{u_0}$ gesetzt werden kann. Da beide Zeiten im allgemeinen nicht kommensurabel miteinander sind, beschreibt der materielle Punkt im absoluten Raume auch keine in sich zurücklaufende Bahn.

Um Gl. (39) allgemein zu integrieren, bringt man sie auf die Form

$$t = \int \frac{d\chi}{\sqrt{2\frac{g}{l}(\cos\chi - \cos\alpha) - \frac{C_1^2}{l^4}\left(\frac{1}{\sin^2\chi} - \frac{1}{\sin^2\alpha}\right)}} + C_2. \tag{47}$$

Das Integral ist ein elliptisches, von dessen weiterer Behandlung hier abzusehen ist.

§ 10. Zwangläufige Pendelschwingungen im gleichförmig rotierenden Raum.

Hier betrachten wir ein Pendel, das an einer vertikal stehenden Welle derart aufgehängt ist, daß es die mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit vor sich gehende Rotation der

Welle mitmachen muß und daneben relativ zur Welle Schwingungen in einer durch die Umdrehungsachse gelegten Ebene ausführen kann. Außer den Auflagerkräften an der Aufhängung, die das Pendel zu der ihm geometrisch vorgeschriebenen Bewegungsart zwingen, soll von physikalisch existierenden Kräften nur noch das Eigengewicht an ihm angreifen. Reibungen in der Aufhängung und der damit verbundenen Führung sind zwar nicht zu vermeiden; wir wollen uns aber damit begnügen, die Bewegung unter der Voraussetzung zu untersuchen, daß sie vernachlässigt werden können. Von der Dämpfung der Pendelschwingungen, die durch die Reibungen hervorgebracht wird, soll also der Einfachheit wegen abgesehen werden; obschon hinzugefügt werden muß, daß es keine besonderen Schwierigkeiten macht, sondern nur erheblich längere Rechnungen verursacht, wenn man die Reibungen und die von ihnen herbeigeführte Dämpfung ebenfalls berücksichtigen will.

Außerdem wollen wir für den Anfang die Untersuchung dadurch noch weiter vereinfachen, daß wir das Pendel aus einer Stange und einer daran befestigten Kugel bestehend annehmen, das Gewicht und die Masse der Stange gegenüber dem der Kugel vernachlässigen und die Kugel als einen einzigen materiellen Punkt auffassen. Das Pendel gleicht dann im übrigen dem im vorhergehenden Paragraphen betrachteten Fadenpendel, jedoch mit dem Unterschiede, daß die Stange infolge ihrer Biegungssteifigkeit den an ihr befestigten materiellen Punkt zur Einhaltung der ebenen Pendelschwingungen relativ zu dem gleichförmig rotierenden Raume zwingt, während wir beim Fadenpendel, bei dem dieser Zwang fehlte, zur Erzielung ebener Schwingungen eine ungleichförmige Drehbewegung des Koordinatensystems annehmen mußten. Wir wollen ferner noch annehmen, daß die Biegungssteifigkeit der Stange groß genug ist, um merkliche Verbiegungen auszuschließen. Späterhin werden wir diese Voraussetzungen jedoch fallen lassen.

Um den zunächst zu untersuchenden Fall nicht gar zu weit einzuschränken, wollen wir aber nicht voraussetzen, daß

der Drehpunkt des Pendels auf der Drehachse des rotierenden Raumes liege, sondern zulassen, daß er in einem Abstande a von dieser angebracht sei. Um auf den engeren Fall zu kommen, braucht man in den folgenden Entwickelungen nur a nachträglich gleich Null zu setzen.

In Abb. 4 ist das Pendel in der durch den Winkel χ gekennzeichneten Lage zur Zeit t angegeben. Die erste Ergänzungskraft der Relativbewegung besteht jetzt ausschließlich aus der Zentrifugalkraft C, während die früher durch die ungleichförmige Rotation hervorgebrachte Komponente senkrecht zur Bewegungsebene jetzt wegfällt. Die zweite Ergänzungskraft ist daher die einzige äußere Kraft, die wir bei der Untersuchung der Relativbewegung senkrecht zur Bewegungsebene an dem Pendel anzubringen haben. Sie ist es, die zur Verbiegung der Pendelstange führt. In Abb. 4 projiziert sie sich als Punkt und brauchte daher nicht angegeben zu werden.

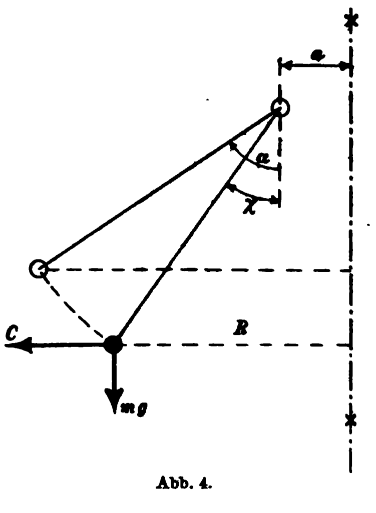


Abb. 4.

Auch hier wollen wir uns zur Aufstellung der Bewegungsgleichung des Satzes von der lebendigen Kraft bedienen. Bezeichnen wir den größten Ausschlag, den das Pendel während der Schwingung erreicht, mit α, so ist die lebendige Kraft in der Lage χ gleich der Arbeit der Kräfte Q und C bei der Bewegung aus der Lage α in die Lage χ zu setzen. Die Arbeit sowohl der zweiten Ergänzungskraft als auch der Auflagerkräfte ist nämlich gleich Null, weil diese Kräfte senkrecht zu den Wegen ihrer Angriffspunkte stehen. Von den Kräften an der Aufhängung gilt dies deshalb, weil wir die Reibungen vernachlässigen wollten; im andern Falle wäre die Arbeit der Reibungen ebenfalls in Ansatz zu bringen.

Die Arbeit der Zentrifugalkraft bei der Bewegung aus der Lage χ in die Lage α ist gleich

$$\int_\chi^\alpha mu^2 R\,dR = \frac{mu^2}{2}\left[R^2\right]_\chi^\alpha = m\frac{u^2}{2}\left((a + l\sin\alpha)^2 - (a + l\sin\chi)^2\right)$$

$$= \frac{mu^2}{2}\left(2al(\sin\alpha - \sin\chi) + l^2(\sin^2\alpha - \sin^2\chi)\right).$$

Bei der Bewegung in der entgegengesetzten Richtung ist das Vorzeichen umzukehren.

Die Arbeit des Gewichtes mg folgt wie früher durch Multiplikation von mg mit dem Höhenunterschiede. Der Satz von der lebendigen Kraft liefert daher mit Weglassung des allen Gliedern gemeinsamen Faktors m die Bewegungsgleichung

$$\frac{1}{2}\left(l\frac{d\chi}{dt}\right)^2 = gl(\cos\chi - \cos\alpha)$$

$$- \frac{u^2}{2}\left\{2al(\sin\alpha - \sin\chi) + l^2(\sin^2\alpha - \sin^2\chi)\right\}.$$

Sie läßt sich sofort in die integrabele Form

$$\frac{d\chi}{\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\chi - \cos\alpha) - u^2\frac{2a}{l}(\sin\alpha - \sin\chi) - u^2(\sin^2\alpha - \sin^2\chi)}} = dt \qquad (48)$$

bringen. Wenn $a = 0$ ist, läßt sich die Integration auf der linken Seite in verhältnismäßig einfacher Weise mit Hilfe von elliptischen Integralen ausführen, obschon die Reduktion auf die Normalform auch schon etwas umständliche Rechnungen erfordert. Im allgemeineren Falle, bei dem a von Null verschieden ist, ist die Integration erheblich schwieriger, und wir wollen daher von vornherein darauf verzichten, die Integration für endliche Schwingungswege auszuführen. Wie man sich schon bei den gewöhnlichen einfachen Pendelschwingungen meist auf die Anwendung der für kleine Ausschläge gültigen Näherungsformeln beschränken kann, wird man auch in unserem Falle mit der Untersuchung kleiner Schwingungen um die Gleichgewichtslage für die praktische Anwendung gewöhnlich vollständig ausreichen.

Die Gleichgewichtslage des Pendels, die zur Winkelgeschwindigkeit u gehört, sei mit β bezeichnet. Man findet sie aus der Bedingung, daß das Moment des Gewichts für den Drehpunkt gleich dem Momente der Zentrifugalkraft ist, also durch Auflösung der Gleichung

$$-gl\sin\beta + u^2(a + l\sin\beta)\,l\cos\beta = 0. \tag{49}$$

Die Gleichung ist, wenn man darin $\sin\beta$ als Unbekannte ansieht, vom vierten Grade. Auf eine nähere Untersuchung ihrer Wurzeln können wir verzichten und uns mit der Bemerkung begnügen, daß jedenfalls immer zwei reelle Lösungen möglich sein müssen, die zu einem Werte von $\sin\beta$ führen, der zwischen -1 und $+1$ liegt, da ohne weiteres klar ist, daß mindestens zwei Gleichgewichtslagen bestehen: eine, bei der das Pendel in Abb. 4 nach links, und eine, bei der es nach rechts hin ausschlägt. Wir kümmern uns jetzt nur um eine Gleichgewichtslage β, in der β positiv ist, und betrachten diese weiterhin als gegeben, oder durch Auflösung von Gl. (49) durch Probieren ermittelt.

Wie schon im vorigen Paragraphen können wir auch jetzt wieder

$$\chi = \beta + \chi_1 \quad \text{und} \quad \alpha = \beta + \alpha_1$$

setzen und χ_1 und α_1 als kleine Größen ansehen, worauf der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen in Gl. (48) in der schon früher benutzten Weise bis auf Größen, die von der zweiten Ordnung klein sind, entwickelt werden kann. Es zeigt sich dabei, daß die Glieder von der ersten Ordnung mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichung (49) für β gegeneinander wegfallen. Die Gleichung (48) geht dann über in

$$\frac{d\chi_1}{\sqrt{(\alpha_1^2 - \chi_1^2)\left\{\frac{g}{l}\cos\beta + u^2\frac{a}{l}\sin\beta - u^2\cos 2\beta\right\}}} = dt. \tag{50}$$

Zur Abkürzung schreiben wir für den konstanten Faktor

$$\frac{g}{l}\cos\beta + u^2\frac{a}{l}\sin\beta - u^2\cos 2\beta = A^2, \tag{51}$$

womit aus der vorhergehenden Gleichung durch Integration folgt

$$\arcsin \frac{\chi_1}{\alpha_1} = At + C,$$

oder bei Auflösung nach χ_1

$$\chi_1 = \alpha_1 \sin (At + C).$$

Rechnen wir die Zeit t von einem Augenblicke an, in dem $\chi_1 = 0$ war, so ist die Integrationskonstante $C = 0$ zu setzen und man erhält

$$\chi_1 = \alpha_1 \sin At. \tag{52}$$

Die Schwingungsdauer T für eine volle Schwingung folgt daraus, wenn man für A wieder seinen Wert einsetzt

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}\cos\beta + u^2 \frac{a}{l}\sin\beta - u^2 \cos 2\beta}}. \tag{53}$$

Das Pendel führt daher, solange man die Schwingungen als klein betrachten darf, einfache harmonische und isochrone Schwingungen um die Gleichgewichtslage aus.

Setzt man $a = 0$, so vereinfachen sich die Gleichungen wie folgt. Aus Gl. (49) erhält man entweder

$$\sin\beta = 0 \quad \text{oder} \quad \cos\beta = \frac{g}{u^2 l}.$$

Wenn $u^2 l$ größer ist als g, kommt nur die zweite Lösung in Betracht, da dann die erste einer instabilen Gleichgewichtslage entspricht. Gl. (53) geht, wenn man diesen Wert von $\cos\beta$ einsetzt, über in

$$T = \frac{2\pi u l}{\sqrt{u^4 l^2 - g^2}}.$$

Ist dagegen $u^2 l$ kleiner als g, so ist $\beta = 0$ zu setzen und Gl. (53) geht damit über in

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g - u^2 l}}.$$

Für $u^2 l = g$ wird $T = \infty$ und die Lage $\beta = 0$ entspricht einer indifferenten Gleichgewichtslage.

Soweit es für die praktischen Anwendungen erforderlich scheint, kann die zuerst gestellte Aufgabe hiermit als gelöst betrachtet werden.

Wir erweitern jetzt die Betrachtung auf ein Pendel, das als eine in der Bewegungsebene liegende Scheibe angesehen werden kann. Die Dicke der Scheibe oder die Massendichte innerhalb der Scheibenebene kann dabei für verschiedene Stellen verschieden und beliebig gegeben sein. Im übrigen halten wir an den Voraussetzungen fest, die wir bei dem einfacheren Beispiele zugrunde gelegt hatten.

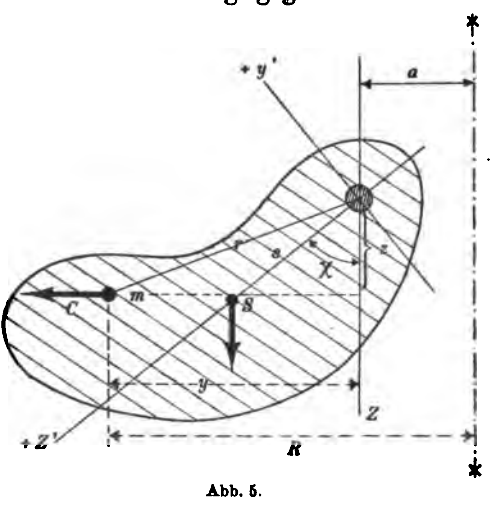


Abb. 5.

An Stelle von Abb. 4 tritt jetzt Abb. 5, in der S den Schwerpunkt der Scheibe bedeutet. Das Gewicht der ganzen Scheibe sei jetzt mit Mg bezeichnet, während unter m die Masse eines Scheibenelements verstanden werden soll.

Um die Bewegungsgleichung aufzustellen, verfahren wir genau wie im vorhergehenden Falle, berechnen also zuerst, wie groß die Arbeit der Zentrifugalkräfte für den Übergang aus der Lage χ in die Lage α ist, womit wir wie früher den größten Ausschlag bezeichnen wollen, den das Pendel während seiner Schwingung erreicht. Die Zentrifugalkraft an dem beliebig herausgegriffenen Massenteilchen m ist

$$C = mu^2 R = mu^2 (a + y).$$

Wenn χ um $d\chi$ anwächst, beschreibt der Angriffspunkt von C ein Bogenelement $r d\chi$, dessen Projektion auf die horizontale Richtung von C gleich $z d\chi$ gesetzt werden kann. Die Bedeutung der Buchstaben ist aus der Abbildung zu entnehmen.

Die Arbeit von C ist daher gleich

$$m u^2 (a z + y z)\, d\chi,$$

und die Arbeit aller Zentrifugalkräfte an allen Massenteilchen folgt daraus zu

$$u^2 \cdot d\chi \{ a \cdot M s \cos\chi + \Sigma m y z \}.$$

Hierbei konnte nach dem Schwerpunktssatze $\Sigma m z$ gleich $M s \cos\chi$ gesetzt werden. Das zweite Glied in der Klammer gibt das Zentrifugalmoment der ebenen Massenverteilung in bezug auf die durch den Drehpunkt gezogene y- und z-Achse an. Um dieses Zentrifugalmoment ebenfalls als Funktion des Winkels χ darzustellen, ziehen wir zwei zueinander senkrechte Achsen durch den Drehpunkt, von denen die eine durch den Schwerpunkt S geht und die wir als die y'- und z'-Achse bezeichnen wollen, derart, daß für $\chi = 0$ die y- und z-Achse damit zusammenfallen. Nach den Untersuchungen über die Trägheits- und Zentrifugalmomente von Querschnittsflächen in Band III, die sich auf den vorliegenden Fall ohne weiteres übertragen lassen, können wir nach Gl. (53) S. 90 der 3. Aufl. dieses Bandes

$$\Sigma m y z = \frac{\Theta_{y'} - \Theta_{z'}}{2} \sin 2\chi + \Phi_{y'z'} \cos 2\chi \tag{54}$$

setzen. Sollte die durch den Schwerpunkt geführte z'-Achse eine Hauptträgheitsachse sein, was oft zutreffen wird, so fällt $\Phi_{y'z'}$ weg. Wir wollen aber an dem allgemeinen Falle festhalten und mit Einführung der Abkürzungen p und q die vorhergehende Gleichung in der Form

$$\Sigma m y z = p \sin 2\chi + q \cos 2\chi$$

anschreiben. Die Koeffizienten p und q hängen nur von der Gestalt und Massenverteilung des Pendelkörpers und nicht von der durch den Winkel χ beschriebenen augenblicklichen Lage ab; sie können weiterhin als gegebene konstante Größen betrachtet werden.

Die Arbeit der Zentrifugalkräfte für die Bewegung aus der Lage χ in die Lage α berechnet sich hiermit zu

$$u^2 \int_{\chi}^{\alpha} \{ a M s \cos\chi + p \sin 2\chi + q \cos 2\chi \}\, d\chi$$

oder, wenn man die Integration ausführt, zu

$$u^2\{aMs(\sin\alpha - \sin\chi) - \tfrac{1}{4}p(\cos 2\alpha - \cos 2\chi) \\ + \tfrac{1}{2}q(\sin 2\alpha - \sin 2\chi)\}.$$

Bezeichnen wir das polare, d. h. das auf die Drehachse der Scheibe bezogene Trägheitsmoment mit θ_p, wobei zu beachten ist, daß

$$\theta_p = \theta_{y'} + \theta_{z'}$$

gesetzt werden kann, so erhält man nach dem Satze von der lebendigen Kraft die Bewegungsgleichung

$$\frac{1}{2}\theta_p\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 = Mgs(\cos\chi - \cos\alpha) - u^2\{aMs(\sin\alpha - \sin\chi) \\ + p(\sin^2\alpha - \sin^2\chi) + \tfrac{1}{2}q(\sin 2\alpha - \sin 2\chi)\}, \tag{55}$$

die genau wie früher auf eine integrable Form gebracht werden kann. Wir wissen schon, daß die Ausführung der Integration für endliche Pendelschwingungen zu viel Schwierigkeiten machen würde, und beschränken uns daher auf die Betrachtung kleiner Schwingungen um die durch den Winkel β angegebene Gleichgewichtslage des Pendels. Der Winkel β ist durch die auf den Drehpunkt bezogene Momentengleichung

$$-Mgs\sin\beta + u^2(aMs\cos\beta + p\sin 2\beta + q\cos 2\beta) = 0 \tag{56}$$

bestimmt, die hier an die Stelle von Gl. (49) tritt. Setzen wir nun wieder

$$\chi = \beta + \chi_1 \quad \text{und} \quad \alpha = \beta + \alpha_1$$

und entwickeln bis auf Größen, die von der zweiten Ordnung klein sind, so geht die Bewegungsgleichung über in

$$\frac{1}{2}\theta_p\left(\frac{d\chi_1}{dt}\right)^2 = (\alpha_1^2 - \chi_1^2)\left\{\frac{1}{2}Mgs\cos\beta + \frac{1}{2}u^2aMs\sin\beta \\ - u^2p\cos 2\beta + u^2q\sin 2\beta\right\}. \tag{57}$$

Die Gleichung kann nun in derselben Weise weiter behandelt werden wie vorher Gl. (50). Ich begnüge mich damit, die Schwingungsdauer T anzuschreiben, zu der man dabei an Stelle von Gl. (53) geführt wird:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\theta_p}{Mgs\cos\beta + u^2aMs\sin\beta - 2u^2p\cos 2\beta + 2u^2q\sin 2\beta}}. \tag{58}$$

Besonders zu beachten ist, daß man eine reduzierte Pendellänge, wie sie bei den gewöhnlichen Pendelschwingungen zur Zurückführung der Schwingungen des physischen Pendels auf die des einfachen Fadenpendels benutzt wird, bei den Pendelschwingungen im rotierenden Raume nicht anzugeben vermag. Vielmehr wird für jeden andern Ausschlagwinkel β des physischen Pendels die Länge des gleichschwingenden, aus einer gewichtslosen Stange und einem materiellen Punkte bestehenden einfachen Pendels verschieden gefunden. Nur in dem besonderen Falle, daß die Scheibe durch einen Stab ersetzt wird, über dessen Länge sich die Massen in beliebiger Weise verteilen können, läßt sich eine für alle Winkelgeschwindigkeiten u und hiermit für alle Gleichgewichtslagen β gleichbleibende reduzierte Pendellänge angeben. In diesem Falle wird nämlich

$$\theta_{z'} = 0; \quad \Phi_{y'z'} = 0; \quad \theta_p = \theta_{y'} = Mi^2,$$

und Gl. (58) schreibt sich daher mit Benutzung der Bezeichnung i für den Trägheitshalbmesser

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{i^2}{gs\cos\beta + u^2 as\sin\beta - u^2 i^2 \cos 2\beta}}.$$

Der Vergleich mit Gl. (53) liefert für die reduzierte Pendellänge l_{red} in diesem Falle den Ausdruck

$$l_{\text{red}} = \frac{i^2}{s}$$

genau wie bei den gewöhnlichen Pendelschwingungen im ruhenden Raume. Es muß aber ausdrücklich betont werden, daß diese einfache Beziehung nur für das stabförmige Pendel und nicht für das scheibenförmige gültig ist.

Endlich soll noch der Fall betrachtet werden, daß der Pendelkörper eine beliebige Gestalt und Massenverteilung besitzt. Durch den Schwerpunkt S und die Umdrehungsachse des rotierenden Raumes sei eine Ebene gelegt und Abb. 5 stelle jetzt die Projektion des Pendelkörpers auf diese Ebene dar. Von der Aufhängeachse des Pendels

nehme ich an, daß sie auf dieser Ebene senkrecht stehe, sich also in Abb. 5 wiederum als Punkt projiziere. Ein beliebiges Massenteilchen m hat dann einen Abstand R von der Umdrehungsachse des Raumes, der nicht in der Projektionsebene enthalten ist, dessen Projektion aber wiederum gleich $a + y$ gesetzt werden kann, wenn diese beiden Buchstaben die in Abb. 5 ausgewiesene Bedeutung beibehalten. Die Zentrifugalkraft C liegt ebenfalls nicht in der Projektionsebene; ich zerlege sie in eine Komponente, die zu dieser Ebene senkrecht steht, und eine, die parallel zu ihr geht. Die letztgenannte Komponente hat dann die Größe $mu^2(a + y)$. Auf die senkrecht zur Projektionsebene stehende Komponente kommt es nicht an, da sie senkrecht zur Bewegungsrichtung bei der Relativbewegung des Pendels steht und daher keine Arbeit leistet. Aus demselben Grunde leistet auch die zweite Ergänzungskraft der Relativbewegung keine Arbeit.

Aus diesen Betrachtungen folgt, daß die Bewegungsgleichung für das dreifach ausgedehnte Pendel genau mit der Bewegungsgleichung für das scheibenförmige Pendel übereinstimmt, das man durch Verlegung aller Massen nach ihren Projektionen in der Projektionsebene erhält. Dieser Fall ist daher durch die vorhergehende Untersuchung schon zugleich mit erledigt.

Anders wäre es freilich, wenn die Aufhängeachse des Pendels zu der durch den Schwerpunkt und die Umdrehungsachse des rotierenden Raumes gelegten Projektionsebene nicht senkrecht stehen sollte. Es würde keine besonderen Schwierigkeiten machen, die Bewegungsgleichung auch für diesen Fall auf dem vorher benutzten Wege abzuleiten. Ich sehe aber davon ab, weil sich bei den praktischen Anwendungen schwerlich ein Bedürfnis nach einer näheren Untersuchung dieses allgemeineren Falles herausstellen dürfte.

Hierzu bemerke ich noch, daß man nach dem hier gegebenen Muster auch eine Pendelbewegung untersuchen kann, bei der neben dem Gewichte oder auch an Stelle des Gewichtes ein Federzug an dem Pendelkörper angreift, der ihn in die Lage

$\chi = 0$ zurückzuführen sucht. Anordnungen dieser Art kommen bei den Regulatoren der Kraftmaschinen sehr häufig vor. Es würde mich aber zu weit führen, die verschiedenen hierbei möglichen Fälle im einzelnen durchzusprechen; es muß vielmehr genügen, daß eine Anleitung dafür gegeben ist, wie man solche Aufgaben zu behandeln hat.

§ 11. Schwingungen von schnell umlaufenden Hängespindeln.

Unter einer Hängespindel soll hier ein Pendel verstanden werden von derselben Art, wie es im Anfange des vorigen Paragraphen betrachtet war: also ein Pendel, das aus einer als gewichtslos zu betrachtenden Stange und einem daran befestigten materiellen Punkt zusammengesetzt ist und dessen horizontale Aufhängeachse gezwungen ist, die mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit erfolgende Rotation um die vertikale Achse mitzumachen, während das Pendel zugleich Schwingungen relativ zum rotierenden Raume um die Aufhängeachse auszuführen vermag. Überdies soll hier der in Abb. 4, S. 57 mit a bezeichnete Abstand gleich Null sein, der Aufhängepunkt der Pendelstange also auf der Umdrehungsachse des rotierenden Raumes liegen.

Dagegen lasse ich jetzt die früher gemachte Voraussetzung fallen, daß man die Pendelstange als starr betrachten könne. Diese Voraussetzung ist nämlich nur so lange zulässig, als die Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Raumes nicht zu groß wird. Mit der Winkelgeschwindigkeit wachsen die Corioliskräfte, die von der Stange aufgenommen werden müssen, um die früher betrachteten ebenen Pendelschwingungen relativ zum rotierenden Raume zu erzwingen, und wenn diese Kräfte groß genug werden, bringen sie eine Verbiegung der Stange hervor, die nicht mehr vernachlässigt werden darf, wenn man eine befriedigende Erklärung des Verhaltens einer schnell umlaufenden Hängespindel liefern will.

Die Hängespindeln zeigen nämlich eine Erscheinung, die als sehr merkwürdig bezeichnet werden darf. Bei kleinen

Winkelgeschwindigkeiten bildet die lotrechte Lage eine stabile Gleichgewichtslage des Pendels, die aber zu einer labilen wird, sobald die Winkelgeschwindigkeit einen gewissen verhältnismäßig niedrigen Wert, der aus den früheren Betrachtungen bereits bekannt ist, überschritten hat. Wenn aber die Winkelgeschwindigkeit noch bedeutend größer wird, zeigt sich, daß die lotrechte Lage des Pendels wiederum zu einer stabilen Gleichgewichtslage wird, um die das Pendel Schwingungen auszuführen vermag, die keineswegs zu einer fortwährenden Vergrößerung des Pendelausschlags führen, wie es bei einer starren Pendelstange sein müßte, sondern dauernd in mäßigen Grenzen bleiben, vielmehr durch die Bewegungswiderstände, die in der Rechnung nicht berücksichtigt sind, allmählich erlöschen. Diese auch für manche praktische Anwendungen recht wichtige Erscheinung ist eng verwandt mit den schon im vierten Bande behandelten Biegungsschwingungen von schnell umlaufenden schwanken Wellen, wie sie bei den Dampfturbinen vorkommen.

Die Theorie des Vorgangs habe ich schon vor langer Zeit veröffentlicht. Dabei ging ich von der Betrachtung der absoluten Bewegung des schwingenden materiellen Punktes aus. Von anderer Seite (ich weiß nicht genau von wem zuerst) wurde dann darauf hingewiesen, daß man die Rechnung erheblich abkürzen kann, wenn man die Schwingungen relativ zum rotierenden Raume untersucht. Das ändert an dem Ergebnisse selbst natürlich nichts; da aber in der Tat eine Vereinfachung der Ableitung damit verbunden ist, schließe ich mich dieser Art der Behandlung jetzt ebenfalls an.

Wenn wir uns auf die Betrachtung von kleinen Schwingungen um die lotrechte Gleichgewichtslage beschränken, brauchen wir auf die von höherer Ordnung kleinen Bewegungskomponenten in vertikaler Richtung nicht zu achten. Wir können vielmehr, wie schon in der gewöhnlichen Näherungstheorie für das einfache Pendel (Band IV, § 11, S. 77 der 3. Aufl.), die Bewegung als eine ebene ansehen. Abb. 6 zeigt eine Projektion des Pendels auf die horizontale Bewegungsebene

des materiellen Punktes in der Stellung des Pendels zur Zeit t. Punkt O ist die Projektion der Umdrehungsachse des rotierenden Raumes, AA die Projektion der Aufhängeachse des Pendels, die ihre Richtung auch weiterhin beibehält, wenn wir die Bewegungen relativ zum rotierenden Raume untersuchen. Wenn die Pendelstange nicht verbogen wäre, müßte der materielle Punkt m auf der zu AA senkrecht gezogenen X-Achse liegen. Die Ordinate y gibt daher den Biegungspfeil der Pendelstange zur Zeit t an. Die punktiert gezeichnete Linie von O nach m soll die Projektion der elastischen Linie der gebogenen Pendelstange andeuten.

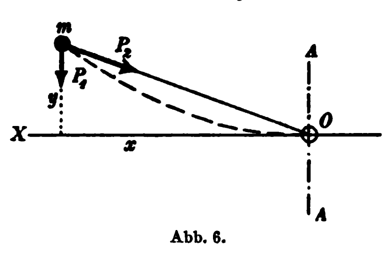


Abb. 6.

Wir fragen uns zunächst, was für Kräfte an m angreifen müßten, um die Pendelstange dauernd in der angegebenen Lage festzuhalten, wenn keine Rotation um die Achse O hinzukäme. Die Verbiegung wird durch eine horizontale Kraft P_1 aufrecht erhalten, die parallel zur Achse AA gehen muß, wenn sie keine Drehung des Pendels hervorbringen soll. Sie kann gleich cy gesetzt werden, wenn man unter c jene Kraft versteht, die eine Ausbiegung der bei AA eingespannten Stange von der Längeneinheit hervorbringt. Kommt nun weiter das Gewicht mg an m hinzu, so muß noch eine zweite Kraft P_2 angebracht werden, die eine Drehung des Pendels durch das Gewicht verhindert. Da nur eine horizontale Bewegung des materiellen Punktes bei einer Gleichgewichtsstörung in Betracht kommt, haben wir P_2 in horizontaler Richtung anzunehmen. Dagegen kann man zunächst im Zweifel sein, ob P_2 parallel zur X-Achse oder in der Richtung Om in Abb..6 anzunehmen ist. Um uns darüber Klarheit zu verschaffen, bedenken wir, daß unsere Betrachtung für jeden Wert der Biegungssteifigkeit der Stange Gültigkeit behalten soll, also in der Grenze auch für den Fall, daß die Biegungssteifigkeit gleich Null ist, womit das Pendel in ein Fadenpendel übergeht. In diesem Falle muß aber die

Kraft P_2 in der durch den Faden gelegten Lotebene enthalten sein, also in die Richtung Om im Grundrisse fallen. Wir nehmen daher die Kraft P_2 von vornherein in dieser Richtung an.

Zerlegen wir die Kraft P_2 in zwei Komponenten parallel zu den beiden Koordinatenrichtungen, so folgt für die parallel zur X-Richtung gehende Komponente aus einer Momentengleichung für die Aufhängeachse AA der Wert

$$mg\frac{x}{l},$$

woraus weiter für die andere Komponente, die mit der ersten zusammen eine in der Richtung Om gehende Resultierende bilden soll,

$$mg\frac{y}{l}$$

folgt. Hierbei ist die Pendellänge mit l bezeichnet und zu beachten, daß der Höhenunterschied von AA und m bei kleinen Pendelausschlägen bis auf Größen höherer Ordnung genau gleich l gesetzt werden kann.

Fehlen die beiden horizontalen Kräfte P_1 und P_2, die nötig wären, um das Pendel in der betrachteten Lage im Gleichgewicht zu halten, so setzen sich die an m angreifenden physikalisch existierenden Kräfte, also das Gewicht und die von der verbogenen Stange auf m übertragene Kraft zu einer Resultierenden zusammen, die mit den in entgegengesetzter Richtung genommenen Kräften P_1 und P_2 gleichwertig ist. In Abb. 6 sind die Kräfte P_1 und P_2 schon mit den Pfeilen eingetragen, die ihnen zukommen, wenn man sie als Ersatz der Resultierenden der an m angreifenden physikalisch existierenden Kräfte betrachtet.

Gehen wir jetzt zu den Schwingungen des Pendels relativ zum rotierenden Raume über, so bleiben die physikalisch existierenden Kräfte davon unberührt. Außerdem haben wir aber, um die Bewegungsgleichungen anschreiben zu können, noch die beiden Zusatzkräfte an m anzubringen. Die erste Zusatzkraft ist die Zentrifugalkraft, die wir nach den Koordinatenrichtungen in zwei Komponenten von den Größen

$$mu^2x \quad \text{und} \quad mu^2y$$

zerlegen können. Auch die Geschwindigkeit des materiellen

Punktes zerlegen wir in zwei Komponenten $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$, womit die zweite Zusatzkraft in die Komponenten

$$2mu\frac{dy}{dt} \text{ in der } x\text{-Richtung und}$$

$$-2mu\frac{dx}{dt} \text{ in der } y\text{-Richtung}$$

zerfällt. Bei der Bestimmung der Vorzeichen ist vorausgesetzt, daß sich der rotierende Raum so dreht, daß die Drehrichtung in Abb. 6 mit dem Uhrzeigersinne übereinstimmt. Bei entgegengesetzter Drehung lassen sich jedoch dieselben Ausdrücke benutzen, wenn man darin u einen negativen Wert beilegt.

Nachdem die Komponenten aller Kräfte festgestellt sind, erhalten wir die Bewegungsgleichungen in rechtwinkligen Koordinaten nach dem dynamischen Grundgesetze. Dividieren wir sofort mit m, so lauten die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{g}{l}x + u^2x + 2u\frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{c}{m}y - \frac{g}{l}y + u^2y - 2u\frac{dx}{dt} \end{aligned}\right\}. \tag{59}$$

Um die Unbekannte y daraus zu eliminieren, differentiieren wir die zweite Gleichung nach t und setzen darauf den aus der ersten Gleichung zu entnehmenden Ausdruck für $\frac{dy}{dt}$ in sie ein. Dadurch erhält man

$$\frac{d^4x}{dt^4} + \left(2u^2 + \frac{2g}{l} + \frac{c}{m}\right)\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{g}{l} - u^2\right)\left(\frac{c}{m} + \frac{g}{l} - u^2\right)x = 0. \tag{60}$$

Eliminirt man umgekehrt x, was in derselben Weise geschehen kann, so überzeugt man sich, daß y ebenfalls der Differentialgleichung (60) genügen muß.

Differentialgleichungen dieser Art sind schon im vierten Bande bei der Untersuchung von Schwingungen von Körpern mit zwei Freiheitsgraden wiederholt vorgekommen. Wir wissen daher schon, daß es nur von den Werten der in der Gleichung auftretenden konstanten Koeffizienten abhängt, ob dadurch zwei übereinander gelagerte einfache harmonische Schwingungen oder

eine aperiodische Bewegung mit fortdauernd wachsendem Ausschlage dargestellt wird. Eine periodische Bewegung entsteht, wenn sich die Lösung von Gl. (60) in der Form

$$x = A_1 \sin \lambda_1 t + B_1 \cos \lambda_1 t + A_2 \sin \lambda_2 t + B_2 \cos \lambda_2 t \qquad (61)$$

mit reellen Werten der Konstanten λ_1 und λ_2 ansetzen läßt. Unter $A_1 B_1 A_2 B_2$ sind die von den Grenzbedingungen abhängigen Integrationskonstanten zu verstehen, während λ_1 und λ_2 die beiden positiven Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^4 - \left(2u^2 + \frac{2g}{l} + \frac{c}{m}\right)\lambda^2 + \left(\frac{g}{l} - u^2\right)\left(\frac{c}{m} + \frac{g}{l} - u^2\right) = 0 \qquad (62)$$

sind. Es kommt also nun darauf an, ob diese Wurzeln beide reell sind.

Schreiben wir zur Abkürzung Gl. (62) in der Form

$$\lambda^4 - a\lambda^2 + b = 0,$$

so liefert die Auflösung

$$\lambda^2 = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}.$$

Dabei ist der mit a bezeichnete Koeffizient in Gl. (62) auf jeden Fall eine positive Größe, während b sowohl positiv als negativ sein kann, je nach dem Werte der Winkelgeschwindigkeit u. Wird b negativ, so fällt der mit dem unteren Wurzelvorzeichen versehene Wert von λ^2 negativ aus und die Wurzel daraus wird imaginär. In diesem Falle ist daher die in Gl. (61) angeschriebene Lösung in reeller Form nicht möglich; an ihre Stelle tritt vielmehr eine Lösung mit Exponentialfunktionen. Periodische Bewegungen der Hängespindel um die lotrechte Gleichgewichtslage sind alsdann ausgeschlossen, d. h. die lotrechte Lage ist eine labile Gleichgewichtslage.

Wenn b positiv ist, bleibt dagegen die Lösung in Gl. (61) zu Recht bestehen und die lotrechte Lage der Hängespindel ist eine stabile Gleichgewichtslage. Freilich darf bei einem positiven Werte von b der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen $a^2 - 4b$ nicht negativ werden, weil sonst λ^2 imaginär würde. Setzt man aber die Werte ein, für die zur Abkürzung

a und b geschrieben war, so erhält man nach einfachen Umformungen

$$a^2 - 4b = \left(2u^2 + \frac{2g}{l} + \frac{c}{m}\right)^2 - 4\left(\frac{g}{l} - u^2\right)\left(\frac{c}{m} + \frac{g}{l} - u^2\right)$$
$$= 8u^2\left(\frac{2g}{l} + \frac{c}{m}\right) + \frac{c^2}{m^2},$$

und das ist, da g, l, c, m nur positive Werte haben können, auf jeden Fall ein positiver Betrag. Imaginäre Lösungen für λ^2 sind daher tatsächlich ausgeschlossen.

Setzen wir

$$u_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{und} \quad u_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{c}{m}}, \tag{63}$$

so sind Schwingungen von der betrachteten Art möglich, solange u dem Absolutbetrage nach (auf das Vorzeichen kommt es, wie aus Gl. (62) hervorgeht, nicht an) entweder unter u_1 oder über u_2 liegt. Dagegen sind diese Schwingungen nicht möglich und die lotrechte Lage ist daher eine labile Gleichgewichtslage der Hängespindel, wenn u zwischen u_1 und u_2 liegt.

Damit sind die vorher aufgestellten Behauptungen über das Verhalten der Hängespindel bei großen Umlaufsgeschwindigkeiten, die über u_2 liegen, bewiesen. Auch die Schwingungsdauern T_1 und T_2 der beiden harmonischen Schwingungen, in die sich die Bewegung des materiellen Punktes zerlegen läßt, lassen sich sofort angeben, wenn c, l, m und u gegeben sind, denn man hat dafür

$$T_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} \quad \text{und} \quad T_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}.$$

Besondere Beachtung verdient noch der Grenzfall $c = 0$, bei dem die Hängespindel in ein einfaches Fadenpendel übergeht. Dann werden u_1 und u_2 einander gleich. Daß für das Fadenpendel die lotrechte Lage immer eine stabile Gleichgewichtslage ist, sieht man ohne weiteres ein, wenn man bedenkt, daß bei ihm überhaupt kein Zwang von der rotierenden Welle ausgeübt werden kann, die Rotation mitzumachen; die absolute Bewegung erfolgt daher genau so, als wenn die Welle

nicht rotierte. Da nun die absolute Bewegung nicht zu großen Ausschlägen führen kann, wenn sie mit kleinen Geschwindigkeiten in der Nähe der lotrechten Lage begonnen hatte, folgt sofort, daß auch die Ausschläge relativ zum rotierenden Raume nicht fortdauernd wachsen können.

Dies folgt auch aus den hier aufgestellten Formeln mit $c = 0$ für alle Geschwindigkeiten, die von u_1 verschieden sind. Setzt man aber ferner noch $u = u_1$, so gehen die Gleichungen (59) über in

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2u_1 \frac{dy}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -2u_1 \frac{dx}{dt}$$

und die Elimination von y liefert an Stelle von Gl. (60)

$$\frac{d^3x}{dt^3} + 4u_1^2 \frac{dx}{dt} = 0,$$

woraus durch Integration nach t

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -4u_1^2 x + C,$$

also die Differentialgleichung der einfachen harmonischen Schwingung erhalten wird, woraus dann folgt, daß auch für $u = u_1$ die lotrechte Lage bei $c = 0$ eine stabile Gleichgewichtslage ist.

Gerade der Umstand, daß das Fadenpendel als Grenzfall der Hängespindel mit biegsamer Pendelstange betrachtet werden kann, erleichtert das Verständnis dafür, daß auch für ein von Null verschiedenes c bei sehr großen Umlaufsgeschwindigkeiten die lotrechte Lage wieder zu einer stabilen Gleichgewichtslage wird.

Zweiter Abschnitt.

Die Bewegungsgleichungen für mehrläufige Verbände.

§ 12. Stellung der Aufgabe.

Der Hauptinhalt des vierten Bandes wird von der Dynamik des materiellen Punktes und des starren Körpers gebildet. Dabei konnte der starre Körper entweder völlig frei oder gewissen Bewegungsbeschränkungen unterworfen sein, die durch eine teilweise Stützung oder eine Auflagerung in einem unbeweglich festgehaltenen Gestell herbeigeführt wurden. In diesem Falle bildete bereits, wie wir jetzt sagen wollen, der starre Körper zusammen mit dem Gestell einen „Verband", dem bestimmte geometrische Bedingungen vorgeschrieben sind. Ich gebrauche hier das Wort „Verband" an Stelle des sonst gewöhnlich benutzten Wortes „System" für den gleichen Zusammenhang.

Einem freien starren Körper kommen, wie schon im ersten Bande näher besprochen wurde, sechs Freiheitsgrade der Bewegung zu. Durch die Herstellung des Verbandes wird diese Zahl herabgesetzt, je nach dem Grade der Fesselung. Wenn die Verbindung so eng ist, daß nur noch ein Freiheitsgrad der Bewegung übrig bleibt, wird der Verband als „zwangläufig" bezeichnet. Um zu einer bequemeren Ausdrucksweise zu gelangen, wollen wir einen zwangläufigen Verband auch einen „einläufigen" nennen, im Gegensatz zu einem „mehrläufigen" Verbande, bei dem die Zahl der Freiheitsgrade größer ist als Eins, und zwar nennen wir den Verband n-läufig, wenn n voneinander unabhängige Bewegungsmöglichkeiten vorhanden sind.

Wir wollen uns aber jetzt nicht auf die Betrachtung von Verbänden beschränken, in denen außer dem festgehaltenen

Gestell nur noch ein einziger bewegter starrer Körper vorkommt, sondern die Zahl der Glieder, aus denen sich der Verband zusammensetzt, beliebig groß annehmen. Zu der Aufstellung des Begriffes „Verband" oder „System" hat als Vorbild die Betrachtung der Maschinen geführt, bei denen die Zahl der bewegten Glieder ebenfalls beliebig groß sein kann. Freilich bilden die Maschinen meistens zwangläufige Verbände oder sie lassen sich wenigstens in erster Annäherung als solche ansehen. Doch gilt das nicht immer. So bildet z. B. eine einfache, mit einem Regulator ausgerüstete Dampfmaschine bereits einen zweiläufigen Verband, da der Hub des Regulators nicht durch geometrische Bedingungen von der augenblicklichen Stellung des Kurbelgestänges abhängig ist.

Außerdem kann es aber auch nötig werden, eine Maschine, die in erster Annäherung als zwangläufig erscheint, für den Zweck einer genaueren Untersuchung als einen mehrläufigen Verband zu betrachten, um nämlich den elastischen Formänderungen ihrer Glieder, falls sich ein Bedürfnis dazu herausstellt, in ausreichender Weise Rechnung tragen zu können.

Wenn man eine Definition des Verbandes haben will, wird man zu sagen haben, daß darunter eine Vereinigung von Körpern oder Massen zu verstehen ist, zwischen denen geometrische Bedingungen bestehen, die zu Bewegungsbeschränkungen führen. Wir wollen aber absichtlich den Begriff so weit als möglich fassen und auch einen einzelnen freien starren Körper nicht davon ausschließen. In der Tat können wir ihn, ohne dem Worte Verband Gewalt anzutun, als einen sechsläufigen Verband auffassen, da der starre Körper eine Vereinigung von Massen bildet, zwischen denen die geometrische Bedingung besteht, daß sie ihre gegenseitigen Abstände nicht ändern können.

Bei den praktischen Anwendungen, die man von den Lehren dieses Abschnitts zu machen wünscht, wird die Art der geometrischen Bedingungen und hiermit auch die Zahl der Freiheitsgrade, d. h. die Zahl der voneinander unabhängigen Bewegungsmöglichkeiten, in der Regel von vornherein als gegeben

zu betrachten sein. Freilich kann es vorkommen, daß man zunächst zweifelhaft darüber ist, wie groß die Zahl der Freiheitsgrade sein muß, auf die man zu achten hat, um einen bestimmten physikalischen Vorgang mit hinlänglicher Genauigkeit darzustellen. Das gilt namentlich in dem vorher schon erwähnten Falle, daß man die elastische Formänderung eines Verbandgliedes berücksichtigen muß, weil sich auf Grund einer vorher mit Vernachlässigung dieser Formänderung angestellten Berechnung herausgestellt hat, daß diese Annäherung nicht ausreichend ist, um das tatsächliche Verhalten einer Maschine genügend wiederzugeben. Aber dabei handelt es sich um Vorerwägungen, bei denen man zunächst schätzungsweise vorgehen muß und die bereits zu einem mindestens vorläufigen Abschlusse geführt haben müssen, ehe man dazu übergehen kann, für den durch sie näher definierten idealisierten Verband die Bewegungsgleichungen aufzustellen.

Die Aufgabe, mit der wir es hier allein zu tun haben, besteht demnach darin, für einen in dieser Weise mit bestimmten einfachen Eigenschaften ausgestatteten Verband, der mit dem physikalisch gegebenen nicht in allen Stücken, sondern nur in den Hauptzügen übereinzustimmen braucht, die Bewegungsgleichungen aufzustellen, d. h. Gleichungen, die ausreichen, um zusammen mit den gegebenen Anfangsbedingungen die weitere Bewegung, die der Verband ausführt, daraus ermitteln zu können. Selbstverständlich muß man, um diese Aufgabe lösen zu können, über die Kräfte, unter deren Einfluß die Bewegung erfolgt, genügend unterrichtet sein.

Aufgaben dieser Art haben wir schon früher wiederholt gelöst, so z. B. bei der Pendelbewegung oder bei der Kreiseltheorie. Die Bewegungsgleichungen wurden in diesen Fällen mit Hilfe der dynamischen Grundgleichung und der aus ihr abgeleiteten Folgerungen, insbesondere des Satzes von der lebendigen Kraft und des Flächensatzes gefunden. Diese Hilfsmittel reichen auch in erheblich verwickelteren Fällen in der Regel vollständig aus, wenn man sie geschickt anzuwenden versteht. Aber der glückliche Gedanke, der nötig ist, um

damit zum Ziele zu kommen, stellt sich manchmal nicht zur rechten Zeit ein. Es ist daher von Vorteil, daß man allgemeine Methoden gefunden hat, nach denen die Bewegungsgleichungen stets gebildet werden können, ohne daß dabei ein besonderer erfinderischer Gedanke für die Behandlung jedes einzelnen Falles erforderlich wäre. Die wichtigste dieser Methoden ist die von Lagrange angegebene, und von ihr wird daher in diesem Abschnitte auch vorwiegend die Rede sein.

Die Bewegungsgleichungen, zu denen man durch die unmittelbare Anwendung, sei es der von früher her bekannten Hilfsmittel, sei es durch das Verfahren von Lagrange, gelangt, sind Differentialgleichungen nach der Zeit, und zwar gewöhnlich von der zweiten Ordnung. Nur bei der Anwendung des Satzes von der lebendigen Kraft erhält man sofort eine Gleichung von der ersten Ordnung. Auf jeden Fall müssen diese Gleichungen nachher noch integriert werden, um die Bewegung des Verbandes vollständig angeben zu können. Aber diese weitere Behandlung der Differentialgleichungen wollen wir als eine Aufgabe für sich betrachten, die mit dem, was hier zu besprechen ist, unmittelbar nichts zu tun hat. Als die Aufgabe dieses Abschnittes betrachten wir vielmehr nur die Aufstellung der Differentialgleichungen der Bewegung oder kurz gesagt der Bewegungsgleichungen. Bei den Beispielen zur Erläuterung der Theorie werde ich freilich auch die Lösung der aufgestellten Bewegungsgleichungen geben, soweit dies möglich ist; aber diese bildet nicht die Hauptsache, um die es uns hier zu tun ist. Das W i c h t i g s t e b l e i b t vielmehr s t e t s, die D i f f e r e n t i a l g l e i c h u n g e n s e l b s t z u f i n d e n; denn wenn es sich nachher auch als unmöglich herausstellen sollte, sie streng zu integrieren, so wird man trotzdem eine Reihe wertvoller Schlüsse aus ihnen ziehen oder Näherungslösungen aus ihnen ableiten können, mit denen man sich für die praktische Anwendung zufrieden geben kann.

§ 13. Freiheitsgrade und allgemeine Koordinaten.

Um die augenblickliche Stellung eines Verbandes zu beschreiben, wird man eine gewisse Zahl von richtungslosen Größen $q_1\ q_2 \ldots q_n$ anzugeben haben. Diese Größen kann man in verschiedener Weise auswählen und man wird die Wahl im einzelnen Falle so zu treffen suchen, daß sie zu einer möglichst einfachen Darstellung führt. Gewöhnlich werden sich dazu bestimmte Winkel oder Längen am besten eignen. Jedenfalls muß aber die Wahl so getroffen werden, daß alle q voneinander unabhängig sind, also so, daß man wiederum zu geometrisch möglichen Stellungen des Verbandes gelangt, wenn man alle übrigen q ungeändert läßt, während eine der Größen q wenigstens innerhalb gewisser Grenzen beliebige Werte annimmt. Diese Größen q nennt man die allgemeinen Koordinaten des Verbandes.

In den meisten Fällen ist die zur eindeutigen Beschreibung einer bestimmten Stellung des Verbandes notwendige und hinreichende Zahl der allgemeinen Koordinaten q gleich der Zahl der Freiheitsgrade des Verbandes. Doch ist dies nicht unbedingt notwendig. Wenn es zutrifft, kann man den Verband aus einer allgemeinen Stellung $q_1\ q_2 \ldots q_n$ in eine Nachbarstellung, für die nur ein q, etwa q_i, um einen unendlich kleinen Betrag δq_i geändert ist, unmittelbar überführen, d. h. die durch die angegebene Anfangs- und Endlage beschriebene Bewegung, während alle anderen q konstant sind, gehört zu den geometrisch möglichen oder, wie man dafür sagt, zu den virtuellen Bewegungen des Verbandes. Der Begriff der Freiheitsgrade, wie er früher eingeführt wurde, bezieht sich nämlich auf die Zahl der unabhängig voneinander bestehenden Bewegungsmöglichkeiten in unendlich nahe benachbarte Lagen, so daß sich jede andere Bewegung aus ihnen zusammensetzen läßt. Also nur, wenn sich auch in der Tat jedes q einzeln um einen unendlich kleinen Zuwachs bei konstanten Werten der übrigen q durch einen möglichen Bewegungsvorgang ändern läßt, stimmt die Zahl der Freiheitsgrade mit der Zahl der all-

gemeinen Koordinaten überein. Größer kann die erste Zahl auf keinen Fall sein als die zweite; wohl aber kleiner. Gewöhnlich sind aber beide einander gleich. In diesem Falle sagt man nach einer von Hertz eingeführten Bezeichnung, daß dem Verbande nur „holonome“ Bedingungen vorgeschrieben sind.

Um den Sinn dieser Bemerkungen besser zu verstehen, ist es nötig, ein Beispiel zu betrachten, bei dem eine „nicht-holonome“ Bedingung vorkommt. Ein solches liefert ein auf einer rauhen Ebene rollendes Rad, das nicht darauf zu gleiten vermag. Diese letzte Bedingung ist eine nicht-holonome. Der Verband, der aus dem Rad und der Unterlage, etwa dem Fußboden, gebildet wird, bedarf zur Beschreibung seiner augenblicklichen Stellung vier voneinander unabhängiger allgemeiner Koordinaten, und trotzdem hat das Rad, weil es nicht gleiten kann, nur drei Freiheitsgrade. Wir wollen dieses Sachverhältnis noch etwas näher besprechen.

Um die augenblickliche Stellung des Rads zu beschreiben, kann man etwa die zwei rechtwinkligen Koordinaten xy des Berührungspunktes, ferner den Winkel φ, den die in den Fußboden fallende Kreistangente mit der x-Achse bildet, und endlich den Winkel ψ angeben, den die Radebene mit der Fußbodenebene bildet. Alle vier Größen sind unabhängig voneinander, da man jede einzelne von ihnen ändern kann, während die andern konstant bleiben, und dabei jedesmal wieder zu einer neuen möglichen Lage des Rades geführt wird. In der Tat kann auch das Rad aus jeder Lage $x_1 y_1 \varphi_1 \psi_1$ im allgemeinen in jede neue Lage $x_2 y_2 \varphi_2 \psi_2$ übergeführt werden, wenn man es einen passenden Weg durchlaufen läßt. Dagegen ist es nicht möglich, aus der Lage $x_1 y_1 \varphi_1 \psi_1$ in die Nachbarlage $x_1 + \delta x_1$, y_1, φ_1, ψ_1 durch eine Bewegung zu gelangen, während deren $y_1 \varphi_1 \psi_1$ ihre Werte unverändert behalten. Denn mit dieser Bewegung wäre ein Gleiten des Rades auf dem Fußboden verbunden, und wir hatten vorausgesetzt, daß dies ausgeschlossen sein soll. Damit das Rad bei der Bewegung aus einer Lage in eine unendlich benachbarte nur rollt und nicht gleitet, muß der Berührungspunkt in der Richtung der in die Fußbodenebene

fallenden Kreistangente fortschreiten, d. h. für eine virtuelle Bewegung muß zwischen den Änderungen der allgemeinen Koordinaten die Bedingungsgleichung

$$\delta y = \delta x \cdot \operatorname{tg} \varphi \tag{64}$$

erfüllt sein. Während also die vier Koordinaten $xy\varphi\psi$ selbst voneinander unabhängig sind, besteht zwischen den vier Änderungen, die sie bei einer virtuellen Bewegung erleiden können, die angegebene Bedingungsgleichung, womit sich die Zahl der Freiheitsgrade auf drei vermindert.

Der Grund für dieses besondere Verhalten des rollenden Rades ist darin zu erblicken, daß eine geometrische Bedingung, die das Gleiten unter allen Umständen zu verhüten vermöchte, überhaupt nicht besteht. Unter geeigneten Umständen wird vielmehr tatsächlich ein Gleiten eintreten, so daß das rollende Rad eigentlich vier Freiheitsgrade oder, wie man nachher sehen wird, sogar fünf besitzt. Unter den gewöhnlich beim Rollen des Rades bestehenden Verhältnissen tritt nur deshalb kein Gleiten ein, weil die Reibung ausreicht, um es zu verhüten. Will man sich nun darauf beschränken, die Bewegung nur für solche Fälle zu untersuchen, bei denen tatsächlich kein Gleiten zu erwarten ist, so ist es bequem, diese einschränkende Voraussetzung dadurch in den Ansatz eintreten zu lassen, daß man eine zwingende Bedingung, die von vornherein gar nicht vorhanden ist, fingiert und sie so, wie es geschehen ist, durch eine Differentialgleichung, der die virtuellen Koordinatenänderungen unterworfen werden sollen, zum Ausdruck bringt.

Wenn überhaupt keine Reibungen in Betracht kämen, hätte das rollende Rad, wie schon bemerkt, sogar fünf Freiheitsgrade, denn dann könnte es bei gleichbleibenden Werten der vier vorher genannten Koordinaten immer noch eine Drehung um seinen Mittelpunkt ausführen, bei der es über den Fußboden gleitet. Es müßte daher noch eine fünfte Koordinate zur Beschreibung seiner augenblicklichen Stellung eingeführt werden, etwa der Winkel, den irgend ein auf dem Rad festgelegter Radius mit dem nach dem Berührungspunkt gehenden

bildet. Der Bedingung, daß eine Bewegung, bei der sich nur diese fünfte Koordinate ändert, durch die Reibung verhindert wird, konnte aber bei unserem Ansatze schon dadurch genügend Rechnung getragen werden, daß wir die fünfte Koordinate überhaupt nicht einführten, da die übrigen bereits vollständig genügen, um alle in Aussicht zu nehmenden Bewegungen darzustellen.

Endlich muß noch hinzugefügt werden, daß es von Vorteil sein kann, beim rollenden Rad noch eine zweite nichtholonome Bedingung zu der früheren hinzuzunehmen, derart, daß dem Rade nur noch zwei Freiheitsgrade zugestanden werden. Im vierten Bande habe ich nämlich bereits bei der Besprechung des rollenden Rades (S. 255 der 3. Aufl.) darauf hingewiesen, daß man wegen der bohrenden Reibung, die sich der dort als „Wendebewegung" bezeichneten Drehung um die durch den Berührungspunkt zur Fußbodenebene gezogenen Normalen entgegensetzt, in vielen Fällen von vornherein annehmen darf, daß dieser Bewegungsanteil überhaupt ausgeschlossen ist. Man kann dies dann mit demselben Recht wie in dem früheren Falle durch eine den Koordinatenänderungen auferlegte Bedingungsgleichung zum Ausdruck bringen. Diese Gleichung lautet, wie man sich leicht überzeugen kann, im vorliegenden Falle

$$\cos\psi\,\delta x + a\cos\varphi\,\delta\varphi = 0, \tag{65}$$

und sie tritt zu der früheren hinzu.

Auch diese Gleichung ist, wie es dem Sachverhalt nach sein muß, eine nicht integrable Gleichung zwischen den Koordinatenzuwüchsen, und immer, wenn Bewegungsbeschränkungen in dieser Form ausgesprochen werden, spricht man von nichtholonomen Bedingungen.

Diese erfordern eine gesonderte Behandlung. Im folgenden werde ich aber, da der andere Fall, bei dem nur holonome Bedingungen vorkommen, der für die praktischen Anwendungen weitaus wichtigere ist, der Einfachheit der Darstellung wegen, wenn nichts anderes ausdrücklich gesagt ist, immer nur von diesem Falle reden. Es wird also vorausgesetzt, daß bei dem

Verbande, den wir betrachten, die Zahl der Freiheitsgrade mit der Zahl der allgemeinen Koordinaten, die zur Beschreibung genügen, übereinstimme.

§ 14. Die lebendige Kraft des Verbandes.

Für das Folgende brauchen wir einen auf die allgemeinen Koordinaten bezogenen Ausdrück für die lebendige Kraft des ganzen Verbandes, die sich aus der Summe der lebendigen Kräfte für alle einzelnen Glieder zusammensetzt, und den Ausdruck dafür wollen wir zunächst aufstellen. Dabei gehen wir aus von der die Definition der lebendigen Kraft aussprechenden Gleichung

$$L = \frac{1}{2} \Sigma m \mathfrak{v}^2, \tag{66}$$

in der m irgend ein Massenteilchen und $\mathfrak{v}$ seine Geschwindigkeit bedeutet. Die Summierung hat sich über alle Massen des ganzen Verbandes zu erstrecken.

Die augenblickliche Lage von m kann durch einen Radiusvektor $\mathfrak{r}$ beschrieben werden, der von einem beliebig gewählten festen Anfangspunkte nach m gezogen ist. In einer bestimmten Stellung des Verbandes, die man als seine Normalstellung ansieht, etwa in der Ausgangsstellung zur Zeit $t = 0$, sei $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0$. Durch die Angabe von $\mathfrak{r}_0$ wird dann das Massenteilchen näher bezeichnet, das man grade ins Auge gefaßt hat. In einer späteren Stellung ist $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{r}_0$ verschieden, und zwar ist $\mathfrak{r}$ eindeutig bestimmt durch die Angabe der allgemeinen Koordinaten q, die der späteren Stellung entsprechen. Mit Benutzung eines Funktionszeichens f drücken wir diese Abhängigkeit analytisch durch die Gleichung

$$\mathfrak{r} = f(\mathfrak{r}_0 q_1 q_2 \cdots q_n) \tag{67}$$

aus. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des betrachteten Massenteilchens erhalten wir aus $\mathfrak{r}$ durch eine Differentiation nach der Zeit. Hierbei ist zu beachten, daß $\mathfrak{r}_0$ konstant bleibt, während die q ihrer Bedeutung nach eindeutige und stetige Funktionen der Zeit sind. Wir finden daher

$$\mathfrak{v} = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_1} \cdot \frac{d q_1}{d t} + \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_2} \cdot \frac{d q_2}{d t} + \cdots + \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_n} \cdot \frac{d q_n}{d t}. \tag{68}$$

Die Differentialquotienten von $\mathfrak{r}$ nach den Koordinaten q sind Funktionen von $\mathfrak{r}_0$ und allen q und für jede Stellung des Verbandes eindeutig bestimmte Größen. Um sich über die Bedeutung des Differentialquotienten $\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_1}$ klar zu werden, braucht man sich dem Verbande nur eine virtuelle Verschiebung aus der augenblicklichen Stellung in eine Nachbarstellung erteilt zu denken, bei der sich q_1 um δq_1 ändert, während alle anderen q konstant sind. Das Verhältnis der Verschiebung $\delta \mathfrak{r}$, die das Massenteilchen hierbei erfährt, zu δq_1 gibt nach Größe und Richtung den Differentialquotienten $\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_1}$ an. Er wird daher im einzelnen Falle in anschaulicher Weise sofort angegeben werden können, ohne daß es nötig wäre, vorher die Funktion f in Gl. (67) durch eine analytische Formel auszudrücken.

Setzt man den Wert von $\mathfrak{v}$ in Gl. (66) ein, so erhält man für die lebendige Kraft

$$L = \frac{1}{2} \sum m \left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \mathfrak{r}_n} \cdot \dot{q}_n \right)^2. \tag{69}$$

Dabei ist von einer Schreibweise für die Differentialquotienten der q nach der Zeit, also für die Änderungsgeschwindigkeiten der Koordinaten Gebrauch gemacht, die schon von Newton herrührt und bei Betrachtungen dieser Art sehr bequem ist. Die Differentation nach der Zeit ist nämlich durch einen über die betreffende Größe gesetzten Punkt ausgedrückt.

Durch Ausführung der Quadrierung und Spaltung der Summe in ihre einzelnen Bestandteile geht Gl. (69) über in

$$\left. \begin{aligned} L = \tfrac{1}{2} \dot{q}_1^2 A_{11} + \tfrac{1}{2} \dot{q}_2^2 A_{22} + \cdots + \tfrac{1}{2} \dot{q}_n^2 A_{nn} \\ + \dot{q}_1 \dot{q}_2 A_{12} + \cdots + \dot{q}_1 \dot{q}_n A_{1n} + \cdots + \dot{q}_{n-1} \dot{q}_n A_{n-1,n} \end{aligned} \right\}, \tag{70}$$

wobei zur Abkürzung geschrieben wurde

$$A_{11} = \sum m \left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_1} \right)^2; \qquad A_{12} = \sum m \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_1} \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_2} \tag{71}$$

usf. Die lebendige Kraft ist hiermit als eine homogene Funktion zweiten Grades der Geschwindigkeiten $\dot{q}$, mit denen sich die Koordinaten ändern, dargestellt. Die Koeffizienten A dieser

Funktion haben im allgemeinen verschiedene Werte für jede andere Lage des ganzen Verbandes, sind also Funktionen der q; dagegen sind sie unabhängig von den Geschwindigkeiten, mit denen sich die Bewegungen vollziehen.

Wenn q_1 eine Länge ist, bedeutet $\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_1}\right)^2$ eine Verhältniszahl und A_{11} hat dann die Dimension einer Masse. Man bezeichnet diese Masse häufig als die auf die Koordinate q_1 reduzierte Masse des ganzen Verbandes. Von dieser Bezeichnung wird namentlich dann Gebrauch gemacht, wenn der Verband zwangläufig ist, so daß die Koordinate q_1 die augenblickliche Lage des Verbandes schon vollständig beschreibt. Es steht aber nichts im Wege, die Bezeichnung auch auf den allgemeinen Fall zu übertragen. Man darf sich durch die Wahl des Wortes nur nicht darüber täuschen lassen, daß A_{11} eine mit der Stellung des Verbandes veränderliche Größe ist (und zwar im allgemeinen auch bei einem zwangläufigen Verbande), während man sonst gewohnt ist, bei einer Größe, die als „Masse" bezeichnet ist, vorauszusetzen, daß sie sich während der Bewegung nicht ändert.

Bedeutet dagegen q_1 einen Winkel, so hat $\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_1}\right)^2$ die Dimension des Quadrats einer Länge und A_{11} die Dimension eines Trägheitsmoments. In diesem Falle kann A_{11} als das auf die Koordinate q_1 reduzierte Trägheitsmoment des Verbandes bezeichnet werden. Die vorhergehenden Bemerkungen über die Abhängigkeit von der Stellung des Verbandes treffen aber auch hier zu.

Sind q_1 und q_2 beide Längen, so hat auch A_{12} die Dimension einer Masse, die dann als die auf beide Koordinaten reduzierte Masse des ganzen Verbandes bezeichnet werden kann. Sind dagegen q_1 und q_2 beide Winkel, so läßt sich A_{12} als das auf diese Koordinaten reduzierte Zentrifugalmoment des Verbandes bezeichnen. Wenn q_1 eine Länge und q_2 ein Winkel ist (oder umgekehrt), läßt sich eine anschauliche Bezeichnung dieser Art für A_{12}, die an von früher her gewohnte Vorstellungen unmittelbar anknüpft, zwar nicht

angeben; doch ist es auch in diesem Falle nicht schwer, sich von der Bedeutung dieser Größe Rechenschaft zu geben. Wenn der Verband gegeben ist, wird man sie nach Vorschrift von Gl. (71) entweder genau durch Ausführung einer Integration über alle Massen oder zum mindestens näherungsweise durch eine Summierung endlicher, passend eingeschätzter Teile berechnen können. Auf jeden Fall sind alle A richtungslose Größen, die weiterhin als genügend bekannt angesehen werden dürfen.

§ 15. Reduktion der äußeren Kräfte auf die Koordinaten.

Im vorhergehenden Paragraphen haben wir bereits einen Weg eingeschlagen, der jetzt in derselben Richtung weiter zu verfolgen ist. Er besteht darin, alle für die Bewegung maßgebenden Größen auf die allgemeinen Koordinaten des Verbandes zu beziehen oder sie, wie man dafür sagt, auf die Koordinaten zu reduzieren. Nachdem dies mit den Massen bereits geschehen ist, führen wir diese Reduktion auch mit den Kräften aus, die von außen her auf die einzelnen Glieder des Verbandes ausgeübt werden. Es wird sich nämlich zeigen, daß es für die Bewegungen, die dadurch hervorgebracht werden, gleichgültig ist, wie sich die Kräfte im einzelnen verteilen. Jedes System von Kräften kann auch durch irgend ein anderes ersetzt werden, wenn nur beide bei der Reduktion auf die Koordinaten zu denselben Werten führen.

Der Beweis für diese Behauptung wird sich aus dem Folgenden ergeben. Doch kann schon jetzt darauf hingewiesen werden, daß der Ersatz einer Gruppe von Kräften, die an demselben starren Körper angreifen, durch eine andere Gruppe, etwa durch ein damit gleichwertiges Kraftkreuz, schon von früher her wohlbekannt ist. Zu diesen Ersatzmöglichkeiten treten dann noch andere, wenn es sich um die äußeren Kräfte an den verschiedenen Gliedern eines aus starren Körpern zusammengesetzten Verbandes handelt.

Zunächst gebe ich eine Anweisung dafür, wie die Kraftreduktion auszuführen ist. Die Rechtfertigung dafür wird

dadurch geliefert, daß sich später herausstellen wird, daß die Bewegung in der Tat nur von den nach dieser Vorschrift abgeleiteten reduzierten Kräften abhängig ist.

Ich betrachte irgend eine beliebig ausgewählte, mit den vorgeschriebenen geometrischen Bedingungen verträgliche, also irgend eine mögliche Stellung des Verbandes und außerdem noch eine ihr unendlich nahe benachbarte Stellung, bei der nur eine der allgemeinen Koordinaten, etwa q_i um δq_i geändert ist, während alle anderen Koordinaten unverändert geblieben sind. Da wir uns jetzt auf die Betrachtung von Verbänden mit holonomen Bedingungen beschränken wollten, gehört auch die Bewegung aus der Lage q_i in die Lage $q_i + \delta q_i$ bei konstanten Werten der übrigen q zu den möglichen Bewegungen oder sie bildet, wie man sagt, eine virtuelle Verschiebung. Durch die Anwendung des Zeichens δ in δq_i im Gegensatze zu den Änderungen dq_i, die q_i während der tatsächlich erfolgenden Bewegungen erfährt, soll ausdrücklich daran erinnert werden, daß es sich jetzt nur um virtuelle Verschiebungen und nicht um wirklich ausgeführte handelt.

Bei dieser virtuellen Verschiebung leisten die äußeren Kräfte Arbeiten, wenigstens jene, deren Angriffspunkte von der Verschiebung mit betroffen werden. Bezeichnen wir eine der äußeren Kräfte mit $\mathfrak{P}_m$ und den von einem festen Anfangspunkte nach ihrem Angriffspunkte gezogenen Radiusvektor mit $\mathfrak{r}_m$, so ist der Weg $\delta \mathfrak{r}_m$ des Angriffspunktes

$$\delta \mathfrak{r}_m = \frac{\partial \mathfrak{r}_m}{\partial q_i} \cdot \delta q_i$$

und die Arbeitsleistung von $\mathfrak{P}_m$ wird durch das innere Produkt

$$\mathfrak{P}_m \frac{\partial \mathfrak{r}_m}{\partial q_i} \delta q_i$$

angegeben. Für die Arbeitsleistung aller Kräfte, die an dem Verbande angreifen, erhält man daher einen Ausdruck von der Form

$$\delta q_i \cdot \sum \mathfrak{P} \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_i}.$$

Wenn der Verband mit allen an ihm angreifenden Kräften gegeben ist, wird es nicht schwer fallen, den Summenausdruck

entweder genau oder zum mindesten angenähert zu berechnen. Wir schreiben dafür F_i, setzen also

$$F_i = \sum \mathfrak{P} \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_i} \tag{72}$$

und nennen F_i die auf die Koordinate q_i reduzierte äußere Kraft.

Sie ist unter allen Umständen eine richtungslose Größe, da sie aus einer Summe von inneren Produkten gebildet wird. Wenn die Koordinate q_i eine Länge ist, bildet $\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_i}$ eine mit einem Richtungsfaktor behaftete Verhältniszahl und F_i hat dann die Dimension einer Kraft. In diesem Falle ist die Bezeichnung von F_i als einer „reduzierten Kraft" ohne weiteres gerechtfertigt. Man gebraucht diese Bezeichnung im übertragenen Sinne aber auch in anderen Fällen. Ist q_i ein Winkel, so hat F_i die Dimension eines statischen Moments; wir könnten dann sagen, daß F_i ein auf den Winkel q_i reduziertes Kräftepaar angibt. Aber es ist üblich, auch in diesem Falle von einer reduzierten Kraft zu reden, so daß also darunter allgemein jene Größe zu verstehen ist, die durch Multiplikation mit δq_i eine Arbeitsleistung liefert, die gleich der von den tatsächlich wirkenden Kräften geleisteten Arbeit ist.

Wenn sich die Kräfte $\mathfrak{P}$ von einem Potentiale ableiten lassen, wird ihre Arbeit zu Null für jede beliebige Bewegung des Verbandes, die wieder zur Ausgangsstellung zurückführt. Jeder Stellung entspricht dann ein gewisser Arbeitsbetrag, der von den Kräften $\mathfrak{P}$ bei einem auf beliebigem Wege erfolgenden Übergange aus einer Normalstellung in die betreffende Stellung geleistet wird. Den negativen Wert dieses Arbeitsbetrages bezeichnen wir mit dem Buchstaben V und nennen ihn in Übereinstimmung mit den Betrachtungen über das Potential eines Kraftfeldes für einen einzelnen materiellen Punkt, die wir jetzt sinngemäß auf den ganzen Verband übertragen wollen, das Potential der äußeren Kräfte. Dieses Potential ist eine Funktion der allgemeinen Koordinaten, durch die die Stellung des Verbandes beschrieben wird.

Nach dieser Definition von V kann die Arbeit der äußeren Kräfte für eine virtuelle Verschiebung, bei der nur q_i um δq_i geändert wird, auch gleich

$$- \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i$$

gesetzt werden. Für die reduzierte Kraft F_i folgt hiermit der für manche Fälle bequemere Ausdruck

$$F_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i}. \tag{73}$$

Indessen kann F_i auch nach dem in Gl. (72) gegebenen allgemein gültigen Ausdrucke bei einem bestimmten Beispiele gewöhnlich sehr einfach ermittelt werden.

§ 16. Die inneren Kräfte des Verbandes.

Die inneren Kräfte, die zwischen den verschiedenen Gliedern des Verbandes auftreten, ebenso auch die inneren Kräfte zwischen den verschiedenen Teilen desselben Gliedes sind bei der Stellung der Aufgabe, deren Lösung wir suchen, nicht näher bekannt. Doch muß man, um die Aufgabe zu einer bestimmten zu machen, auch über die Wirkungsgesetze, denen die inneren Kräfte unterliegen, einiges bereits wissen oder als gültig annehmen.

Es kommt dabei nur darauf an, ob und welche Arbeiten die inneren Kräfte bei einer virtuellen Verschiebung leisten. In den meisten Fällen wird man, wenn nicht genau, so doch mit genügender Annäherung voraussetzen dürfen, daß die Summe der Arbeiten der inneren Kräfte für jede virtuelle Verschiebung zu Null wird. Das trifft z. B., wie schon von früher her bekannt ist, ohne weiteres zu von allen jenen inneren Kräften, die zwischen den verschiedenen Teilen desselben starren Körpers übertragen werden. Es gilt ferner auch von den an den Berührungsstellen verschiedener Körper übertragenen Kräften, falls diese überall senkrecht zur Berührungsfläche stehen, also wenn keine Reibungen vorkommen oder wenn es genügt, die tatsächlich auftretenden Reibungen zu vernachlässigen. Wenn aber Reibungen vorkommen und ein Gleiten der Körper an der Berührungsfläche stattfindet, leisten die

Reibungen eine Arbeit. Wenn diese berücksichtigt werden muß, wird die Aufgabe erheblich erschwert.

Ferner können auch' die inneren Kräfte zwischen verschiedenen Teilen desselben Körpers eine Arbeit leisten und zwar dann, wenn der Körper eine Formänderung erfährt. Auf die Möglichkeit einer solchen Formänderung ist schon bei der Feststellung der Freiheitsgrade und der allgemeinen Koordinaten, die zur Beschreibung einer Stellung des Verbandes benutzt werden sollen, zu achten. Gehört z. B. zu dem Verbande eine Welle, auf deren elastische Verdrehung während der Bewegung der Maschine geachtet werden muß, so kann als allgemeine Koordinate der Verdrehungswinkel der Welle mit eingeführt werden, und die elastischen Kräfte in der Welle leisten dann nur für solche virtuelle Verschiebungen eine Arbeit, bei denen sich der Verdrehungswinkel ändert. Die virtuelle Arbeit dieser Kräfte ist gleich dem Produkte aus dem unendlich kleinen Zuwachs des Verdrehungswinkels und dem Verdrehungsmomente zu setzen. Hiermit ist auch sofort eine Reduktion der elastischen Kräfte auf die zugehörige allgemeine Koordinate in derselben Weise wie früher bei den äußeren Kräften erzielt.

In erster Linie wollen wir aber bei den weiteren Betrachtungen voraussetzen, daß die Summe der Arbeitsleistungen aller inneren Kräfte für jede virtuelle Verschiebung gleich Null gesetzt werden kann. Es wird sich nachher von selbst herausstellen, wie die Betrachtung zu vervollständigen ist, wenn auch die inneren Kräfte Arbeiten leisten.

§ 17. Die Gleichungen von Lagrange.

Nach allen diesen Vorbereitungen können wir jetzt zu der von Langrange angegebenen Lösung der im Eingange dieses Abschnitts gestellten Aufgabe übergehen. Um diese Lösung zu finden, stützen wir uns auf das Prinzip von d'Alembert.

Wir betrachten also den Verband in der Lage, die er bei der von ihm wirklich ausgeführten Bewegung zur Zeit t ein-

nimmt, und bringen an jedem Massenteilchen außer den Kräften, die darauf tatsächlich einwirken, noch eine Trägheitskraft

$$\mathfrak{H} = -m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$$

an. Die darin vorkommende Beschleunigung ist jene, die dem Massenteilchen zur Zeit t wirklich zukommt. Denken wir uns hierauf den Verband in der augenblicklichen Stellung zur Ruhe gebracht, so bleibt er unter dem Einflusse aller an ihm angreifenden Kräfte auch weiterhin in Ruhe. Um die hiernach zwischen den Kräften bestehenden Gleichgewichtsbedingungen in Form von Gleichungen aussprechen zu können, wenden wir das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten darauf an. Für jede virtuelle Bewegung muß die Summe der Arbeiten aller Kräfte gleich Null sein. Zunächst betrachten wir eine virtuelle Bewegung, bei der nur q_i um δq_i geändert wird, während alle anderen q konstant bleiben. Die Arbeit der äußeren Kräfte für diese virtuelle Bewegung ist schon zu $F_i \delta q_i$ festgestellt. Die Trägheitskraft $\mathfrak{H}$ an dem Massenteilchen m leistet eine Arbeit

$$\mathfrak{H}\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_i}\delta q_i .$$

Unter der Voraussetzung, daß die Summe der Arbeiten aller inneren Kräfte gleich Null gesetzt werden kann, lautet demnach die Gleichgewichtsbedingung

$$F_i \delta q_i + \delta q_i \sum \mathfrak{H}\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_i} = 0,$$

wobei sich die Summierung über alle Massenteilchen zu erstrecken hat. Streichen wir den gemeinschaftlichen Faktor δq_i und setzen für $\mathfrak{H}$ seinen Wert ein, so geht die Gleichung über in

$$F_i = \sum m \frac{d\mathfrak{v}}{dt}\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_i}. \tag{74}$$

Diesen Ausdruck formen wir noch etwas um, indem wir

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\mathfrak{v}\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_i}\right) - \mathfrak{v}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_i}\right)$$

setzen, womit die vorige Gleichung übergeht in

$$F_i = \frac{d}{dt}\sum m\mathfrak{v}\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_i} - \sum m\mathfrak{v}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_i}\right). \tag{75}$$

Die beiden Summen, die in dieser Gleichung auftreten, lassen sich aber als Differentialquotienten der lebendigen Kraft L auffassen, die durch Gl. (69) als Funktion der q und der $\dot{q}$ dargestellt wurde. Differentiiert man nämlich Gl. (69) partiell nach $\dot{q}_i$, so erhält man

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum m \left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_n} \cdot \dot{q}_n \right) \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_i},$$

und da der Klammerwert nach Gl. (68) die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Massenteilchens m angibt, wird daraus

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum m \mathfrak{v} \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_i} \cdot \tag{76}$$

Differentiiert man dagegen Gl. (69) partiell nach q_i, so erhält man, wenn dabei abermals auf Gl. (68) geachtet wird,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum m \mathfrak{v} \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial q_1 \, \partial q_i} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial q_2 \, \partial q_i} \cdot \dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial q_n \, \partial q_i} \dot{q}_n \right) \cdot$$

Für den hier noch auftretenden Klammerwert kann man aber schreiben

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_i} \right),$$

denn die Ausführung der Differentiation nach den gewöhnlichen Differentiationsregeln liefert in der Tat wieder den in der Klammer stehenden Ausdruck, wenn man beachtet, daß $\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_i}$ ebenso wie $\mathfrak{r}$ eine Funktion aller q ist und daß die Differentialquotienten der q nach t durch die $\dot{q}$ angegeben werden. Hiernach erhält man

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum m \mathfrak{v} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_i} \right) \cdot \tag{77}$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (76) und (77) läßt sich daher Gl. (75) schreiben

$$F_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \cdot \tag{78}$$

Das ist eine der Lagrangeschen Gleichungen, und für jede andere allgemeine Koordinate läßt sich eine nach demselben Muster anschreiben. Man erhält, wenn dies geschieht, ebenso viele Differentialgleichungen zwischen den Koordinaten q und ihren

Differentialquotienten, als Freiheitsgrade vorhanden sind, d. h. ebenso viele Gleichungen als Unbekannte.

Hiermit ist die Aufgabe, die wir uns gestellt haben, nach einer allgemeinen Methode zu suchen, die uns die Differentialgleichungen der Bewegung des Verbandes aufzustellen gestattet, zunächst wenigstens für den Fall gelöst, daß nur holonome Bedingungen vorkommen und daß die inneren Kräfte bei der Bewegung keine Arbeit leisten.

Trifft die zuletzt genannte Voraussetzung nicht ein, so ist natürlich in die das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten aussprechende Gleichung noch ein weiteres Glied aufzunehmen, das die Arbeit der inneren Kräfte angibt. Dieses Glied wird sich auf die Form

$$J_i \delta q_i$$

bringen lassen. An Stelle von Gl. (74) tritt dann

$$F_i = \sum m \frac{d\mathfrak{v}}{dt} \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_i} - J_i$$

und an Stelle von Gl. (78) daher

$$F_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} - J_i. \tag{79}$$

Die Größe J_i, die je nach den besonderen Umständen des einzelnen Falles festgestellt werden muß, kann als die auf die Koordinate q_i reduzierte innere Kraft bezeichnet werden.

§ 18. Einfache Anwendungsbeispiele.

Man macht sich mit dem Verfahren von Lagrange am besten vertraut, indem man es zunächst einmal auf einige ganz einfache Fälle anwendet, für die man die Lösung auch auf anderem Wege leicht finden kann, wenn sie nicht überhaupt schon von früher her bekannt ist.

In diesem Sinne, nicht als Beispiel für die praktische Verwendbarkeit der Gleichungen von Lagrange, sondern nur zur Erläuterung und zur Aufweisung ihres Zusammenhanges mit den einfachsten früheren Lehren, betrachte ich zuerst die Bewegung eines einzelnen materiellen Punktes unter dem Einflusse einer gegebenen Kraft mit den Komponenten XYZ in

den Richtungen der Koordinatenachsen. Der freie materielle Punkt kann als ein dreiläufiger Verband betrachtet werden, dessen „allgemeine Koordinaten" hier durch die rechtwinkligen Koordinaten xyz gebildet werden. Für die lebendige Kraft hat man den Ausdruck

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \tag{80}$$

der hier von den Koordinaten xyz unabhängig ist. Wenden wir Gl. (78) auf $q_i = x$ an, so ist X an Stelle von F_i zu setzen und die Gleichung geht über in

$$X = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\frac{d^2x}{dt^2},$$

d. h. die Lagrangesche Gleichung fällt in diesem Falle einfach mit der dynamischen Grundgleichung zusammen.

Als zweites Beispiel betrachte ich die Bewegung eines materiellen Punktes, der genötigt ist, auf einer Fläche zu bleiben. Als allgemeine Koordinaten betrachte ich hier x und y, wobei jedoch hinzuzufügen ist, daß die Wahl auch in anderer Weise und namentlich in gewissen Fällen, von denen ich einen nachher noch besonders besprechen werde, viel besser getroffen werden kann. Die dritte Koordinate z ist abhängig von x und y, und die Abhängigkeit wird durch die Gleichung der Fläche

$$z = f(xy) \tag{81}$$

ausgesprochen. Hiermit wird

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt},$$

und für die lebendige Kraft erhalte ich jetzt an Stelle von Gl. (80) den Ausdruck

$$L = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\dot{y}\right)^2\right). \tag{82}$$

Auch hier wende ich die Lagrangesche Gleichung (78) auf den Fall an, daß $q_i = x$ ist. Wir müssen uns zuvor überlegen, was jetzt unter F_i zu verstehen ist. Dazu erteile ich dem materiellen Punkte eine virtuelle Bewegung, bei der sich nur x um δx ändert, während die andere allgemeine Koordi-

nate y konstant bleibt. Dagegen ändert sich z, das hier keine allgemeine Koordinate vorstellt, notwendig mit x, und zwar wird nach Gl. (81)

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\,\delta x.$$

Bezeichnen wir die drei rechtwinkligen Komponenten der äußeren Kraft wieder mit XYZ, so ist demnach die von dieser Kraft bei der virtuellen Verschiebung δx geleistete Arbeit gleich

$$X\delta x + Z\frac{\partial z}{\partial x}\,\delta x,$$

und für F_i in Gl. (78) haben wir zu setzen

$$F_i = X + Z\frac{\partial z}{\partial x}\,.$$

Ferner tritt an Stelle von $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ hier nach Gl. (82)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\left(\dot{x} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\dot{x} + \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\,\dot{y}\right)$$

und endlich an Stelle von $\dfrac{\partial L}{\partial q_i}$ ebenfalls nach Gl. (82)

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,\dot{x} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\dot{y}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\dot{x} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,\dot{y}\right).$$

Setzen wir alle diese Werte in Gl. (78) ein, so erhalten wir eine der beiden Differentialgleichungen, denen x und y genügen müssen. Die andere erhalten wir durch Vertauschen der Buchstaben x und y miteinander.

Ich sehe davon ab, diese Gleichungen noch ausführlicher anzuschreiben, da sie ziemlich lang ausfallen und eine Integration für eine beliebige Funktion z in Gl. (81) doch nicht ausführbar ist. Dagegen zeige ich, wie sich die Lösung vereinfacht, wenn es sich um die Bewegung eines Fadenpendels handelt, die Fläche, auf der sich der materielle Punkt bewegt, also eine Kugelfläche ist, und wenn man die allgemeinen Koordinaten, die zur Beschreibung der augenblicklichen Lage dienen, in einer passenden Weise wählt.

Mit φ sei der Winkel bezeichnet, den die Fadenrichtung zur Zeit t mit der Lotrichtung einschließt, und mit ψ der

Winkel, den die durch den Faden gelegte Lotebene mit einer beliebig gewählten Lotebene, etwa mit der der Stellung zur Zeit $t = 0$ entsprechenden, bildet. Wenn l die Fadenlänge bedeutet, läßt sich die Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ in zwei zueinander rechtwinklige Komponenten $l\dot{\varphi}$ und $l \sin\varphi \cdot \dot{\psi}$ zerlegen. An Stelle von Gl. (82) erhält man daher in diesem Falle den einfacheren Ausdruck

$$L = \tfrac{1}{2} m l^2 (\dot{\varphi}^2 + \sin^2\varphi \cdot \dot{\psi}^2). \tag{83}$$

Um die Gleichung von Lagrange für die Koordinate φ zu bilden, beachten wir, daß sich der Angriffspunkt des Gewichtes mg bei einer virtuellen Verschiebung $\delta\varphi$ um den Betrag $l\delta\varphi \sin\varphi$ hebt; daher ist

$$F_\varphi = -\, mgl \sin\varphi$$

zu setzen. Ferner wird

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} \quad \text{und daher} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = ml^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = ml^2 \sin\varphi \cos\varphi \dot{\psi}^2.$$

Die Gleichung von Lagrange für die Koordinate φ lautet daher, wenn man die in allen Gliedern vorkommenden Faktoren ml streicht,

$$-\frac{g}{l}\sin\varphi = \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2. \tag{84}$$

Bei einer virtuellen Verschiebung $\delta\psi$ leistet die einzige äußere Kraft mg keine Arbeit; daher ist

$$F_\psi = 0.$$

Ferner wird

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = ml^2 \sin^2\varphi \frac{d\psi}{dt}; \quad \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0.$$

Die Gleichung von Lagrange für die Koordinate ψ wird daher

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\sin^2\varphi \frac{d\psi}{dt}\right),$$

wofür man auch, wenn C eine Integrationskonstante bedeutet,

$$\sin^2\varphi \frac{d\psi}{dt} = C \tag{85}$$

schreiben kann. — Hiermit ist das gesteckte Ziel bereits erreicht, denn die Integration der Differentialgleichungen (84) und (85) gehört nicht mehr zu der Aufgabe, die uns hier beschäftigt. Man sieht indessen, daß sich die Variable ψ aus den beiden Gleichungen sofort eliminieren läßt, so daß φ der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi + C^2\frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi} \tag{86}$$

genügen muß. Multipliziert man beide Seiten mit $\frac{d\varphi}{dt}$, so läßt sich ohne weiteres eine Integration nach t ausführen, womit man

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{g}{l}\cos\varphi - \frac{C^2}{2\sin^2\varphi} + C_1 \tag{87}$$

erhält. Abgesehen davon, daß hier die Bezeichnungen anders gewählt sind und die Integrationskonstante C_1 noch nicht an die Grenzbedingungen angepaßt ist, stimmt diese Gleichung genau mit der früher auf ganz anderem Wege abgeleiteten Differentialgleichung (39) S. 52 für die Bewegung des sphärischen Pendels überein.

Ein besonderes einfaches Beispiel für das Verfahren von Lagrange bildet das physische Pendel, das eine zwangläufige Schwingung um eine horizontale Aufhängeachse ausführt. Bezeichnen wir den Winkel, den das Pendel zur Zeit t mit der Gleichgewichtslage bildet, wieder mit φ und das Trägheitsmoment für die Aufhängeachse mit θ, so wird

$$L = \tfrac{1}{2}\theta\dot{\varphi}^2. \tag{88}$$

Bei einer virtuellen Verschiebung $\delta\varphi$ hebt sich der Schwerpunkt um $s\sin\varphi\,\delta\varphi$, wenn s den Schwerpunktsabstand bedeutet. Daher ist

$$F_\varphi = -mgs\sin\varphi.$$

Ferner erhält man für die in der Gleichung von Lagrange vorkommenden Differentialquotienten

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = \theta\dot{\varphi}; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) = \theta\frac{d^2\varphi}{dt^2}; \qquad \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0,$$

womit die Bewegungsgleichung

$$\theta\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgs\sin\varphi$$

gefunden wird, die natürlich auch auf viel einfacherem Wege abgeleitet werden kann und bereits von früher her bekannt ist.

Auch die Bewegungsgleichungen für einen starren Körper, auf den keine Kräfte wirken und dessen Schwerpunkt ruht, lassen sich nach demselben Verfahren ableiten, indem man drei geeignete Winkel zur Beschreibung der augenblicklichen Lage als allgemeine Koordinaten einführt, die Winkelgeschwindigkeitskomponenten um die drei Hauptträgheitsachsen in den Differentialquotienten dieser Koordinaten nach der Zeit ausdrückt, hierauf die lebendige Kraft bildet und die in Gl. (78) vorgeschriebenen Differentiationen daran vornimmt. Die drei F sind hier alle gleich Null. Da die Ausführung der Rechnung ziemlich umständlich ist und die Bewegung des kräftefreien Kreisels schon im vierten Bande mit einfacheren Hilfsmitteln ausführlich genug besprochen wurde, will ich mich aber nicht damit aufhalten, die Formeln anzuschreiben.

Zur weiteren Einübung des Verfahrens wird es nützlicher sein, wenn man die in den nachfolgenden Paragraphen behandelten lehrreichen Beispiele gründlich durcharbeitet.

§ 19. Das Doppelpendel.

Ein zweiläufiger Verband bestehe aus einem physischen Pendel A (Abb. 7), das sich gegen ein festes Gestell um die zur Zeichenebene senkrechte Achse α ohne merkliche Reibung zu drehen vermag, und aus einem zweiten starren Körper B, der daran drehbar aufgehängt ist. Die Aufhängeachse β geht parallel zu α und projiziert sich daher in Abb. 7 ebenfalls als Punkt. Von äußeren Kräften möge zunächst nur das Gewicht beider Körper in Betracht kommen. Unsere erste Aufgabe erblicken wir darin, die Differentialgleichungen für die Bewegung aufzustellen, die

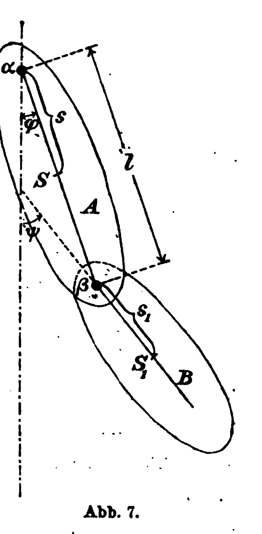


Abb. 7.

der Verband unter dem Einflusse dieser Kräfte ausführt, wenn der Anfangszustand beliebig gegeben ist. In den folgenden Paragraphen wird sich daran eine genauere Untersuchung der durch diese Gleichungen beschriebenen Bewegungen knüpfen.

Der kürzeren Ausdrucksweise wegen wollen wir den Verband als ein Doppelpendel bezeichnen. Mit Vorrichtungen von dieser Art hat man öfters zu tun. Eines der bekanntesten Beispiele dafür bildet eine Glocke mit dem an ihr aufgehängten Klöppel. Auf diesen besonderen Fall werde ich später noch zurückkommen. Einstweilen kommt es aber auf die Gestalt und die verhältnismäßige Größe beider Körper nicht an; wir wollen vielmehr die für alle Vorrichtungen der gleichen Art allgemein gültigen Bewegungsgleichungen aufstellen. Nur insofern möge, um die Untersuchung nicht weitschweifiger zu machen, als es nötig erscheint, eine einschränkende Voraussetzung gemacht werden, als der Schwerpunkt S von A auf der Verbindungslinie der beiden Gelenkpunkte α und β liegen soll. Dagegen ist es nicht nötig, daß S zwischen α und β liegt, wie in der Abbildung angenommen wurde, sondern der Schwerpunktsabstand s kann auch größer sein als der Abstand l zwischen beiden Gelenken. Dies wird insbesondere zutreffen, wenn es sich um eine Glocke und ihren Klöppel handelt. Der in Abb. 7 mit S_1 bezeichnete Punkt soll den Schwerpunkt des zweiten Pendels B bedeuten.

Als allgemeine Koordinaten wählen wir die in Abb. 7 mit φ und ψ bezeichneten Winkel, die von den Geraden αS und βS_1 mit der Lotrichtung gebildet werden. Als positiv sollen diese Winkel gezählt werden, wenn die Drehung gegen die lotrechte Gleichgewichtslage in der aus der Abbildung zu entnehmenden Richtung erfolgt ist. Durch die Angabe von φ und ψ samt Vorzeichen wird die augenblickliche Stellung des Verbandes offenbar vollständig beschrieben. Ebenso bedarf es keiner weiteren Erörterung, daß es sich hier nur um holonome Bedingungen handelt.

Die lebendige Kraft des ganzen Verbandes ist gleich der Summe der lebendigen Kräfte von A und B. Für die lebendige

Kraft von A können wir den schon in Gl. (88) für das einfache physische Pendel aufgestellten Ausdruck benutzen. Die lebendige Kraft von B können wir in zwei Teile zerlegen, von denen der eine die von der Schwerpunktsgeschwindigkeit v abhängige Translationsenergie und der andere die von der Drehung um die Schwerpunktsachse herrührende Rotationsenergie darstellt. Wir machen dabei von einer Erörterung Gebrauch, die schon in Band I, § 31, S. 195 der 3. Aufl. über die lebendige Kraft eines starren Körpes angestellt wurde.

Für die Rotationsenergie von B haben wir den Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}\,\theta_0\dot{\psi}^2,$$

wenn mit θ_0 das auf die Schwerpunktsachse bezogene Trägheitsmoment von B bezeichnet wird.

Um die Schwerpunktsgeschwindigkeit v von B zu berechnen, beachten wir, daß die Bewegung von B auch in eine Translation mit der dem Punkte β zukommenden Geschwindigkeit und in eine Rotation um den Punkt β zerlegt werden kann. Bei der Translation hat jeder Punkt von B und daher auch S_1 eine Geschwindigkeit von der Größe $l\dot{\varphi}$, die senkrecht zur Verbindungslinie $\alpha\beta$ beider Gelenke gerichtet ist. Dazu kommt die von der Rotation um β herrührende Geschwindigkeit von S_1, die senkrecht zur Strecke βS_1 gerichtet ist und die Größe $s_1\dot{\psi}$ hat. Aus beiden Anteilen findet man die tatsächliche Geschwindigkeit von S_1 durch eine geometrische Summierung.

In Abb. 8 ist das Dreieck gezeichnet, durch das diese Summierung ausgeführt wird. Auf die Richtung der Schwerpunktsgeschwindigkeit kommt es jetzt nicht an, da wir zur Bildung des Ausdrucks für die lebendige Kraft nur den Wert von v^2 nötig haben. Hierfür erhalten wir aus dem Dreiecke nach dem Cosinussatze

Abb. 8.

$$v^2 = l^2\dot{\varphi}^2 + s_1{}^2\dot{\psi}^2 + 2ls_1\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\psi - \varphi).$$

Im ganzen finden wir daher für die lebendige Kraft des Verbandes, wenn die Masse von B mit m_1 bezeichnet wird,

$$L = \frac{1}{2}\,\theta\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\,\theta_0\dot{\psi}^2 + \frac{m_1}{2}\left(l^2\dot{\varphi}^2 + s_1{}^2\dot{\psi}^2 + 2ls_1\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\psi - \varphi)\right).$$

Wir können diesen Ausdruck noch ein wenig vereinfachen, wenn wir für das Trägheitsmoment von B in bezug auf die Aufhängeachse β die Bezeichnung θ_1 einführen. Dafür hat man nämlich

$$\theta_1 = \theta_0 + m_1 s_1^2,$$

und der Ausdruck für die lebendige Kraft geht hiermit über in

$$L = \frac{1}{2}\theta\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\theta_1\dot{\psi}^2 + \frac{m_1}{2}(l^2\dot{\varphi}^2 + 2ls_1\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\psi - \varphi)). \qquad (89)$$

Wir bilden davon sofort die in den Gleichungen von Lagrange vorkommenden Differentialquotienten und erhalten dafür der Reihe nach

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \theta\dot{\varphi} + m_1 l^2\dot{\varphi} + m_1 l s_1 \dot{\psi}\cos(\psi - \varphi)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \theta\frac{d^2\varphi}{dt^2} + m_1 l^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} + m_1 l s_1\frac{d^2\psi}{dt^2}\cos(\psi - \varphi)$$
$$- m_1 l s_1 \frac{d\psi}{dt}\sin(\psi - \varphi)\left(\frac{d\psi}{dt} - \frac{d\varphi}{dt}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = m_1 l s_1 \frac{d\psi}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\sin(\psi - \varphi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \theta_1\dot{\psi} + m_1 l s_1\dot{\varphi}\cos(\psi - \varphi)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}\right) = \theta_1\frac{d^2\psi}{dt^2} + m_1 l s_1\frac{d^2\varphi}{dt^2}\cos(\psi - \varphi)$$
$$- m_1 l s_1 \frac{d\varphi}{dt}\sin(\psi - \varphi)\left(\frac{d\psi}{dt} - \frac{d\varphi}{dt}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = - m_1 l s_1 \frac{d\varphi}{dt}\frac{d\psi}{dt}\sin(\psi - \varphi).$$

Hierauf müssen wir die auf die Koordinaten φ und ψ reduzierten äußeren Kräfte F_φ und F_ψ aufstellen. Bei einer virtuellen Verschiebung, die ψ um $\delta\psi$ vergrößert und φ konstant läßt, leistet nur das Gewicht $m_1 g$ des Körpers B eine Arbeit, indem sich der Schwerpunkt S_1 um den Betrag $s_1\delta\psi\sin\psi$ hebt. Hiernach ist

$$F_\psi = - m_1 g s_1 \sin\psi.$$

Vergrößert sich dagegen φ um $\delta\varphi$, während ψ konstant bleibt, so erfahren die Schwerpunkte beider Körper eine Ver-

schiebung nach oben. Hierbei ist zu beachten, daß sich bei dieser virtuellen Verschiebung das zweite Pendel B nicht etwa in relativer Ruhe zum ersten Pendel A befindet, denn wenn dies der Fall wäre, würde sich auch der Winkel ψ ändern. Vielmehr entspricht der virtuellen Verschiebung $\delta\varphi$ eine Translation des zweiten Pendels, bei der sich der Schwerpunkt um ebensoviel hebt wie das Gelenk β. Bezeichnen wir die Masse des ersten Pendels mit m, so erhalten wir demnach

$$F_\varphi = - mgs \sin\varphi - m_1 gl \sin\varphi .$$

Jetzt ist alles so weit vorbereitet, daß wir die gefundenen Ausdrücke ohne weiteres in die Gleichungen von Lagrange einsetzen können. Diese lauten mit den hier gebrauchten Bezeichnungen

$$F_\varphi = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi}$$

$$F_\psi = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\psi}\right) - \frac{\partial L}{\partial \psi},$$

und nach Einsetzen der gefundenen Werte gehen sie über in

$$\left.\begin{aligned} -\sin\varphi \cdot g(ms + m_1 l) &= (\theta + m_1 l^2)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d^2\psi}{dt^2} m_1 l s_1 \cos(\psi - \varphi) \\ &\quad - \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 m_1 l s_1 \sin(\psi - \varphi) \\ -\sin\psi \cdot g m_1 s_1 &= \theta_1 \frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{d^2\varphi}{dt^2} m_1 l s_1 \cos(\psi - \varphi) \\ &\quad + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 m_1 l s_1 \sin(\psi - \varphi) \end{aligned}\right\} \quad (90)$$

Hiermit sind die Bewegungsgleichungen aufgestellt und die Aufgabe ist damit so weit, als es sich nur um ein Beispiel für die Anwendung des Verfahrens von Lagrange handelt, bereits als gelöst zu betrachten. Aber damit wollen wir uns jetzt nicht begnügen, sondern zusehen, welche weiteren Schlüsse sich aus diesen Gleichungen ziehen lassen.

Um die Bewegung vollständig angeben zu können, worin doch das letzte Ziel jeder praktischen Anwendung solcher Betrachtungen besteht, müßten wir imstande sein, die aufgestellten Differentialgleichungen zu integrieren. Das ist aber

nicht allgemein möglich und man muß hinzufügen, daß die Differentialgleichungen für die Bewegung eines mehrläufigen Verbandes nicht nur in diesem Falle, sondern in der Regel derart verwickelt sind, daß der Versuch, sie allgemein zu integrieren, ganz aussichtslos erscheint. Hierdurch wird aber nicht gehindert, daß man über viele Fragen, die von besonderer Wichtigkeit sind, hinreichenden Aufschluß aus den Differentialgleichungen erhalten kann, auch ohne daß diese zuvor streng integriert werden müßten.

Das wichtigste Hilfsmittel, um zu einer für den praktischen Gebrauch meist vollständig ausreichenden Näherungslösung zu gelangen, besteht darin, bei periodischen Bewegungen, wie sie hier in Frage kommen, vorauszusetzen, daß die Schwingungsausschläge als klein betrachtet werden könnten. Man kann dann eine Reihe von Gliedern vernachlässigen und dadurch die Gleichungen so vereinfachen, daß die Integration möglich wird. Etwas bedenklich ist es ja freilich, wenn die auf diese Weise gefundene Näherungslösung später, wie es häufig geschieht, auch auf Fälle angewendet wird, in denen die Schwingungsausschläge keineswegs mehr als klein anzusehen sind. Aber im ganzen scheint doch die Erfahrung zu bestätigen, daß der hiermit begangene Fehler gewöhnlich in erträglichen Grenzen bleibt. Nötig ist es aber freilich, daß man bei Anwendungen dieser Art in Erinnerung behält, daß man dabei einen Fehler begeht, der unter Umständen auch einmal sehr beträchtlich werden könnte. Ergänzende Betrachtungen von anderer Art, die hierüber Aufschluß zu geben vermögen, sind daher meist nicht zu entbehren

Wir wollen jetzt sehen, wie sich die Gleichungen (90) vereinfachen, wenn die Schwingungsausschläge als sehr klein vorausgesetzt werden.

§ 20. Kleine Schwingungen des Doppelpendels.

Wenn die Winkel φ und ψ als kleine Größen anzusehen sind, gilt dies auch von ihren Differentialquotienten nach der Zeit. Denn wir dürfen von vornherein aus der Erfahrung als

bekannt ansehen, daß sich die Schwingungsbewegungen des Doppelpendels unter den angegebenen Umständen in endlichen Zeiten abspielen, so daß die Schwingungsdauern nicht etwa selbst klein von derselben Ordnung wie die φ und ψ werden können.

Hieraus folgt zunächst, daß in beiden Gleichungen (90) das letzte Glied auf der rechten Seite, das von der dritten Ordnung klein ist, gegen die nur von der ersten Ordnung kleinen übrigen Glieder vernachlässigt werden darf. Mit demselben Grade der Genauigkeit ist es ferner zulässig, den auf den linken Seiten der Gleichungen vorkommenden Sinus eines kleinen Winkels durch den (natürlich in Bogenmaß auszumessenden) Winkel selbst zu ersetzen. Endlich darf, ebenfalls unter Vernachlässigung einer von der dritten Ordnung kleinen Größe, der bei den Gliedern auf der rechten Seite als Faktor vorkommende Cosinus des Winkels $\psi - \varphi$ gleich Eins gesetzt werden.

Für kleine Schwingungen lassen sich daher die Bewegungsgleichungen in der einfachen Form

$$\left.\begin{aligned} a\varphi + b\frac{d^2\varphi}{dt^2} + c\frac{d^2\psi}{dt^2} = 0 \\ d\psi + e\frac{d^2\psi}{dt^2} + c\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{91}$$

anschreiben, wenn man für die darin vorkommenden konstanten Koeffizienten die Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} a &= g(ms + m_1 l) \\ b &= \theta + m_1 l^2 \\ c &= m_1 s_1 l \\ d &= g m_1 s_1 \\ e &= \theta_1 \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

benutzt. Die Integration der Gleichungen (91) macht jetzt keine Schwierigkeiten mehr. Differentiiert man die zweite von ihnen zweimal nach t und setzt den aus der ersten hervor-

gehenden Wert von $\frac{d^2\psi}{dt^2}$ ein, so erhält man für φ die einfache Differentialgleichung vierter Ordnung

$$(be - c^2)\frac{d^4\varphi}{dt^4} + (ea + bd)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + da\varphi = 0. \qquad (93)$$

Die Koeffizienten a bis e sind ihrer Definition nach sämtlich positive Größen. Ferner ist c^2 stets kleiner als be, da $\theta_1 = \theta_0 + m_1 s_1^{\,2}$ gesetzt werden kann. Hieraus folgt, daß auch die Koeffizienten in Gl. (93) stets sämtlich positiv sein müssen.

Eliminiert man umgekehrt φ aus den Gleichungen (91), so erkennt man, daß ψ derselben Differentialgleichung (93) genügen muß wie φ.

Die Lösung der Gleichung läßt sich stets in der Form

$$\varphi = A \sin \alpha_1 t + B \cos \alpha_1 t + C \sin \alpha_2 t + D \cos \alpha_2 t \qquad (94)$$

darstellen, in der unter α_1 und α_2 die beiden positiven Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$(be - c^2)\,\alpha^4 - (ea + bd)\,\alpha^2 + da = 0 \qquad (95)$$

zu verstehen sind. Löst man diese Gleichung nach α^2 auf, so erhält man

$$\alpha^2 = \frac{ea + bd}{2(be - c^2)} \pm \sqrt{\frac{(ea + bd)^2}{4(be - c^2)^2} - \frac{da}{be - c^2}},$$

woraus hervorgeht, daß jedenfalls beide Werte von α^2 positiv ausfallen müssen, falls die Wurzel reell bleibt. Daß sie aber reell bleiben muß, folgt aus einer Umformung, die man mit dem Radikanden vornehmen kann und wodurch die Gleichung übergeht in

$$\alpha^2 = \frac{ea + bd \pm \sqrt{(ea - bd)^2 + 4dac^2}}{2(be - c^2)}. \qquad (96)$$

Nach Gl. (94) führt das erste Pendel eine periodische Bewegung aus, die sich aus der Übereinanderlagerung von zwei einfachen Sinusschwingungen zusammensetzt. Die Schwingungsdauern dieser Sinusschwingungen folgen aus

$$T_1 = \frac{2\pi}{\alpha_1} \quad \text{und} \quad T_2 = \frac{2\pi}{\alpha_2}$$

und lassen sich zahlenmäßig für einen bestimmten Fall nach den vorhergehenden Formeln leicht ausrechnen. Sie sind

unabhängig von den in Gl. (94) vorkommenden Integrationskonstanten $ABCD$, d. h. unabhängig von den Schwingungsamplituden oder von den Anfangsbedingungen, von denen im übrigen die besondere Art des Bewegungsvorgangs abhängt.

Auch für ψ gilt eine Lösung von derselben Form wie für φ. Die darin auftretenden Integrationskonstanten sind aber nicht mehr willkürlich, sondern von den in Gl. (94) vorkommenden abhängig. Multipliziert man von den beiden Bewegungsgleichungen (91) die erste mit e und die zweite mit c und subtrahiert, so erhält man durch Auflösen nach ψ

$$\psi = \frac{ae\varphi + (be - c^2)\frac{d^2\varphi}{dt^2}}{cd}.$$

Hiernach läßt sich ψ durch die Gleichung

$$\psi = K_1(A \sin \alpha_1 t + B \cos \alpha_1 t) + K_2(C \sin \alpha_2 t + D \cos \alpha_2 t) \quad (97)$$

darstellen, in der für die Faktoren K_1 und K_2 zu setzen ist

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= \frac{ae - \alpha_1^2(be - c^2)}{cd} \\ K_2 &= \frac{ae - \alpha_2^2(be - c^2)}{cd} \end{aligned}\right\}. \quad (98)$$

Um K_1 und K_2 zu bestimmen, kann man auch einen anderen Weg einschlagen, nämlich Gl. (97) unmittelbar als Lösung der Differentialgleichung vierter Ordnung anschreiben, der ψ genügen muß, und hierauf φ aus Gl. (94) und ψ aus Gl. (97) beide in die beiden Gleichungen (91) einsetzen, die dadurch identisch befriedigt werden müssen. Man erhält dadurch für K_1 die beiden folgenden Werte

$$K_1 = \frac{a - b\alpha_1^2}{c\alpha_1^2} \quad \text{oder auch} \quad K_1 = \frac{c\alpha_1^2}{d - e\alpha_1^2}$$

und für K_2 die sich daraus durch Vertauschung von α_1^2 mit α_2^2 ergebenden. Alle drei Ausdrücke für K_1 sind aber unter sich gleich; man muß dabei nur beachten, daß α_1^2 eine Wurzel von Gl. (95) bedeutet. Man kann auch durch Einsetzen von α_1^2 aus Gl. (96) in Gl. (98) einen Ausdruck von K_1 erhalten, in

dem nur noch die ursprünglich gegebenen Koeffizienten vorkommen, nämlich

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= \frac{ae - bd - \sqrt{(ae - bd)^2 + 4dac^2}}{2cd} \\ K_2 &= \frac{ae - bd + \sqrt{(ae - bd)^2 + 4dac^2}}{2cd} \end{aligned}\right\}. \tag{99}$$

Die Werte der Faktoren K_1 und K_2 spielen bei der Erörterung der Bewegungsvorgänge des Doppelpendels eine sehr wichtige Rolle, weil sie angeben, in welchen Verhältnissen die Amplituden der beiden Schwingungsanteile von ψ gegenüber denen von φ vergrößert oder verkleinert sind. Einstweilen sieht man schon, daß K_1 auf jeden Fall negativ und K_2 positiv sein muß. Der Schwingungsanteil von ψ, der zur Schwingungsdauer T_1 gehört, steht daher mit dem entsprechenden Anteile von φ, wie man sagen kann, in entgegengesetzter Phase, während die zur Schwingungsdauer T_2 gehörigen Schwingungsanteile von φ und ψ in gleicher Phase stehen.

Ferner sieht man aus den Gl. (99), daß K_1 und K_2 im allgemeinen verschiedene absolute Werte haben, daß also die Amplituden der beiden Schwingungsanteile von ψ in einem ganz anderen Verhältnisse zueinander stehen als die von φ. Eine Ausnahme davon macht nur der Fall, daß infolge der besonderen Wahl der Maße und der Massenverteilung der beiden Pendel

$$ae = bd$$

wird. In diesem Falle, der auch sonst noch eine besondere Beachtung verdient, vereinfachen sich die Werte von K_1 und K_2 zu

$$K_1' = -\sqrt{\frac{a}{d}} \quad \text{und} \quad K_2' = +\sqrt{\frac{a}{d}}. \tag{100}$$

Auf diesen Fall werde ich später noch zurückkommen.

Bildet man das Produkt von K_1 und K_2 nach den Gleichungen (99), so erhält man

$$K_1 K_2 = -\frac{a}{d} = -\frac{ms + m_1 l}{m_1 s_1}. \tag{101}$$

Von dieser Formel kann man gelegentlich einen nützlichen Gebrauch machen.

§ 21. Fortsetzung; besondere Bewegungsarten.

In der durch die Gleichungen (94) und (97) ausgesprochenen Lösung unserer Aufgabe kommen die vier willkürlich gebliebenen Integrationskonstanten $ABCD$ vor. Deren Werte hängen von den Anfangsbedingungen ab. Wenn man angeben soll, wie sich die Bewegung weiter fortsetzt, muß man wissen, wie sie zu Anfang war.

Zur Zeit $t = 0$, von der ab wir die weitere Bewegung betrachten, seien die Werte von φ und ψ mit φ_0 und ψ_0 und die Geschwindigkeiten, mit denen sich φ und ψ ändern, mit $\dot{\varphi}_0$ und $\dot{\psi}_0$ bezeichnet. Dann lassen sich die Konstanten $ABCD$ aus den vier Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varphi_0 &= B + D \\ \psi_0 &= K_1 B + K_2 D \\ \dot{\varphi}_0 &= A\alpha_1 + C\alpha_2 \\ \dot{\psi}_0 &= K_1 A\alpha_1 + K_2 C\alpha_2 \end{aligned}\right\} \qquad (102)$$

berechnen. Besondere Fälle der Bewegung treten ein, wenn wir für die vier Anfangswerte $\varphi_0 \psi_0 \dot{\varphi}_0 \dot{\psi}_0$ besondere Werte annehmen. Durch eine geeignete Wahl des Zeitpunktes $t = 0$ werden wir es bei jeder Bewegungsart erreichen können, daß etwa $\varphi_0 = 0$ wird. Ein besonderer Fall ist es aber, wenn dann zugleich auch ψ_0 zu Null wird. Diesen Fall wollen wir jetzt etwas näher besprechen. Man hat dann, da K_1 und K_2 jedenfalls verschieden voneinander sind,

$$B = D = 0,$$

$$A = \frac{K_2 \dot{\varphi}_0 - \dot{\psi}_0}{\alpha_1 (K_2 - K_1)},$$

$$C = -\frac{K_1 \dot{\varphi}_0 - \dot{\psi}_0}{\alpha_2 (K_2 - K_1)},$$

und die endlichen Bewegungsgleichungen lauten hiermit

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{K_2 \dot{\varphi}_0 - \dot{\psi}_0}{\alpha_1 (K_2 - K_1)} \sin \alpha_1 t + \frac{\dot{\psi}_0 - K_1 \dot{\varphi}_0}{\alpha_2 (K_2 - K_1)} \sin \alpha_2 t \\ \psi &= \frac{K_1 K_2 \dot{\varphi}_0 - K_1 \dot{\psi}_0}{\alpha_1 (K_2 - K_1)} \sin \alpha_1 t + \frac{K_2 \dot{\psi}_0 - K_1 K_2 \dot{\varphi}_0}{\alpha_2 (K_2 - K_1)} \sin \alpha_2 t \end{aligned}\right\}. \qquad (103)$$

Hieran knüpft sich die Frage, ob es vorkommen kann, daß nicht nur zu Anfang, sondern auch im ganzen weiteren Verlaufe der Bewegung $\psi = \varphi$ wird. Diese Frage ist deshalb von Wichtigkeit, weil in diesem Falle der Verband ohne jede Drehung im Gelenk β, also so schwingt, als wenn beide Körper ein einziges physisches Pendel ausmachten. Wenn der Fall eintreten soll, müssen die beiden Gleichungen

$$K_2\dot{\varphi}_0 - \dot{\psi}_0 = K_1(K_2\dot{\varphi}_0 - \dot{\psi}_0),$$
$$\dot{\psi}_0 - K_1\dot{\varphi}_0 = K_2(\dot{\psi}_0 - K_1\dot{\varphi}_0)$$

erfüllt sein. Da K_1, wie wir schon früher fanden, jedenfalls negativ und K_2 positiv ist, kann man den beiden Gleichungen nur dadurch genügen, daß man

$$K_2\dot{\varphi}_0 - \dot{\psi}_0 = 0 \quad \text{und} \quad K_2 = 1, \quad \text{also auch} \quad \dot{\varphi}_0 = \dot{\psi}_0$$

setzt. Bei einem beliebig gegebenen Doppelpendel läßt sich daher diese Art der Bewegung niemals durch passende Wahl der Anfangsbedingungen verwirklichen; wohl aber dann, wenn die Maße und die Massenverteilungen in beiden Pendeln zufällig oder absichtlich so gewählt sind, daß $K_2 = 1$ wird.

Setzt man in Gl. (99) $K_2 = 1$, so erhält man nach einfachen algebraischen Umformungen als Bedingung für das Eintreten des besprochenen Falles die Gleichung

$$d(b + c) = a(e + c)$$

oder auch, wenn man sich der Bedeutung der durch die Gleichungen (92) eingeführten Buchstabenbezeichnungen erinnert,

$$m_1 s_1(\theta + m_1 l^2 + m_1 s_1 l) = (ms + m_1 l)(\theta_1 + m_1 s_1 l).$$

Diese Gleichung läßt sich schließlich noch ein wenig vereinfachen, womit sie übergeht in

$$m_1(\theta s_1 - \theta_0 l) = ms(\theta_1 + m_1 l s_1), \tag{104}$$

wobei auf der linken Seite wieder das auf die Schwerpunktsachse bezogene Trägheitsmoment θ_0 des zweiten Pendels eingeführt ist.

Mit $K_2 = 1$ folgt übrigens aus Gl. (101)

$$K_1 = -\frac{a}{d}.$$

Nachdem wir gefunden haben, daß im Falle $K_2 = 1$ etwas Außergewöhnliches geschehen kann, wenn die Anfangsbedingungen passend gewählt sind, wollen wir noch nachsehen, wie die Bewegung desselben Verbandes bei beliebigen Anfangsbedingungen ausfällt. Dazu gehen wir auf die Gleichungen (102) zurück, bei denen wir uns den Anfangspunkt der Zeit so gewählt denken wollen, daß φ_0 zu Null wird. Indem wir die hier zutreffenden Werte von K_1 und K_2 einsetzen, liefert die Auflösung dieser Gleichungen

$$A = \frac{\dot\varphi_0 - \dot\psi_0}{\alpha_1(a+d)}; \quad B = -\frac{d}{a+d}\psi_0;$$

$$C = \frac{a\dot\varphi_0 + d\dot\psi_0}{\alpha_2(a+d)}; \quad D = \frac{d}{a+d}\psi_0,$$

womit die endlichen Bewegungsgleichungen übergehen in

$$\varphi = \frac{(\dot\varphi_0 - \dot\psi_0)d}{\alpha_1(a+d)}\sin\alpha_1 t - \frac{d}{a+d}\psi_0\cos\alpha_1 t + \frac{a\dot\varphi_0 + d\dot\psi_0}{\alpha_2(a+d)}\sin\alpha_2 t + \frac{d}{a+d}\psi_0\cos\alpha_2 t,$$

$$\psi = -\frac{a(\dot\varphi_0 - \dot\psi_0)}{\alpha_1(a+d)}\sin\alpha_1 t + \frac{a}{a+d}\psi_0\cos\alpha_1 t + \frac{a\dot\varphi_0 + d\dot\psi_0}{\alpha_2(a+d)}\sin\alpha_2 t + \frac{d}{a+d}\psi_0\cos\alpha_2 t.$$

Für die relative Drehung beider Pendel gegeneinander um das Gelenk β erhält man daraus

$$\psi - \varphi = -\frac{\dot\varphi_0 - \dot\psi_0}{\alpha_1}\sin\alpha_1 t + \psi_0\cos\alpha_1 t.$$

Der größte Wert, den der Drehungswinkel im Verlaufe der Schwingung annimmt, ist daher

$$(\psi - \varphi)_{\max} = \sqrt{\psi_0^2 + \left(\frac{\dot\varphi_0 - \dot\psi_0}{\alpha_1}\right)^2}.$$

Wenn auch ψ_0 gleich Null war, bleibt daher der Drehungswinkel bei etwas verschiedenen Werten von $\dot{\varphi}_0$ und $\dot{\psi}_0$ dann besonders klein, wenn α_1 sehr groß ausfällt, d. h. wenn die Schwingungsdauer T_1 klein ist.

Ein anderer Sonderfall, der eine eigene Besprechung verdient, tritt ein, wenn

$$ae = bd$$

ist. Die Werte der Faktoren K_1 und K_2 sind für diesen Fall schon in den Gleichungen (100) angegeben. Für α_1 und α_2 erhält man nach Gl. (96)

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{ea + c\sqrt{ad}}{be - c^2}}; \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{ea - c\sqrt{ad}}{be - c^2}}.$$

Die Auflösung der Gleichungen (102) mit $\varphi_0 = 0$ liefert für die Integrationskonstanten nach Einsetzen der Werte von K_1 und K_2

$$A = \frac{\dot{\varphi}_0 - \dot{\psi}_0\sqrt{\frac{d}{a}}}{2\alpha_1}; \quad B = -\frac{\psi_0}{2}\sqrt{\frac{d}{a}};$$

$$C = -\frac{\dot{\varphi}_0 + \dot{\psi}_0\sqrt{\frac{d}{a}}}{2\alpha_2}; \quad D = \frac{\psi_0}{2}\sqrt{\frac{d}{a}},$$

und die Bewegung wird dargestellt durch die Formeln

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= A\sin\alpha_1 t + B\cos\alpha_1 t + C\sin\alpha_2 t + D\cos\alpha_2 t \\ \psi &= \sqrt{\frac{a}{d}}\left\{-(A\sin\alpha_1 t + B\cos\alpha_1 t) + C\sin\alpha_2 t + D\cos\alpha_2 t\right\} \end{aligned}\right\} \cdot (105)$$

Dies gilt noch für jede mögliche Bewegung des betrachteten Doppelpendels, falls nur der Anfang der Zeiten t so gewählt ist, daß für ihn $\varphi_0 = 0$ ist. Eine besonders einfache Bewegung entsteht, wenn wir annehmen, daß auch $\psi_0 = 0$ war und daß ferner

$$\dot{\varphi}_0 = \dot{\psi}_0\sqrt{\frac{d}{a}}$$

ist. Für diesen Fall gehen die vorhergehenden Gleichungen über in

$$\varphi = \frac{\dot\varphi_0}{\alpha_2} \sin \alpha_2 t,$$

$$\psi = \frac{\dot\varphi_0}{\alpha_2} \sqrt{\frac{a}{d}} \sin \alpha_2 t.$$

Der Winkel ψ bleibt dabei dauernd dem Winkel φ proportional. Setzt man außerdem noch $a = d$ voraus, womit auch $e = b$ wird, so ist zugleich auch der vorher schon besprochene Fall verwirklicht, bei dem ψ dauernd gleich φ bleibt.

Endlich sind noch von großer Bedeutung die Sonderfälle, bei denen die Masse des einen Pendels als sehr klein gegenüber der des anderen angesehen werden kann. Diese sollen im nächsten Paragraphen besprochen werden.

§ 22. Grenzfälle des Doppelpendels.

Zunächst sei m_1 sehr klein gegenüber m, während die Längen l, s, s_1 und die Trägheitshalbmesser beider Pendel unter sich alle von gleicher Größenordnung sein sollen. Dann sind von den in den Gleichungen (92) zusammengestellten Koeffizienten die beiden ersten, nämlich a und b, unter sich von gleicher Größenordnung und sehr groß gegenüber den drei letzten, nämlich c, d und e, die ebenfalls unter sich von gleicher Größenordnung sind. Zugleich ist zu beachten, daß a und b aus je zwei Gliedern zusammengesetzt sind, von denen das zweite klein ist gegen das erste, und zwar von derselben Ordnung klein wie die andern drei Koeffizienten.

Wenn wir dies beachten, können wir zunächst für die in Gl. (96) vorkommenden Quadratwurzeln bis auf Größen höherer Ordnung genau setzen

$$\sqrt{(ea - bd)^2 + 4dac^2} = ea - bd + \frac{2dac^2}{ea - bd}.$$

Doch gilt dies nur so lange, als nicht der am Schlusse des vorigen Paragraphen besprochene Sonderfall $ea = bd$ ganz oder nahezu verwirklicht ist. Darauf werde ich nachher noch

zurückkommen, einstweilen aber annehmen, daß die Differenz $ea - bd$ von derselben Größenordnung ist wie jedes der beiden Glieder ea oder bd.

Dann erhält man nach Gl. (96)

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1^2 &= \frac{ea + \dfrac{dac^2}{ea - bd}}{be - c^2} \\ \alpha_2^2 &= \frac{bd - \dfrac{dac^2}{ea - bd}}{be - c^2} \end{aligned}\right\} . \tag{106}$$

Wenn es sich nur um die Berechnung der Schwingungsdauern T_1 und T_2 handelt, kann man diese Ausdrücke noch bedeutend vereinfachen. Das zweite Glied sowohl im Zähler als im Nenner beider Brüche ist nämlich von der ersten Ordnung klein gegen das erste und kann dagegen vernachlässigt werden. Man erhält dann

$$\alpha_1^2 = \frac{a}{b} \quad \text{und} \quad \alpha_2^2 = \frac{d}{e}, \tag{107}$$

welche Werte unter sich von gleicher Größenordnung sind. Für die Schwingungsdauern erhalten wir durch Einsetzen der Werte der Koeffizienten aus den Gleichungen (92) mit den dabei zulässigen Vernachlässigungen

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{2\pi}{\alpha_1} = 2\pi\sqrt{\frac{b}{a}} = 2\pi\sqrt{\frac{\theta}{g m s}} \\ T_2 &= \frac{2\pi}{\alpha_2} = 2\pi\sqrt{\frac{e}{d}} = 2\pi\sqrt{\frac{\theta_1}{g m_1 s_1}} \end{aligned}\right\} . \tag{108}$$

Dieses Ergebnis hat aber eine einfache Bedeutung. T_1 ist nämlich die Schwingungsdauer des ersten Pendels, wenn das zweite nicht daran aufgehängt ist, und ebenso gibt T_2 die Schwingungsdauer des zweiten Pendels an, wenn das erste bei seinen Schwingungen festgehalten wird.

Bei der Berechnung der Faktoren K_1 und K_2, die nach den Gleichungen (98) erfolgen kann, müssen wir dagegen auf

die genaueren Werte von α_1^2 und α_2^2 in den Gleichungen (106) zurückgreifen. Wir finden dann

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= -\frac{ac}{ea-bd} \\ K_2 &= \frac{ae-bd}{cd} + \frac{ac}{ea-bd} \end{aligned}\right\}. \tag{109}$$

Aus den Bemerkungen über die Größenordnung der Koeffizienten folgt aber, daß das erste Glied in dem Ausdrucke für K_2 eine sehr große Zahl bedeutet, die groß ist gegen Eins von derselben Größenordnung wie m oder θ gegen m_1 oder θ_1. Man muß nämlich beachten, daß alle Glieder im Zähler und Nenner dieser Brüche von derselben Dimension sind, so daß die Brüche selbst unbenannte Zahlen darstellen. Das zweite Glied in K_2, das der Größe nach mit K_1 übereinstimmt, kann ebensowohl größer als kleiner sein als Eins, muß aber auf jeden Fall bei den hier aufgestellten Voraussetzungen mit Eins von der gleichen Größenordnung und hiermit sehr klein gegen K_2 sein.

Wir erkennen daraus zunächst, daß die Amplitude des zur Schwingungsdauer T_2 gehörigen Schwingungsanteils beim zweiten Pendel weit größer ist als beim ersten Pendel. Daraus folgt weiter, daß diese Amplitude beim ersten Pendel als sehr klein vorausgesetzt werden muß. Das erste Pendel führt daher nahezu einfache harmonische Schwingungen aus von derselben Art, als wenn das zweite Pendel gar nicht vorhanden wäre. Von vornherein war ja auch vorauszusehen, daß das zweite Pendel mit der kleinen Masse m_1 das weit mächtigere erste Pendel in seiner Bewegung nicht merklich zu stören vermöchte.

Wir gelangen daher zu einer hinreichend genauen Beschreibung des ganzen Bewegungsvorgangs, wenn wir setzen

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= A \sin \alpha_1 t + B \cos \alpha_1 t \\ \psi &= -\frac{ac}{ea-bd}(A \sin \alpha_1 t + B \cos \alpha_1 t) + C_1 \sin \alpha_2 t + D_1 \cos \alpha_2 t \end{aligned}\right\} \tag{110}$$

und die Konstanten $A B C_1 D_1$, von denen die beiden letztgenannten nicht mit den früher gebrauchten C und D ver-

wechselt werden dürfen, aus den Grenzbedingungen für die Zeit $t = 0$ berechnen. Führt man noch die Werte aus den Gleichungen (92) ein, so wird übrigens genau genug

$$\frac{ac}{ea - bd} = \frac{m s m_1 s_1 l}{m s \theta_1 - m_1 s_1 \theta}.$$

Diese Lösung läßt sich sofort auch auf den folgenden Fall übertragen. Man nehme an, daß ein Pendel (vielleicht ein Fadenpendel) etwa in einem Turme aufgehängt sei und daß der Turm durch ein Erdbeben oder durch Windstöße in Schwingungen versetzt sei, die man meist genau genug als einfache Sinus-Schwingungen wird betrachten können. Betrachten wir diese Schwingungen als durch äußere Bedingungen vorgeschrieben und gegeben, so fragt sich, was für Schwingungen das an dem bewegten Punkte aufgehängte Pendel ausführen wird. In diesem Falle sind $l\varphi$ und α_1 gegeben und α_2 ist aus Gl. (107) zu berechnen. Unbekannt sind zwar die in den vorhergehenden Formeln auftretenden Größen m, s und θ. Aber wir können sie leicht daraus entfernen, wenn wir auf die Gleichungen (108) achten. Man findet dann

$$\frac{ac}{ea - bd} = \frac{l}{\frac{\theta_1}{m_1 s_1} - \frac{\theta}{m s}} = \frac{l \cdot 4\pi^2}{g(T_2^2 - T_1^2)},$$

und die Schwingung des aufgehängten Pendels wird daher dargestellt durch die Gleichung

$$\psi = -\frac{4\pi^2 l\varphi}{g(T_2^2 - T_1^2)} + C_1 \sin\alpha_2 t + D_1 \cos\alpha_2 t. \qquad (111)$$

Hierbei ist $l\varphi$ der als gegeben angesehene Ausschlag des Aufhängepunktes des Pendels.

Anordnungen, die zwar im einzelnen davon abweichen, im ganzen aber ähnliche Eigenschaften haben wie ein einfaches Fadenpendel, werden als Seismographen zur Beobachtung der durch Erdbeben hervorgebrachten Bewegungen des Aufhängepunktes oder als Pallographen zur Beobachtung der auf Schiffen auftretenden Schwingungen gebraucht. Hierbei wird dafür gesorgt, daß die Schwingungsdauer T_2, also die

Eigenschwingungsdauer des Instruments, sehr groß und jedenfalls bedeutend größer ist als die Dauer T_1 der Schwingungen, denen der Aufhängepunkt unterworfen ist. In den von diesen Instrumenten aufgezeichneten Diagrammen lassen sich daher die durch die beiden letzten Glieder in Gl. (111) dargestellten langsamen Eigenschwingungen sehr deutlich von den viel rascher verlaufenden Schwingungen mit der Schwingungsdauer T_1, die durch das erste Glied angegeben werden, unterscheiden. Ferner sind in diesem Falle die Ausschläge ψ und insbesondere auch der von dem ersten Gliede in Gl. (111) herrührende Anteil von ψ aus dem Diagramm zu entnehmen und daher als bekannt anzusehen, während die Schwingungen $l\varphi$ des Aufhängepunktes daraus abgeleitet werden sollen. Bezeichnet man die Amplitude der zuletzt genannten Schwingungen mit x, ferner die Länge des Fadenpendels mit L und den Weg $L\psi$ des Pendelendes, soweit er von dem ersten Gliede in Gl. (111) herrührt, für den größten Ausschlag mit w, so folgt x nach Gl. (111) aus dem beobachteten w, wenn man vom Vorzeichen absieht, nach der Formel

$$x = w \cdot \frac{g(T_2^2 - T_1^2)}{4\pi^2 L} \tag{112}$$

oder auch, wenn man T_2 in L ausdrückt,

$$x = w\left(1 - \frac{g}{4\pi^2 L} T_1^2\right). \tag{113}$$

Wenn T_1 sehr klein ist gegen T_2, wird daher nahezu $x = w$; doch geht der Ausschlag nach der entgegengesetzten Seite.

Hierzu soll noch bemerkt werden, daß es natürlich nicht nötig ist, zur Aufstellung der Theorie der Seismographen-Schwingungen von dem Doppelpendel auszugehen, wie es hier des Zusammenhanges wegen geschehen ist. Wenn der Aufstellungsort eines solchen Instruments ganz beliebig gegebene Bewegungen ausführt, gelangt man vielmehr am einfachsten zu den Bewegungsgleichungen für die dadurch hervorgebrachten Apparatschwingungen auf Grund der Sätze über die Relativbewegung. Man bezieht also die Bewegungen im Instrument auf einen Raum,

der mit dem Gestell des Instruments fest verbunden ist, und bringt die Ergänzungskräfte der Relativbewegung an, worauf die Bewegungsgleichungen leicht nach den gewöhnlichen Methoden aufgestellt werden können.

Alle vorausgehenden Formeln dieses Paragraphen gelten nur unter der Voraussetzung, daß ea merklich von bd verschieden ist. Wird dagegen $ea = bd$, so ist auf die Besprechung dieses Sonderfalles am Schlusse des vorigen Paragraphen zurückzugreifen. Man muß nur beachten, daß jetzt die weitere Voraussetzung über die Kleinheit der Masse m_1 gegenüber m hinzukommt, die zur Folge hat, daß $\frac{d}{a}$ einen sehr kleinen Bruch bildet oder $\frac{a}{d}$ eine sehr große Zahl bedeutet. Aus den Gleichungen (105) folgt daher, daß die Amplituden der beiden Schwingungsanteile von ψ weit größer sind als die von φ. Wenn daher ψ dauernd so klein bleiben soll, daß man wenigstens mit einiger Annäherung noch von der Theorie der kleinen Schwingungen Gebrauch machen kann, müssen die Amplituden der Schwingungsanteile von φ besonders klein sein und zwar so, daß $\dot{\varphi}_0$ von gleicher Größenordnung mit $\dot{\psi}_0 \sqrt{\frac{d}{a}}$ wird. Ein sehr kleiner Anstoß, der dem ersten Pendel erteilt wird und dieses nur in kleine Schwingungen versetzt, vermag daher schon große Schwingungen des zweiten Pendels herbeizuführen.

Die Schwingungsdauern T_1 und T_2 werden für $ea = bd$ und kleine Masse des zweiten Pendels nach den am Schlusse des vorigen Paragraphen angegebenen Formeln für α_1 und α_2 nahezu einander gleich und zwar ebenso groß wie die Schwingungsdauer des ersten Pendels, wenn das zweite nicht daran aufgehängt ist oder auch, was hier wegen $ea = bd$ auf dasselbe hinauskommt, so groß wie die Eigenschwingungsdauer des zweiten Pendels. Man kann daher den Fall $ea = bd$ auch dadurch kennzeichnen, daß man ihn den Fall der Schwingungsresonanz zwischen den Schwingungen des ersten und zweiten Pendels nennt. Damit hängen auch die großen Schwingungsausschläge des zweiten Pendels für diesen Fall zusammen.

Ich komme jetzt zu dem anderen Grenzfalle des Doppelpendels, bei dem umgekehrt die Masse m des ersten Pendels gegen die Masse m_1 des zweiten vernachlässigt werden kann. Das erste Pendel ist dann einer Stange gleichwertig, der nur die Aufgabe zukommt, den Aufhängepunkt des zweiten Pendels auf einem Kreise zu führen. Abb. 9, bei der im übrigen die Bezeichnungen von Abb. 7 beibehalten sind, gibt dies näher an. Man kann auch sagen, daß es sich hierbei um die Schwingungen eines starren Körpers von der Gestalt einer Scheibe handelt, der mit zwei Freiheitsgraden aufgehängt und dem Einflusse des Gewichtes als einziger äußerer Kraft ausgesetzt ist. Man könnte dafür die Bewegungsgleichungen nach dem gewöhnlichen Verfahren von neuem bilden; wir erhalten sie aber jetzt einfacher, indem wir in den Entwicklungen der vorhergehenden Paragraphen $m = 0$ und hiermit $\theta = 0$ setzen. Für α^2 finden wir an Stelle von Gl. (96)

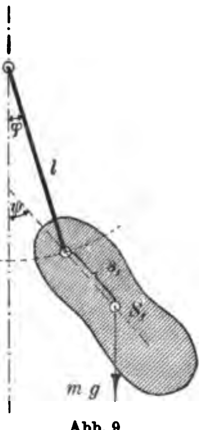


Abb. 9.

$$\alpha^2 = g\,\frac{\theta_1 + m_1 s_1 l \pm \sqrt{(\theta_1 - m_1 s_1 l)^2 + 4 m_1{}^2 s_1{}^3 l}}{2l(\theta_1 - m_1 s_1{}^2)}, \qquad (114)$$

woraus sich die Schwingungsdauern der beiden Einzelschwingungen ergeben, aus denen sich die ganze Bewegung zusammensetzen läßt.

Ebenso erhält man für die Faktoren K_1 und K_2 aus den Gleichungen (99) beim Einsetzen der hier zutreffenden Werte

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= \frac{\theta_1 - m_1 s_1 l - \sqrt{(\theta_1 - m_1 s_1 l)^2 + 4 m_1{}^2 s_1{}^3 l}}{2 m_1 s_1{}^2} \\ K_2 &= \frac{\theta_1 - m_1 s_1 l + \sqrt{(\theta_1 - m_1 s_1 l)^2 + 4 m_1{}^2 s_1{}^3 l}}{2 m_1 s_1{}^2} \end{aligned}\right\}. \qquad (115)$$

Läßt man z. B. l zu Null werden, so wird α_1^2 nach Gl. (114) gleich ∞, die zugehörige Schwingungsdauer T_1 daher zu Null, womit nur die Schwingung mit der Schwingungsdauer T_2 übrig bleibt, von der sich durch einen Grenzübergang

in Gl. (114) zeigen läßt, daß sie so groß ausfällt wie beim einläufigen physischen Pendel. Ein anderer Grenzfall entsteht, wenn man $l = \infty$ setzt. In diesem Falle wird α_2^2 zu Null und T_2 unendlich groß. Die zweite Schwingung verschwindet in diesem Falle nicht völlig, sondern sie wird ersetzt durch eine gleichförmige Translation, die das Pendel längs der horizontalen Gleitbahn ausführt und die sich über die andere Schwingung lagert, derart, daß der Schwerpunkt S_1 eine konstante horizontale Geschwindigkeitskomponente behält. Ferner entsteht noch ein bemerkenswerter Fall, wenn man

$$\theta_1 = m_1 s_1 l$$

setzt, d. h. wenn die Länge der Aufhängestange gleich der reduzierten Pendellänge des zwangläufig aufgehängt gedachten Pendels gemacht wird. Es wird aber nicht nötig sein, diese Fälle noch näher im einzelnen durchzusprechen, da ihre besonderen Eigenschaften aus den allgemeinen Formeln leicht entnommen werden können.

§ 23. Stöße am Doppelpendel.

Bisher ist nicht danach gefragt worden, wie die Bewegung des ganzen Verbandes ursprünglich hervorgerufen wurde, sondern der Anfangszustand wurde als beliebig gegeben betrachtet. Jetzt wollen wir dagegen die Untersuchung auch nach dieser Richtung hin noch um einen Schritt weiter führen. Der besseren Anschaulichkeit wegen will ich mich aber darauf beschränken, an einem bestimmten Beispiele zu zeigen, wie man zu diesem Zwecke vorzugehen hat. Andere Fälle lassen sich in ganz ähnlicher Weise behandeln.

Ich setze jetzt voraus, daß beide Pendel anfänglich in Ruhe waren und in der lotrechten Gleichgewichtslage herabhingen. Dann mag auf das erste Pendel ein Stoß einwirken, der den ganzen Verband in Bewegung setzt. Der Stoß soll nur so kurze Zeit dauern, daß sich der Verband bis zum Ablauf des Stoßes noch nicht merklich aus der Gleichgewichtslage zu verschieben vermochte. Dagegen sind beiden Körpern

während der Stoßzeit endliche Geschwindigkeiten erteilt worden, und unsere Aufgabe besteht jetzt darin, die Geschwindigkeiten $\dot{\varphi}_0$ und $\dot{\psi}_0$ für die sich an den Stoß anschließende weitere Bewegung zu ermitteln.

Diese Aufgabe kann zwar auch in anderer Weise, etwa durch Anwendung des Prinzips von d'Alembert ohne Schwierigkeit gelöst werden. Da es mir aber in diesem Abschnitte darauf ankommt, den Leser mit dem Verfahren von Lagrange besser vertraut zu machen, gebe ich diesem Wege den Vorzug.

Für die kurze Zeit während des Stoßes kommt nur die Stoßkraft als äußere Kraft in Betracht. Dies folgt schon daraus ganz allgemein, daß die Stoßkraft sehr groß sein muß gegenüber den Gewichten, wenn sie in sehr kurzer Zeit verhältnismäßig große Geschwindigkeiten hervorbringen soll. Die Wirkung des Gewichts oder auch anderer äußerer Kräfte, die mit den Gewichten von gleicher Größenordnung sind, kann daher für die Dauer des Stoßes gegenüber der Stoßkraft vernachlässigt werden. In unserem besonderen Falle kommt noch hinzu, daß die Gewichte beider Pendel während der Stoßdauer überhaupt keine Arbeit leisten können, weil sich beide Schwerpunkte nur in horizontaler Richtung verschieben. Die Gewichte tragen daher zu den auf die Koordinaten φ und ψ reduzierten äußeren Kräften ohnehin nichts bei.

Bezeichnen wir das auf die Aufhängeachse des oberen Pendels bezogene statische Moment der Stoßkraft mit M, so ist die Arbeit der Stoßkraft für eine virtuelle Verschiebung $\delta\varphi$ gleich $M\delta\varphi$. Bei einer virtuellen Verschiebung, die nur ψ um $\delta\psi$ ändert, während φ konstant bleibt, leistet dagegen die am ersten Pendel angreifende Stoßkraft keine Arbeit. Für die Zeit während des Stoßes haben wir daher die auf die Koordinaten φ und ψ reduzierten äußeren Kräfte

$$F_\varphi = M \quad \text{und} \quad F_\psi = 0$$

zu setzen. Setzen wir diese Werte an die Stelle der auf den linken Seiten der Gleichungen (90) stehenden Ausdrücke, so haben wir damit sofort die für die kurze Stoßdauer gültigen

Bewegungsgleichungen gefunden. Zugleich sind wir berechtigt, da φ und ψ während dieser Zeit jedenfalls sehr klein bleiben, von den Vereinfachungen Gebrauch zu machen, durch die die Gleichungen (90) in die Gleichungen (91) übergeführt worden waren. Die Bewegungsgleichungen lauten daher jetzt

$$\left.\begin{aligned} b\frac{d^2\varphi}{dt^2} + c\frac{d^2\psi}{dt^2} - M = 0 \\ e\frac{d^2\psi}{dt^2} + c\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (116)$$

Aus ihnen findet man

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= \frac{eM}{be - c^2} \\ \frac{d^2\psi}{dt^2} &= -\frac{cM}{be - c^2} \end{aligned}\right\}. \qquad (117)$$

Eine Integration über die Dauer des Stoßes liefert uns die gesuchten Geschwindigkeiten $\dot{\varphi}_0$ und $\dot{\psi}_0$. Setzen wir zur Abkürzung

$$\int M dt = Q,$$

so können wir Q als den Stoßimpuls bezeichnen, und dieser muß jedenfalls gegeben sein, wenn wir die durch ihn hervorgebrachten Geschwindigkeiten berechnen sollen, während M selbst und die Dauer des Stoßes — abgesehen davon, daß diese jedenfalls klein sein muß — nicht bekannt zu sein brauchen. Wir finden dann

$$\left.\begin{aligned} \dot{\varphi}_0 &= \frac{eQ}{be - c^2} \\ \dot{\psi}_0 &= -\frac{cQ}{be - c^2} \end{aligned}\right\}. \qquad (118)$$

Auf Grund der in § 20 und 21 aufgestellten Formeln sind wir hiermit in den Stand gesetzt, die sich an den Stoß anschließende Bewegung des Doppelpendels vollständig anzugeben, wenigstens dann, wenn es zulässig erscheint, die erzeugten Schwingungen noch genau genug als kleine zu betrachten. Aus den Gleichungen (102) erhalten wir, da $\varphi_0 = 0$ und $\psi_0 = 0$ ist,

$$B = D = 0,$$

$$A = \frac{Q}{be - c^2} \cdot \frac{eK_2 + c}{\alpha_1 (K_2 - K_1)},$$

$$C = -\frac{Q}{be - c^2} \cdot \frac{eK_1 + c}{\alpha_2 (K_2 - K_1)}.$$

Die Werte von K_1, K_2, α_1 und α_2 sind aus den früheren Formeln zu entnehmen.

Die damit gefundene Lösung der Aufgabe ist zwar vollständig, aber sehr wenig übersichtlich. Die Rechnung mag daher wenigstens für einen besonderen Fall, bei dem sich die Formeln bedeutend vereinfachen, noch etwas weiter geführt werden. Ich wähle dazu den in der ersten Hälfte von § 22 besprochenen Grenzfall, bei dem m_1 sehr klein gegenüber m ist. Dann ist, wie wir fanden, K_2 eine sehr große Zahl, der gegenüber K_1 vernachlässigt werden kann. Die Anfangsgeschwindigkeiten $\dot\varphi_0$ und $\dot\psi_0$ bleiben nach den Gleichungen (118) auch in diesem Grenzfalle von gleicher Größenordnung, und zwar findet man bei Vernachlässigung von c^2 gegen be

$$\dot\varphi_0 = \frac{Q}{b}; \qquad \dot\psi_0 = -\frac{cQ}{be}.$$

An Stelle der Gleichungen (103) erhalten wir hier genau genug

$$\varphi = \frac{\dot\varphi_0}{\alpha_1} \sin \alpha_1 t,$$

$$\psi = K_1 \frac{\dot\varphi_0}{\alpha_1} \sin \alpha_1 t + \frac{\dot\psi_0 - K_1 \dot\varphi_0}{\alpha_2} \sin \alpha_2 t,$$

wobei alle weggelassenen Größen sehr klein sind gegenüber den beibehaltenen. Setzen wir noch α_1 und α_2 aus den Gleichungen (107) und K_1 aus Gl. (109) ein, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{Q}{\sqrt{ab}} \sin \alpha_1 t, \\ \psi &= \frac{cQ}{ea - bd}\left(-\sqrt{\frac{a}{b}} \sin \alpha_1 t + \sqrt{\frac{d}{e}} \sin \alpha_2 t\right) \end{aligned}\right\}. \tag{119}$$

Für den Fall $ea = bd$, der eine besondere Bedeutung beanspruchen kann, dürfen diese Formeln jedoch nicht

benutzt werden, da ψ in diesem Falle in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erscheint. Man muß dann auf die am Schlusse von § 21 zusammengestellten Formeln zurückgreifen. Da der Grenzübergang zu kleinem m_1 hierbei größere Vorsicht erfordert, wird es sich empfehlen, ihn hier ausführlicher zu besprechen.

Zunächst setze ich die in den Gleichungen (118) gefundenen Werte von φ_0 und ψ_0 in die am Schlusse von § 21 für den Fall $ea = bd$ aufgestellten Formeln ein, ohne vorläufig von der Voraussetzung Gebrauch zu machen, daß m_1 klein sein soll gegen m. Man hat dann, da zugleich ψ_0 gleich Null ist,

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{ea + c\sqrt{ad}}{be - c^2}}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{ea - c\sqrt{ad}}{be - c^2}}.$$

$$B = D = 0,$$

$$A = \frac{Q}{be - c^2} \cdot \frac{e + c\sqrt{\frac{d}{a}}}{2\alpha_1},$$

$$C = \frac{Q}{be - c^2} \cdot \frac{e - c\sqrt{\frac{d}{a}}}{2\alpha_2},$$

$$\varphi = \frac{Q}{be - c^2} \left\{ \frac{e + c\sqrt{\frac{d}{a}}}{2\alpha_1} \sin \alpha_1 t + \frac{e - c\sqrt{\frac{d}{a}}}{2\alpha_2} \sin \alpha_2 t \right\},$$

$$\psi = \frac{Q}{be - c^2} \left\{ - \frac{e\sqrt{\frac{a}{d}} + c}{2\alpha_1} \sin \alpha_1 t + \frac{e\sqrt{\frac{a}{d}} - c}{2\alpha_2} \sin \alpha_2 t \right\}.$$

Jetzt gehen wir zur Grenze über, bei der m_1 sehr klein gegen m und daher c, d, e sehr klein gegen a und b sind. Dann werden α_1 und α_2 nahezu einander gleich; es ist jedoch nötig, auf den wenn auch nur sehr kleinen Unterschied zwischen beiden zu achten. Von vornherein dürfen wir dagegen in den Ausdrücken für α_1 und α_2 im Nenner c^2 gegen be vernachlässigen, weil diese Vernachlässigung ohne Einfluß auf das Verhältnis zwischen α_1 und α_2 ist. Bis auf Größen höherer Ordnung genau dürfen wir daher

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{a}{b} + \frac{c}{be}\sqrt{ad}} = \sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{\frac{c}{be}\sqrt{ad}}{2\sqrt{\frac{a}{b}}} = \sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{c}{2e}\sqrt{\frac{d}{b}}$$

setzen. Ebenso erhalten wir

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{c}{2e}\sqrt{\frac{d}{b}}.$$

Auch die in den Gleichungen für φ und ψ in den Klammern vor den Sinusfunktionen stehenden Faktoren werden paarweise untereinander nahezu gleich groß. Doch kommt es auch hier auf die kleinen Unterschiede zwischen beiden an. Wir entwickeln daher diese Faktoren bis auf Größen, die von höherer Ordnung klein sind, wie folgt:

$$\frac{e + c\sqrt{\frac{d}{a}}}{2\alpha_1} = \frac{e + c\sqrt{\frac{d}{a}}}{2\sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{c}{e}\sqrt{\frac{d}{b}}} = \frac{\left(e + c\sqrt{\frac{d}{a}}\right)\left(2\sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{c}{e}\sqrt{\frac{d}{b}}\right)}{4\frac{a}{b}}$$

$$= \frac{b}{4a}\left(2e\sqrt{\frac{a}{b}} + c\sqrt{\frac{d}{b}}\right) = \frac{e}{2}\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{c}{4a}\sqrt{bd}.$$

In der gleichen Weise findet man

$$\frac{e - c\sqrt{\frac{d}{a}}}{2\alpha_2} = \frac{e}{2}\sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{c}{4a}\sqrt{bd}.$$

Auch die in dem Ausdrucke von ψ vorkommenden Faktoren können in derselben Weise bis auf Größen, die von höherer Ordnung klein sind, entwickelt werden, und man findet dann

$$\frac{e\sqrt{\frac{a}{d}} + c}{2\alpha_1} = \frac{e}{2}\sqrt{\frac{b}{d}} + \frac{c}{4}\sqrt{\frac{b}{a}},$$

$$\frac{e\sqrt{\frac{a}{d}} - c}{2\alpha_2} = \frac{e}{2}\sqrt{\frac{b}{d}} - \frac{c}{4}\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Hiermit gehen die Gleichungen für φ und ψ, wenn man zugleich in dem vor der Klammer stehenden Faktor c^2 gegen be vernachlässigt, über in

$$\varphi = \frac{Q}{be}\left\{\left[\frac{e}{2}\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{c}{4a}\sqrt{bd}\right]\sin\alpha_1 t + \left[\frac{e}{2}\sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{c}{4a}\sqrt{bd}\right]\sin\alpha_2 t\right\},$$

$$\psi = -\frac{Q}{be}\left\{\left[\frac{e}{2}\sqrt{\frac{b}{d}} + \frac{c}{4}\sqrt{\frac{b}{a}}\right]\sin\alpha_1 t - \left[\frac{e}{2}\sqrt{\frac{b}{d}} - \frac{c}{4}\sqrt{\frac{b}{a}}\right]\sin\alpha_2 t\right\}.$$

Hierbei sind aber die Werte von α_1 und α_2 in den Sinusfunktionen noch nicht eingesetzt und der Umstand, daß beide nahezu einander gleich sind, macht sich daher in den Formeln noch nicht bemerklich. Wir formen daher die Gleichungen noch weiter um, wie folgt:

$$\varphi = \frac{Q}{2\sqrt{ab}}(\sin\alpha_1 t + \sin\alpha_2 t) + \frac{Qc}{4ae}\sqrt{\frac{d}{b}}(\sin\alpha_1 t - \sin\alpha_2 t),$$

$$\psi = -\frac{Q}{2\sqrt{db}}(\sin\alpha_1 t - \sin\alpha_2 t) - \frac{Qc}{4e\sqrt{ab}}(\sin\alpha_1 t + \sin\alpha_2 t).$$

Hierbei können wir bis auf Größen höherer Ordnung genau

$$\sin\alpha_1 t + \sin\alpha_2 t = 2\sin t\sqrt{\frac{a}{b}}$$

setzen. Für die Differenz der beiden Sinusfunktionen benutzen wir zunächst die allgemein gültige goniometrische Formel

$$\sin\alpha_1 t - \sin\alpha_2 t = 2\sin\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}t\cos\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}t,$$

die beim Einsetzen der hier zutreffenden Werte von α_1 und α_2 übergeht in

$$\sin\alpha_1 t - \sin\alpha_2 t = 2\sin\left(t\frac{c}{2e}\sqrt{\frac{d}{b}}\right)\cos t\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Hiermit finden wir schließlich für φ und ψ

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \frac{Q}{\sqrt{ab}}\sin t\sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{Qc}{2ae}\sqrt{\frac{d}{b}}\sin\left(t\frac{c}{2e}\sqrt{\frac{d}{b}}\right)\cos t\sqrt{\frac{a}{b}}\\ \psi &= -\frac{Q}{\sqrt{db}}\sin\left(t\frac{c}{2e}\sqrt{\frac{d}{b}}\right)\cos t\sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{Qc}{2e\sqrt{ab}}\sin t\sqrt{\frac{a}{b}}\end{aligned}\right\}. \quad (120)$$

Mit diesen Gleichungen ist das gesteckte Ziel erreicht; sie beschreiben vollständig den etwas verwickelten Bewegungsvorgang nach dem Stoße, solange man voraussetzen

darf, daß die Ausschläge wenigstens näherungsweise noch als klein angesehen werden können.

Bei der Deutung der Formeln kommt es vor allem auf die Größenordnung der vor den Sinusfunktionen stehenden Koeffizienten an, da von diesen die Amplituden der auftretenden Schwingungen abhängen. Schreiben wir dafür zur Abkürzung

$$C_1 = \frac{Q}{\sqrt{ab}},$$

$$C_2 = \frac{Qc}{2ae}\sqrt{\frac{d}{b}} = \frac{Qc}{2b\sqrt{db}},$$

$$C_3 = \frac{Q}{\sqrt{db}},$$

$$C_4 = \frac{Qc}{2e\sqrt{ab}}$$

und beachten, daß a und b unter sich von gleicher Größenordnung und dabei viel größer als c, d und e sind, und zwar in dem Maße wie m groß ist gegen m_1, so folgt zunächst, daß der Koeffizient C_3 jedenfalls am größten ist. Ihm folgen die unter sich vergleichbaren Koeffizienten C_1 und C_4, während C_2 wieder viel kleiner ist als die vorigen. In dieser Rangordnung verhalten sich die vorausgehenden zu den folgenden Werten der Größenordnung nach wie $\sqrt{m}$ zu $\sqrt{m_1}$.

Hieraus folgt, daß das untere Pendel weit größere Ausschläge erreicht als das obere, denn den größten Ausschlag des unteren Pendels können wir gleich C_3, den des oberen gleich C_1 setzen.

Bei beiden Pendeln treten Schwebungen ein, bei dem oberen Pendel nur in geringem Maße wegen der Kleinheit von C_2 gegen C_1; sehr ausgeprägt dagegen beim unteren Pendel. Wir wollen diese noch etwas näher betrachten. Solange t noch nicht sehr groß geworden ist, bleibt der Sinus im ersten Gliede von ψ klein, weil d sehr klein gegen b ist. Für diese anfänglichen Zeiten, während deren aber der Winkel $t\sqrt{\frac{a}{b}}$ immerhin schon auf ein Mehrfaches von 2π anwachsen kann,

läßt sich daher die Formel für ψ, indem man den Sinus des kleinen Winkels durch den Bogen ersetzt, näherungsweise schreiben

$$\psi = -\frac{Qct}{2eb}\cos t\sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{Qc}{2e\sqrt{ab}}\sin t\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Die Schwingung gleicht dann für eine kurze Zeit, während deren sich der Koeffizient des ersten Gliedes nicht viel ändert, einer einfachen harmonischen Schwingung mit der Amplitude

$$\frac{Qc}{2e}\sqrt{\frac{t^2}{b^2}+\frac{1}{ab}}.$$

Bezeichnen wir mit n eine Zahl, die einige Einheiten nicht überschreitet, und mit T_1 die volle Schwingungsdauer für die durch das zweite Glied in ψ dargestellte Schwingung, so können wir $t = nT_1$ oder

$$t = n2\pi\sqrt{\frac{b}{a}}$$

setzen, und die Amplitude der einfachen harmonischen Schwingung, mit der die Schwingung ψ augenblicklich nahezu übereinstimmt, folgt damit zu

$$\frac{Qc}{2e}\sqrt{\frac{4\pi^2n^2+1}{ab}}.$$

Nachdem n größer als Eins geworden ist, wächst daher für einige Zeit die Amplitude nahezu proportional mit n oder t an. Sobald aber t etwas größer wird, müssen wir wieder auf die genauere Formel für ψ zurückgehen. Auch dann kann man sagen, daß für die Dauer einer Schwingung mit der Schwingungsdauer T_1 die Schwingung ψ nahezu so wie eine einfache harmonische Schwingung verläuft, deren Amplitude jetzt gleich

$$Q\sqrt{\frac{1}{db}\sin^2\left(t\frac{c}{2e}\sqrt{\frac{d}{b}}\right)+\frac{c^2}{4e^2ab}}$$

gesetzt werden kann. Wenn sich der Sinus unter dem Wurzelzeichen der Einheit nähert, ist das erste Glied unter der Wurzel weit größer als das zweite. Daher schwillt die Amplitude bald mehr an, bald nimmt sie wieder bis auf sehr kleine Werte ab.

Die Zeitdauer, innerhalb deren sich eine solche Schwebung vollständig bis zum Wiederbeginn des gleichen Vorgangs vollzogen hat, sei mit T^1 bezeichnet. Dann hat man

$$T^1 = 2\pi \frac{e}{c}\sqrt{\frac{b}{d}}\,.$$

Die Zahl N der Schwingungen von der Schwingungsdauer T_1, die sich während der Dauer T^1 der Schwebungsperioden abspielen, ist

$$N = \frac{T^1}{T_1} = \frac{e}{c}\sqrt{\frac{a}{d}}\,.$$

Ersetzt man die Buchstaben a, c usf. durch die ihnen nach den Gleichungen (92) zukommenden Werte, so hat man auch

$$N = \frac{\theta_1}{m_1 s_1 l}\sqrt{\frac{ms}{m_1 s_1}}\,. \tag{121}$$

Wollte man m_1 nicht nur angenähert, sondern streng als unendlich klein ansehen gegen m, so würde N unendlich groß und zu Schwebungen käme es gar nicht, sondern nur zu fortwährend wachsenden Ausschlägen ψ, die dann bald so groß werden müßten, daß sie auch nicht in noch so grober Annäherung mehr als klein angesehen werden könnten. Sobald dies eintritt, hört aber die Gültigkeit unserer Formeln auf. Man kann nur sagen, daß bei einem ganz ungewöhnlich kleinen Werte von m_1 gegen m, immer unter der Voraussetzung, daß $ea = bd$ ist, schon ein ziemlich geringer Stoß am oberen Pendel das untere Pendel in stark wachsende Schwingungen versetzen müßte, die schließlich dazu führen könnten, das untere Pendel ganz herumzuwerfen, so daß es einen vollen Kreis um die Aufhängeachse beschreibt. Genauere Auskunft über diesen Vorgang würde man aber nur aus einer Integration der nicht gekürzten ursprünglichen Bewegungsgleichungen (90) erlangen können. — Schließlich bemerke ich noch, daß ich zur Demonstration dieses Verhaltens einen Apparat bauen ließ, an dem sich die besprochenen Schwebungen sehr gut beobachten lassen.

§ 24. Erzwungene Schwingungen des Doppelpendels.

An dem oberen Pendel möge jetzt ein periodisch wechselndes Drehmoment M angreifen, das durch

$$M = M_1 \sin \eta t \tag{122}$$

gegeben ist. Außerdem soll von äußeren Kräften nur noch das Gewicht an beiden Pendeln angreifen. Sollte auch an dem unteren Pendel noch ein periodisches Drehmoment angreifen (oder auch an diesem allein), so wäre ganz ähnlich zu verfahren, wie es hier geschehen wird.

Wir wollen uns damit begnügen, die Formeln unter der Voraussetzung aufzustellen, daß die Ausschläge als klein betrachet werden dürfen, da dies bei praktischen Anwendungen der Schwingungstheorie fast stets ausreicht, abgesehen davon, daß man auch nur unter dieser Voraussetzung zu einer verhältnismäßig einfachen Theorie des Bewegungsvorgangs gelangen kann.

Die Bewegungsgleichungen werden aus den in § 19 und 20 aufgestellten erhalten, indem man einfach das der neu hinzukommenden äußeren Kraft entsprechende Glied beifügt. Die auf die Koordinate φ reduzierte neu hinzukommende Kraft ist gleich M zu setzen, da $M\delta\varphi$ die bei einer virtuellen Bewegung $\delta\varphi$ geleistete Arbeit angibt, während M zu der auf die Koordinate ψ reduzierten Kraft nichts beiträgt. Auf Grund dieser Überlegungen erhält man an Stelle der Gleichungen (91) S. 103 jetzt die Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} a\varphi + b\frac{d^2\varphi}{dt^2} + c\frac{d^2\psi}{dt^2} &= M_1 \sin \eta t \\ d\psi + e\frac{d^2\psi}{dt^2} + c\frac{d^2\varphi}{dt^2} &= 0 \end{aligned}\right\} . \tag{123}$$

Ähnlich wie früher im vierten Bande bei den erzwungenen Schwingungen eines einzelnen materiellen Punktes, läßt sich auch hier die Lösung der Bewegungsgleichungen aus zwei Teilen zusammensetzen. Der erste Teil bildet die allgemeine Lösung der reduzierten Gleichungen (91), die aus den hier vor-

liegenden Gleichungen wieder hervorgehen, wenn man M_1 gleich Null setzt, und dieser uns bereits bekannte Teil enthält die vier willkürlichen Integrationskonstanten $A, B, C, D,$ durch die man die Lösung jedem beliebig gegebenen Anfangszustande anpassen kann. Der zweite Teil dagegen bildet eine partikuläre Lösung der Gleichungen, die keine willkürlichen Konstanten mehr enthält. Es handelt sich also jetzt nur noch darum, diesen zweiten Teil aufzufinden. Dazu setze ich

$$\varphi_2 = E \sin \eta t + F \cos \eta t. \tag{124}$$

Wenn dieser Ausdruck den Gleichungen genügen soll, muß ihm ein Wert ψ_2 entsprechen, der nach dem schon in § 20 angewendeten Eliminationsverfahren aus den Bewegungsgleichungen abgeleitet werden kann. Multipliziert man nämlich die erste mit e und die zweite mit c und subtrahiert, so erhält man zunächst

$$\psi = \frac{ae\varphi + (be - c^2)\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} - eM_1 \sin \eta t}{cd}.$$

Setzt man hier den Wert von φ_2 ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \psi_2 = & \frac{aeE - \eta^2(be - c^2)E - eM_1}{cd} \sin \eta t \\ & + F\frac{ae - \eta^2(be - c^2)}{cd} \cos \eta t. \end{aligned} \tag{125}$$

Die Konstanten E und F lassen sich jetzt so bestimmen, daß die beiden Bewegungsgleichungen von φ_2 und ψ_2 befriedigt werden. Setzt man diese Werte in die erste Gleichung ein und beachtet, daß die Gleichung für jeden Wert von t befriedigt werden muß, so zerfällt sie in zwei Gleichungen, von denen sich die eine auf die mit $\sin \eta t$, die andere auf die mit $\cos \eta t$ behafteten Glieder bezieht. Diese Gleichungen lauten nach einfacher Umformung

$$\left.\begin{aligned} E(\eta^4(be - c^2) - \eta^2(ae + bd) + ad) &= M_1(d - \eta^2 e) \\ F(\eta^4(be - c^2) - \eta^2(ae + bd) + ad) &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{126}$$

Die Koeffizienten von E und F auf der linken Seite dieser Gleichungen stimmen miteinander überein. Es kommt nun darauf an, ob sie von Null verschieden sind oder nicht. Macht η den Ausdruck in der Klammer zu Null, so ist η eine Lösung der Gleichung (95), für α, d. h. das periodische Drehmoment M steht in diesem Falle in Resonanz mit einer der beiden Eigenschwingungen, deren das Doppelpendel fähig ist. Die Gleichungen (126) liefern dann $E = \infty$ und F unbestimmt, d. h. die Schwingungen werden auch bei sehr kleinem Werte von M_1 so groß, daß sie nicht mehr als klein betrachtet werden können, womit unsere Formeln ihre Gültigkeit verlieren. Für den Fall der Resonanz würde es auch auf keinen Fall genügen, die Bewegungswiderstände zu vernachlässigen, wie wir es hier getan haben, sondern man müßte die Dämpfung in geeigneter Weise berücksichtigen, um die Lösung dem tatsächlich zu erwartenden Verhalten des Doppelpendels einigermaßen anzupassen.

Wir sehen also von dem Falle der Resonanz mit einer der beiden Eigenschwingungen des ganzen Verbandes ab und erhalten dann $F = 0$, während E aus der ersten der beiden Gleichungen (126) entnommen werden kann. Man überzeugt sich nun nachträglich leicht, daß auch die zweite der Bewegungsgleichungen (123) mit den so bestimmten Werten erfüllt wird. Das hängt damit zusammen, daß wir diese Gleichung schon vorher dazu herangezogen hatten, um den Ausdruck für ψ_2 abzuleiten. Die gesuchte partikuläre Lösung lautet daher

$$\left.\begin{aligned} \varphi_2 &= M_1 \frac{d - \eta^2 e}{\eta^4(be - c^2) - \eta^2(ae + bd) + ad} \sin \eta t \\ \psi_2 &= M_1 \frac{\eta^2 c}{\eta^4(be - c^2) - \eta^2(ae + bd) + ad} \sin \eta t \end{aligned}\right\} . \qquad (127)$$

Der letzte Ausdruck geht durch einfache algebraische Umformungen aus Gl. (125) hervor.

Ein besonderer Fall tritt ein, wenn $\eta^2 e = d$ ist, d. h. wenn das periodische Moment M mit den Schwingungen in Resonanz steht, die das untere Pendel auszuführen vermag, wenn das

obere Pendel festgehalten wird. In diesem Falle gehen die vorigen Gleichungen über in

$$\varphi_2 = 0,$$
$$\psi_2 = - M_1 \frac{e}{cd} \sin \eta t = - \frac{M_1}{c\eta^2} \sin \eta t.$$

Bei passend gewählten Anfangsbedingungen kann es daher vorkommen, daß das obere Pendel, an dem das periodische Moment M unmittelbar angreift, dauernd in Ruhe bleibt. Das untere Pendel führt dann die durch die zweite Gleichung dargestellte Schwingung aus, die in der Phase gegen die erregende Ursache um 180° verschoben ist. Für den ersten Anblick erscheint dieses Ergebnis vielleicht etwas auffällig. Aber man bedenke, daß es ja auf jeden Fall möglich ist, das obere Pendel festzuhalten, während das untere schwingt, und daß zum Festhalten ein Kräftepaar erforderlich ist, das ebenfalls einem periodischen Wechsel unterworfen sein muß. Wie groß das Kräftepaar zu einer bestimmten Zeit sein muß, um das obere Pendel festzuhalten, läßt sich aus der zuletzt aufgestellten Gleichung für ψ_2 unmittelbar entnehmen.

§ 25. Glocke und Klöppel.

Eine Glocke bildet mit dem an ihr drehbar aufgehängten Klöppel ein Doppelpendel, wie wir es in den vorhergehenden Paragraphen betrachtet haben. Solange die Schwingungen als klein betrachtet werden dürfen und kein Anschlagen des Klöppels an die Glocke stattfindet, gehorchen sie daher den bereits ausführlich besprochenen Gesetzen. Zu den gerade für die Glocke wichtigsten Ergebnissen dieser Untersuchung gehört vor allem die in § 21 entschiedene Frage, ob es vorkommen kann, daß bei den Schwingungen des Doppelpendels ψ dauernd gleich φ bleibt. Denn in diesem Falle schlägt der Klöppel überhaupt nicht an die Glocke an und die ganze Einrichtung verfehlt ihren Zweck. Als Bedingung dafür, daß ψ dauernd gleich φ bleiben kann, fanden wir in § 21 die in Gl. (104) ausgesprochene Beziehung zwischen den Konstanten des Verbandes

$$m_1(\theta s_1 - \theta_0 l) = ms(\theta_1 + m_1 s_1 l).$$

Es entsteht aber jetzt die Frage, ob diese unter der Voraussetzung kleiner Schwingungsausschläge abgeleitete Gleichung auch noch für größere Schwingungen, wie sie beim Läuten der Glocken vorkommen, die Bedingung für die Möglichkeit des Versagens der Einrichtung richtig angibt oder ob sie dann etwa durch eine andere zu ersetzen ist. Um diese Frage zu entscheiden, müssen wir auf die für beliebig große endliche Ausschläge gültigen Bewegungsgleichungen (90) zurückgehen. Wenn es auch nicht möglich ist, diese Gleichungen allgemein zu integrieren, so geben sie doch über solche besonderen Fragen ohne Schwierigkeit Aufschluß.

Wenn $\psi = \varphi$ sein soll, muß φ eine Funktion der Zeit sein, die den beiden Differentialgleichungen zugleich genügt, die man aus den Gleichungen (90) erhält, wenn man darin ψ durch φ ersetzt. Die Gleichungen lauten dann

$$-\sin\varphi \cdot g(ms + m_1 l) = (\theta + m_1 l^2)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + m_1 s_1 l \frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

$$-\sin\varphi \cdot g m_1 s_1 = \theta_1 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + m_1 s_1 l \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Löst man sie nach $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ auf, so erhält man dafür die beiden Werte

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -g\sin\varphi \cdot \frac{ms + m_1 l}{\theta + m_1 l^2 + m_1 s_1 l},$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -g\sin\varphi \cdot \frac{m_1 s_1}{\theta_1 + m_1 s_1 l},$$

die miteinander übereinstimmen müssen. Das trifft zu, wenn die beiden Brüche auf den rechten Seiten gleich sind, und ihre Gleichsetzung führt wieder auf die für die kleinen Schwingungen aufgestellte und vorher nochmals angeführte Gleichung (104) zurück. Das dort gefundene Kennzeichen bleibt daher auch für beliebig große endliche Schwingungsausschläge bestehen.

Man kann diese Untersuchung auch noch um einen Schritt weiter führen, indem man die Möglichkeit einer Bewegung des Doppelpendels untersucht, bei der zwar φ und ψ große Werte

erlangen, aber so, daß ihr Unterschied dauernd klein bleibt. Man setze dann $\psi = \varphi + \varrho$ in die Gleichungen (90) ein und streiche daraus alle Glieder, die von höherer Ordnung klein sind als ϱ. Man kann dann leicht beweisen, daß die betrachtete Bewegung nur dann möglich ist, wenn die beiden Brüche in den vorhergehenden Gleichungen wenigstens nahezu einander gleich sind.

Wenn die Bedingung für die Möglichkeit des Versagens der Glocke erfüllt ist, braucht darum das Versagen noch nicht in Wirklichkeit einzutreten. Dies hängt vielmehr außerdem noch von den Anfangsbedingungen des Bewegungsvorgangs ab. Da aber die Erfahrung gelehrt hat, daß ein Versagen, wenn die Möglichkeit dazu gegeben ist, tatsächlich leicht eintritt, wird man dafür zu sorgen haben, daß die durch Gl. (104) ausgesprochene Bedingung weder genau noch angenähert erfüllt ist.

Betrachtet man den Klöppel als einen materiellen Punkt, der mit einer als gewichtslos anzusehenden Stange an der Glocke aufgehängt ist, so vereinfacht sich die Bedingung für das Versagen erheblich, indem $\Theta_0 = 0$ und $\Theta_1 = m_1 s_1^2$ gesetzt werden kann. Gl. (104) geht dann über in

$$\Theta = ms(s_1 + l),$$

wofür, wenn man die reduzierte Pendellänge L_{red} der Glocke

$$L_{red} = \frac{\Theta}{ms}$$

einführt, noch kürzer geschrieben werden kann

$$L_{red} = s_1 + l.$$

Das Versagen ist also zu befürchten, wenn der als materieller Punkt aufzufassende Klöppel mit dem Schwingungsmittelpunkt der Glocke zusammenfällt.

Wenn der Klöppel während des Läutens an die Glocke anschlägt, entsteht natürlich ein ganz anderer Bewegungsvorgang, als wir ihn hier betrachtet haben, so daß die vorausgehenden Formeln auf die läutende Glocke nicht angewendet werden dürfen.

§ 26. Andere Ableitung der Bewegungsgleichungen für das Doppelpendel.

Schon im Anfang dieses Abschnitts habe ich erwähnt, daß das Verfahren von Lagrange, so nützlich es auch ist, doch in der Regel entbehrt und durch andere, früher schon besprochene einfachere Hilfsmittel für die Ableitung der Bewegungsgleichungen ersetzt werden kann. Nachdem ich das Beispiel des Doppelpendels dazu benutzt habe, um in großer Ausführlichkeit ein Muster für die eingehende dynamische Untersuchung derartiger mehrläufiger Verbände aufzustellen, wird es sich empfehlen, wenn ich wenigstens nachträglich noch zeige, wie man bei diesem Beispiele auf anderen Wegen zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen gelangen kann.

Eine Bewegungsgleichung kann man stets in sehr einfacher Weise mit Hilfe des Satzes von der lebendigen Kraft erhalten. Bezeichnen wir mit V die potentielle Energie, die dem Verbande in der augenblicklichen Lage zukommt, weil die Schwerpunkte der Körper, aus denen er gebildet ist, höher liegen als in der tiefsten Lage, die sie im Verlaufe der Bewegung einnehmen können, so ist nach dem Satze von der lebendigen Kraft $V + L$ gleich einer von der Zeit unabhängigen Größe, solange andere äußere Kräfte als die Gewichte der Körper nicht vorkommen.

Bei der in Abb. 7, S. 97, gezeichneten Lage des Doppelpendels liegt der Schwerpunkt S von A um den Betrag $s - s\cos\varphi$ höher als in der tiefsten Lage und S_1 hat sich, wie man ebenfalls leicht findet, um $l - l\cos\varphi + s_1 - s_1\cos\psi$ gehoben. Für die lebendige Kraft können wir den in Gl. (89), S. 100, aufgestellten Ausdruck einsetzen, womit wir die Gleichung

$$gms(1-\cos\varphi) + gm_1 l(1-\cos\varphi) + gm_1 s_1(1-\cos\psi) + \frac{1}{2}\,\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\,\theta_1\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \frac{m_1}{2}\left(l^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + 2ls_1\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\psi}{dt}\cos(\psi-\varphi)\right) = C_1 \tag{128}$$

erhalten. Dabei bedeutet C_1 eine aus den Anfangsbedingungen zu berechnende Konstante.

Diese Gleichung hat außer ihrer einfachen Ableitung gegenüber den früher benutzten Bewegungsgleichungen (90) auch noch den Vorzug, daß sie nur von der ersten Ordnung ist. Sie bildet, wie man sagen kann, ein erstes Integral der Gleichungen (90). Man kann dieses Integral auch aus den Gleichungen (90) selbst ableiten. Zu diesem Zwecke multipliziere man die erste von ihnen mit $\frac{d\varphi}{dt}$, die zweite mit $\frac{d\psi}{dt}$ und addiere. Auf der rechten Seite lassen sich dann die mit dem Cosinus oder Sinus von $\psi - \varphi$ multiplizierten Glieder zu einem einzigen Differentialquotienten nach t zusammenfassen, womit die Gleichung ohne weiteres integrabel wird. Die Ausführung der Integration liefert hierauf eine Gleichung, die mit Gl. (128) im wesentlichen übereinstimmt. Man muß dabei nur beachten, daß sich die auf der linken Seite von Gl. (128) vorkommenden konstanten Glieder gms usf. mit der Konstanten C_1 auch zu einer einzigen unbestimmt bleibenden Konstanten zusammenfassen lassen.

Verfährt man in derselben Weise mit den für kleine Schwingungen gültigen Bewegungsgleichungen (91), S. 103, so erhält man die Integralgleichung

$$\frac{a}{2}\varphi^2 + \frac{d}{2}\psi^2 + \frac{b}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{e}{2}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + c\frac{d\psi}{dt}\frac{d\varphi}{dt} = C_1, \qquad (129)$$

und das ist auch die Form, in die Gl. (128) übergeht, wenn man darin die höheren Potenzen von φ und ψ gegen die zweiten vernachlässigt.

Nun hat man aber noch eine zweite Bewegungsgleichung nötig. Diese können wir auf Grund des Flächensatzes ableiten. Der auf die Drehachse α des oberen Pendels bezogene Drall B des ganzen Verbandes läßt sich aus zwei Teilen zusammensetzen, indem wir die Bewegung in zwei Teile zerlegen, so daß sich beim ersten Teile beide Pendel zusammen (ohne Drehung um die Aufhängeachse β) wie ein einziger starrer Körper bewegen, worüber sich dann noch die Drehung des unteren Pendels relativ zum oberen lagert. Der erste Teil B_1

von B ist gleich dem Produkte aus der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ und dem auf α bezogenen Trägheitsmomente des ganzen Verbandes. Dabei kann das Trägheitsmoment des unteren Pendels gleich θ_0 plus m_1 mal dem Quadrate des Abstandes des Schwerpunktes S_1 von α gesetzt und dieses Quadrat nach dem Cosinussatze für das aus α, β und S_1 gebildete Dreieck berechnet werden. Damit erhalten wir

$$B_1 = \frac{d\varphi}{dt}\left(\theta + \theta_0 + m_1(l^2 + s_1^2 + 2ls_1 \cos(\psi - \varphi))\right).$$

Den Drall B_2 für den zweiten Bewegungsanteil setzen wir wieder aus zwei Teilen zusammen. Die Drehung des unteren Pendels gegen das obere, die mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\psi}{dt} - \frac{d\varphi}{dt}$ erfolgt, kann nämlich zerlegt werden in eine Translationsbewegung mit der dem Schwerpunkte S_1 dabei zukommenden Geschwindigkeit und in eine Rotationsbewegung um diesen Schwerpunkt. Die Schwerpunktsgeschwindigkeit hat die Größe

$$s_1\left(\frac{d\psi}{dt} - \frac{d\varphi}{dt}\right)$$

und das von α auf die Richtung dieser Geschwindigkeit gefällte Perpendikel hat die Länge

$$l\cos(\psi - \varphi) + s_1 .$$

Der zur Rotationsbewegung gehörige Drall ist für jeden Momentenpunkt gleich groß, und zwar gleich dem Produkte aus θ_0 und der Winkelgeschwindigkeit. Hiernach erhalten wir

$$B_2 = \left(\frac{d\psi}{dt} - \frac{d\varphi}{dt}\right)\left(m_1 s_1 (l\cos(\psi - \varphi) + s_1) + \theta_0\right).$$

Im ganzen wird daher der Drall des Verbandes nach einfachen Umformungen gefunden gleich

$$B = \frac{d\varphi}{dt}\left(\theta + m_1 l^2 + m_1 s_1 l \cos(\psi - \varphi)\right)$$
$$+ \frac{d\psi}{dt}\left(\theta_1 + m_1 s_1 l \cos(\psi - \varphi)\right).$$

Nach dem Flächensatze ist die Änderungsgeschwindigkeit des Dralls gleich der Summe der auf die Achse α bezogenen statischen Momente der äußeren Kräfte. Der Auflagerdruck in α gehört zwar jetzt zu diesen äußeren Kräften, da das Gestell in den Punkthaufen, auf den wir den Flächensatz anwenden wollen, nicht mit einzurechnen ist; er trägt aber zur Momentensumme nichts bei, weil er die aus diesem Grunde mit α zusammengelegte Momentanachse schneidet. Die Momentensumme aus den beiden Gewichten ist dagegen gleich

$$gms \sin \varphi + gm_1(l \sin \varphi + s_1 \sin \psi),$$

und zwar dreht dieses Moment entgegengesetzt der Richtung, in der wir die Winkelgeschwindigkeiten positiv rechneten. Führen wir nun die Differentiation an B aus, so liefert uns der Flächensatz die gesuchte zweite Bewegungsgleichung, die sich nach Streichen von zwei gegeneinander fortfallenden Gliedern schreiben läßt

$$\begin{aligned} &- g \sin \varphi (ms + m_1 l) - gm_1 s_1 \sin \psi \\ &= \frac{d^2 \varphi}{dt^2} (\theta + m_1 l^2 + m_1 s_1 l \cos(\psi - \varphi)) \\ &+ \frac{d^2 \psi}{dt^2} (\theta_1 + m_1 s_1 l \cos(\psi - \varphi)) \\ &- m_1 s_1 l \sin(\psi - \varphi) \left(\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \right). \end{aligned} \tag{130}$$

Diese Gleichung in Verbindung mit Gl. (128) reicht aus, um daraus alle Eigenschaften der Bewegung ebenso abzuleiten, wie früher aus den nach dem Verfahren von Lagrange erhaltenen Bewegungsgleichungen (90). In der Tat sieht man auch aus dem Vergleiche sofort, daß Gl. (130) durch Addition der beiden Gleichungen (90) zueinander entsteht. Daher stimmt auch die für den Fall kleiner Schwingungen aus Gl. (130) hervorgehende Gleichung mit jener überein, die man durch Addition der Gleichungen (91) erhält.

Ein anderes Verfahren zur Ableitung der Bewegungsgleichungen besteht in der unmittelbaren Anwendung des Prinzips von d'Alembert. Man bringt dazu an jedem Massen-

teilchen die Trägheitskräfte an, die sich in den Winkelbeschleunigungen und Winkelgeschwindigkeiten ausdrücken lassen, und schreibt zwei Momentengleichungen für die beiden Drehachsen an. Diese liefern ebenfalls sofort die beiden Bewegungsgleichungen.

Hiermit ist auch der Nachweis erbracht, daß man das Verfahren von Lagrange ganz entbehren kann, um die Theorie der Bewegung des Doppelpendels in derselben Vollständigkeit abzuleiten, wie es in den vorhergehenden Paragraphen geschehen war. Daß dieses Verfahren trotzdem ein sehr schätzenswertes Hilfsmittel bildet, das man nicht gerne entbehren möchte, wird aber dem Leser, der sich damit vertraut gemacht hat, nicht zweifelhaft sein. Es verhält sich damit ganz ähnlich wie mit den Sätzen von Castigliano in der Festigkeitslehre, die man zwar auch nicht unbedingt nötig hat, sondern durch andere Verfahren ersetzen kann, die man aber trotzdem sehr vermissen würde, wenn man sich vornehmen wollte, sie ganz zu vermeiden. Ich bin daher allerdings der Meinung, daß sich ein Ingenieur, der viel mit Aufgaben aus der Dynamik zu tun bekommt, mit dem Verfahren von Lagrange recht gründlich vertraut machen sollte. Dagegen will ich ihm keineswegs empfehlen, diesem Verfahren stets oder auch nur in der Regel den Vorzug zu geben und andere Verfahren darüber zu vernachlässigen. Wie man in der Werkstatt je nach der Art der gewünschten Bearbeitung bald der Drehbank, bald der Bohrmaschine oder einer anderen Werkzeugmaschine den Vorzug gibt, obschon es an sich möglich wäre, die Arbeit auf jeder dieser Maschinen auszuführen, so ist es auch hier nützlich, sich möglichst viele leistungsfähige Verfahren dienstbar zu machen und je nach dem beabsichtigten Zwecke das geeignetste auszuwählen.

§ 27. Das Fadenpendel mit elastischem Faden.

Als Beispiel für einen Verband, bei dem auch die inneren Kräfte während der Bewegung eine Arbeit leisten, betrachte ich jetzt die Schwingungen eines einfachen Fadenpendels, dessen

Faden bei der Bewegung elastische Längenänderungen erfährt. Um nicht zu weitläufig zu werden, begnüge ich mich mit der Untersuchung der ebenen Schwingungen, obschon auch für den allgemeineren Fall des Raumpendels die Betrachtungen in derselben Weise durchgeführt werden könnten.

Als allgemeine Koordinaten des Verbandes benutze ich den Winkel φ, den der Faden zur Zeit t mit der Lotrechten bildet, und die Fadenlänge l. Die Geschwindigkeit des schwingenden materiellen Punktes läßt sich in zwei zueinander rechtwinklige Komponenten $l\dot{\varphi}$ in der Richtung senkrecht zum Faden und $\dot{l}$ in der Richtung des Fadens zerlegen. Für die lebendige Kraft hat man daher den einfachen Ausdruck

$$L = \tfrac{1}{2} m(l^2\dot{\varphi}^2 + \dot{l}^2). \tag{131}$$

Hiervon sind die in den Gleichungen von Lagrange vorkommenden Differentialquotienten zu bilden. Man erhält der Reihe nach

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 2ml\frac{dl}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + ml^2\frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{l}} = m\dot{l}, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{l}}\right) = m\frac{d^2 l}{dt^2},$$

$$\frac{\partial L}{\partial l} = ml\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Jetzt hat man die auf die beiden Koordinaten reduzierte äußere Kraft, als die nur das Gewicht in Betracht kommt, aufzustellen. Das kann in bereits hinreichend besprochener Weise leicht geschehen und liefert

$$F_\varphi = -mgl\sin\varphi, \qquad F_l = mg\cos\varphi.$$

Außerdem sind in diesem Falle auch noch die auf die Koordinaten reduzierten inneren Kräfte anzugeben, soweit sie bei der Bewegung überhaupt eine Arbeit leisten. Wir zerlegen l in

$$l = l_1 + l_2$$

und verstehen unter l_1 die Länge des spannungslosen Fadens, unter l_2 daher die elastische Längenänderung zur Zeit t. Die Fadenspannung ist dann gleich cl_2, wenn man unter c eine Konstante versteht, die nach dem Hookeschen Elastizitätsgesetze berechnet werden kann. Bei einer virtuellen Verschiebung $\delta\varphi$ leistet die Fadenspannung keine Arbeit, bei der virtuellen Verschiebung δl dagegen eine negative Arbeit von der Größe $cl_2\delta l$. Hiernach ist

$$J_\varphi = 0, \quad J_l = -cl_2.$$

Setzen wir alle diese Werte in die auf beide Koordinaten anzuwendende Gleichung (79), S. 92, ein, so erhalten wir nach Streichen gemeinschaftlicher Faktoren die beiden Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} -g\sin\varphi &= 2\frac{dl_2}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + l\frac{d^2\varphi}{dt^2} \\ g\cos\varphi &= \frac{d^2 l_2}{dt^2} - l\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{c}{m}l_2 \end{aligned}\right\}. \tag{132}$$

Hierzu ist zu bemerken, daß man die erste dieser Gleichungen auch unmittelbar aus dem Flächensatze für den Aufhängepunkt als Momentenpunkt hätte ableiten können oder ferner auch beide Gleichungen durch Anschreiben von Komponentengleichungen mit Berücksichtigung des d'Alembertschen Prinzips. Endlich kann man auch noch auf Grund des Satzes von der lebendigen Kraft eine Gleichung anschreiben, die sich aus den beiden Gleichungen (132) ebenfalls ableiten läßt und die ein erstes Integral dieser Gleichungen bildet, nämlich

$$\frac{1}{2}\left(l^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dl}{dt}\right)^2\right) + \frac{1}{2}\frac{c}{m}l_2^2 - gl\cos\varphi = C_1. \tag{133}$$

Eine weitere allgemeine Integration ist dagegen nicht möglich. Wir wollen uns aber auch in diesem Falle nicht damit begnügen, die Differentialgleichungen der Bewegung überhaupt aufgestellt zu haben, sondern wollen noch versuchen, was sich aus ihnen herauslesen läßt, ohne daß sie allgemein integriert würden. Das Hauptshilfsmittel besteht auch hier darin, sich auf die Untersuchung von kleinen Schwingungen

zu beschränken. Dabei liegt aber hier insofern ein besonderer Fall vor, als man unter gewöhnlichen Umständen mit viel mehr Recht voraussetzen darf, daß l_2 sehr klein ist gegen l_1, als daß der Winkel φ durch eine sehr kleine Zahl dargestellt würde. Wir wollen dem dadurch Rechnung tragen, daß wir in erster Linie l_2 als sehr klein voraussetzen und zwar so, daß es als von zweiter Ordnung klein betrachtet wird, wenn daneben auch φ als klein gelten soll.

Zunächst betrachten wir die beiden Grenzfälle, für die sich die Bewegungsgleichungen ohne weiteres integrieren lassen. Setzen wir nämlich $\varphi = 0$, so ist damit die erste der Gleichungen (132) sofort erfüllt und die zweite geht über in

$$g = \frac{d^2 l_2}{dt^2} + \frac{c}{m} l_2.$$

Das ist die Gleichung einer einfachen harmonischen Schwingung, von der sich von vornherein voraussehen ließ, daß sie beim Fehlen jeder Pendelschwingung zu bestehen vermöchte. Die Lösung der Gleichung lautet

$$l_2 = \frac{mg}{c} + A \sin \alpha t, \tag{134}$$

wenn man unter α den Wert

$$\alpha = \sqrt{\frac{c}{m}} \tag{135}$$

versteht. Das erste Glied auf der rechten Seite von Gl. (134) gibt die durch das Gewicht des materiellen Punktes hervorgebrachte Verlängerung des Fadens an und die willkürliche Konstante A bedeutet die Amplitude der harmonischen Schwingung. Die Schwingungsdauer dieser Schwingung ist

$$T_1 = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}.$$

Der andere Grenzfall entsteht, wenn wir c als unendlich groß voraussetzen, d. h. er entspricht dem in der gewöhnlichen Pendeltheorie behandelten Falle des Fadenpendels mit unveränderlicher Fadenlänge. Wir dürfen indessen in den Bewegungsgleichungen l_2 nicht ohne weiteres gleich Null setzen, sondern

wir müssen l_2 als unendlich klein betrachten derart, daß cl_2 einen endlichen Wert behält, da ja dieses Produkt die Fadenspannung darstellt. Die erste der Gleichungen (132) geht hiermit über in

$$-g \sin \varphi = l_1 \frac{d^2 \varphi}{dt^2},$$

während man aus der zweiten

$$cl_2 = mg \cos \varphi + ml_1 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

erhält, d. h. man findet aus ihr die Fadenspannung. Setzen wir nachträglich auch noch φ als klein voraus, so liefert die erste Gleichung das Integral

$$\varphi = B \sin \beta t, \tag{136}$$

wenn man unter β den Wert

$$\beta = \sqrt{\frac{g}{l_1}} \tag{137}$$

versteht, und für die Schwingungsdauer dieser Schwingung erhält man die bekannte Näherungsformel der gewöhnlichen Pendeltheorie

$$T_2 = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}}.$$

Bei den Werten der Konstanten c, m und l_1, wie sie unter gewöhnlichen Umständen vorkommen, wird α weit größer sein als β oder T_1 weit kleiner als T_2. Auf diesen Umstand haben wir zu achten, um eine Näherungslösung der Gleichungen (132) abzuleiten, die man unter gewöhnlichen Umständen als gut zutreffend betrachten darf.

Wir zerlegen nämlich l_2 jetzt in zwei Glieder

$$l_2 = l_3 + l_4,$$

womit die letzte der Gleichungen (132) in die beiden Gleichungen

$$g \cos \varphi = \frac{d^2 l_3}{dt^2} - l \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{c}{m} l_3,$$

$$0 = \frac{d^2 l_4}{dt^2} + \frac{c}{m} l_4$$

zerfällt. Wenn l_2 und jeder seiner beiden Teile l_3 und l_4 sehr klein bleibt, kann sich die durch φ beschriebene Pendelschwingung nur sehr wenig von jener für den unausdehnbaren Faden unterscheiden. Wir können uns daher die Trennung von l_2 in l_3 und l_4 derart vorgenommen denken, daß l_3 nur langsam veränderliche Glieder enthält, während l_4 ausschließlich den schnell veränderlichen Schwingungsanteil von der Schwingungsdauer T_1 angibt. Wenn nun auch l_3 und l_4 von gleicher Größenordnung vorauszusetzen sind, so wird doch der zweite Differentialquotient von l_3 sehr klein sein gegen den von l_4 und zwar in dem Verhältnisse von β^2 zu α^2. Hieraus folgt, daß $\frac{d^2 l_3}{dt^2}$ auch sehr klein ist gegen $\frac{c}{m} l_3$ und die übrigen Glieder in der ersten der vorstehenden Gleichungen. Damit geht aber diese Gleichung in die für den Fall $c = \infty$ geltende über und $c l_3$ gibt die Fadenspannung an, die bei dem Pendel mit unveränderlicher Fadenlänge zu erwarten wäre.

Auch der erste Differentialquotient von l_3 kann weiterhin gegen den von l_4 vernachlässigt werden, da er klein gegen ihn ist von der Ordnung wie β zu α. Mit Weglassung von kleinen Größen läßt sich daher die erste der Gleichungen (132) ersetzen durch

$$-g \sin \varphi = 2 \frac{dl_4}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + l_1 \frac{d^2 \varphi}{dt^2}.$$

Hierbei ist bereits bekannt, daß

$$l_4 = A \sin \alpha t \quad \text{und} \quad \frac{dl_4}{dt} = A\alpha \cos \alpha t$$

gesetzt werden kann. Wir behalten daher φ als einzige unbekannte Funktion in der Differentialgleichung

$$g \sin \varphi + 2 A\alpha \cos \alpha t \frac{d\varphi}{dt} + l_1 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 0, \tag{138}$$

und aus der Integration der Gleichung können wir mit genügender Genauigkeit die Störungen erkennen, die in der Pendelbewegung hervorgerufen werden, wenn Schwingungen von der Art l_4 hinzutreten.

Da aber selbst die Integration dieser vereinfachten Gleichung noch zu viel Schwierigkeiten macht, zerlegen wir

auch noch φ in zwei Bestandteile φ_1 und φ_2, so daß φ_1 die Lösung der Pendelgleichung für den Fall unveränderlicher Fadenlänge, φ_2 also die daran anzubringende Verbesserung bedeutet. Wir dürfen dann von vornherein annehmen, daß φ_2 klein ist gegen φ_1. Gleichung (138) zerfällt damit in

$$g \sin \varphi_1 + l_1 \frac{d^2 \varphi_1}{d t^2} = 0,$$

$$g \varphi_2 \cos \varphi_1 + 2 A \alpha \cos \alpha t \frac{d\varphi}{dt} + l_1 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} = 0.$$

Wir werden nur einen unerheblichen Fehler begehen, wenn wir in der zweiten Gleichung an Stelle von $\frac{d\varphi}{dt}$ einen Näherungswert einführen, wie er sich aus der ersten Gleichung für $\frac{d\varphi_1}{dt}$ ableiten läßt, also $\frac{d\varphi_2}{dt}$ demgegenüber vernachlässigen. Diesen Näherungswert entnehmen wir aus Gl. (136). Außerdem dürfen wir auch mit demselben Rechte in der zweiten Gleichung $\cos \varphi_1$ gleich Eins setzen. Hiermit geht die Differentialgleichung für φ_2 über in

$$g \varphi_2 + 2 A B \alpha \beta \cos \alpha t \cos \beta t + l_1 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} = 0. \tag{139}$$

Nach allen diesen Vernachlässigungen, die aber doch noch innerhalb zulässiger Grenzen bleiben, sind wir in den Stand gesetzt, die zuletzt erhaltene Gleichung zu integrieren. Die allgemeine Lösung besteht aus zwei Teilen, von denen der erste die Lösung der reduzierten Gleichung bildet, die man erhält, wenn man das von φ_2 freie Glied streicht, und der zweite Teil ist ein partikuläres Integral, das übrig bleibt, wenn man den ersten Teil gleich Null setzt. Diesen ersten Teil haben wir aber hier in der Tat gleich Null zu setzen, da das, was auf ihn entfällt, schon in dem andern Summanden φ_1 von φ berücksichtigt ist. Für φ_2 bleibt daher nur das von den willkürlichen Integrationskonstanten freie partikuläre Integral übrig. Dieses Integral ist von der Form

$$\varphi_2 = a \sin \alpha t \sin \beta t + b \cos \alpha t \cos \beta t,$$

wobei a und b zwei noch näher zu bestimmende Konstanten bedeuten. Bildet man hiervon den zweiten Differentialquotienten, so erhält man

$$\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = \sin\alpha t \sin\beta t(2b\alpha\beta - a\alpha^2 - a\beta^2)$$
$$+ \cos\alpha t \cos\beta t(2a\alpha\beta - b\alpha^2 - b\beta^2),$$

und wenn man diese Werte in die Differentialgleichung (139) einsetzt, findet man, daß sie in der Tat erfüllt ist, wenn man die Konstanten a und b so wählt, daß

$$ag + l_1(2b\alpha\beta - a\alpha^2 - a\beta^2) = 0,$$
$$bg + l_1(2a\alpha\beta - b\alpha^2 - b\beta^2) + 2AB\alpha\beta = 0$$

wird. Löst man diese Gleichungen nach a und b auf und beachtet dabei den durch Gl. (137) angegebenen Wert von β, so erhält man zunächst aus der ersten Gleichung

$$a = b\frac{2\beta}{\alpha}.$$

Nun hatten wir aber früher schon Gebrauch davon gemacht, daß α weit größer ist als β. Daher kann nachträglich a gegen b vernachlässigt werden, und wenn dies geschieht, finden wir schließlich für φ_2

$$\varphi_2 = \frac{2AB\beta}{\alpha l_1}\cos\alpha t\cos\beta t. \tag{140}$$

Von den Konstanten bedeutete zunächst B die Amplitude der Pendelschwingung φ_1, und die Formel bestätigt uns, was vorauszusehen war, daß der größte Absolutbetrag, den φ_2 annehmen kann, nur einen sehr kleinen Teil von B ausmacht. A war nämlich die Amplitude der elastischen Schwingung l_4, die nur einen sehr kleinen Teil von l_1 ausmacht. Außerdem ist aber auch noch das Verhältnis $\beta : \alpha$ ein kleiner Bruch.

Wenn φ_1 gleich A oder $\sin\alpha t$ zu Eins wird, ist $\cos\alpha t$ und hiermit φ_2 gleich Null. An den Grenzen des Ausschlags stimmt daher jedesmal φ mit φ_1 überein, und daraus folgt, daß eine Korrektion in der Formel für die Schwingungsdauer wegen der elastischen Schwingungen l_4 selbst dann, wenn deren Amplitude B verhältnismäßig groß sein sollte, nicht erforderlich ist. Anders würde freilich das Ergebnis ausfallen, wenn man die Betrachtung auf die langsam veränderliche Schwingung l_3 ausdehnen wollte, wovon aber hier abgesehen werden soll.

Insofern ist daher die Untersuchung, die wir hier anstellten, ergebnislos verlaufen. Ihre Bedeutung liegt nur darin, daß sie ein Beispiel dafür liefert, wie man durch geeignete Vernachlässigungen schließlich doch noch zu einer brauchbaren Näherungslösung gelangen kann, wenn die genauen Differentialgleichungen nicht integriert werden können.

§ 28. Auflagerkräfte und Spannungen.

Wenn es bei einem Verbande zulässig ist, die Arbeiten der inneren Kräfte zu vernachlässigen, die einzelnen Glieder, aus denen er zusammengesetzt ist, also als starre Körper zu betrachten, kommen die Spannungen, die Gelenkdrucke usf., die zwischen den Gliedern übertragen werden, bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen nach dem Verfahren von Lagrange überhaupt nicht in Betracht. Man braucht sie nicht zu kennen, um die Gleichungen aufzustellen, und man erfährt auch nichts über sie durch die Lösung der Gleichungen. Zu praktischen Zwecken ist es aber gewöhnlich nötig, einzelne dieser inneren Kräfte zu ermitteln, um die erforderliche Stärke der von ihnen beanspruchten Konstruktionsteile danach bemessen zu können. Das kann nun zwar auch nachträglich noch durch andere Betrachtungen geschehen, wenn die Bewegung des Verbandes bereits ermittelt ist. Aber auch das Verfahren von Lagrange selbst kann dazu dienen, wenn es in geeigneter Weise angewendet wird.

Um z. B. die durch eine Stange übertragene Zug- oder Druckkraft zu bestimmen, lege man einen Schnitt durch die Stange und lasse außer den sonst vorkommenden Bewegungsmöglichkeiten auch noch eine Verschiebung der beiden Stangenhälften gegeneinander zu. Hierdurch erhält man einen neuen Verband, bei dem die Zahl der Freiheitsgrade um einen vermehrt ist. Man bildet dafür den Ausdruck für die lebendige Kraft unter Mitberücksichtigung des neu hinzugekommenen Freiheitsgrades und erhält nach Ausführung der daran vorzunehmenden Differentiationen die Bewegungsgleichungen nach dem gewöhnlichen Verfahren. Eine dieser Gleichungen bezieht

sich auf die zu dem neu eingeführten Freiheitsgrad gehörige allgemeine Koordinate. Man braucht dann nur nachträglich in dieser Gleichung die zugehörige allgemeine Koordinate nebst ihren Differentialquotienten gleich Null zu setzen, um auf den früheren Fall des ursprünglich gegebenen Verbandes zurückzukommen. Die Gleichung enthält aber die zu der genannten Koordinate gehörige reduzierte Kraft J, die nichts anderes ist als die gesuchte Spannung, und sie kann nach dieser Unbekannten sofort aufgelöst werden.

Es ist nicht nötig, hier noch ein besonderes Beispiel zur Erläuterung des beschriebenen Verfahrens zu besprechen, da schon die Betrachtungen des vorigen Paragraphen dazu dienen können. Um die Spannung im Faden eines Fadenpendels unter der Voraussetzung einer unveränderlichen Fadenlänge zu berechnen, hat man nach der gegebenen Vorschrift zunächst eine Längenänderung des Fadens als möglich in Aussicht zu nehmen und hierfür so, wie es im Eingange des vorigen Paragraphen, wenn auch in anderer Absicht, geschehen war, die Bewegungsgleichungen (132) aufzustellen. Der einzige Unterschied besteht nur darin, daß man J_t nicht mit l_2 in Zusammenhang bringt, sondern diese Kraft als eine unbekannte, von l_2 unabhängige Kraft in die zweite der Bewegungsgleichungen einführt. Man braucht dann nur nachträglich l_2 gleich Null zu setzen und die letzte der Gleichungen (132) nach J_t aufzulösen, während die erste dieser Gleichungen wieder in die gewöhnliche Pendelgleichung übergeht.

Zum Beweise für die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung genügt die Bemerkung, daß es nach dem allgemeinen Grundsatze der Festigkeitslehre stets zulässig ist, einen Teil eines Körpers als einen selbständigen Körper aufzufassen, für den alle Sätze der Mechanik gültig bleiben, sobald man die vorher in der Schnittfläche übertragenen inneren Kräfte durch gleich große und gleich gerichtete äußere Kräfte ersetzt. Der mit dem durchschnittenen Teile versehene Verband muß sich daher, wenn an den Schnittflächen entsprechende äußere Kräfte angebracht sind, ebenso verhalten, als wenn der Teil nicht durchschnitten wäre. Andererseits bildet aber der Verband mit dem

durchschnittenen Teile, bei dem keine relativen Verschiebungen der Teile gegeneinander vorkommen, einen speziellen Fall des allgemeineren Verbandes, bei dem solche Verschiebungen zugelassen werden. Daher gelten für ihn auch die Gleichungen des allgemeineren Verbandes mit der nachträglich anzubringenden Zusatzbedingung, daß die Kraft in der Schnittfläche so gewählt werden muß, daß die Verschiebungen in der Schnittfläche, die im allgemeinen Falle möglich sind, bei ihm zum Verschwinden kommen.

Übrigens war von dieser Schlußweise schon bei den zu Gl. (136) führenden Betrachtungen des vorigen Paragraphen Gebrauch gemacht worden. Hier ist das Verfahren nur etwas allgemeiner dargestellt.

§ 29. Das rollende Rad.

Schon in § 13 habe ich das rollende Rad als Beispiel für einen Verband mit nicht-holonomen Bedingungen besprochen, bei den weiter folgenden Betrachtungen Fälle dieser Art aber ausdrücklich ausgeschlossen. Nachträglich soll aber dieser sehr bemerkenswerte Bewegungsvorgang auch noch eine eingehendere Untersuchung erfahren. Die unmittelbare Anwendung der Gleichungen von Lagrange ist dabei freilich nicht zulässig; doch schließt dies nicht aus, daß man durch die Anwendung des zu diesen Gleichungen führenden Gedankenganges auf Grund erneuter sorgfältiger Erwägung aller Einzelheiten ebenfalls zu dem Ziele der Aufstellung der Bewegungsgleichungen gelangen kann.

Zu diesem Zwecke lassen wir zunächst die nicht-holonomen Bedingungen fallen, betrachten also das Rad unter der Voraussetzung, daß es über den Fußboden auch zu gleiten vermag. Freilich soll dies nicht widerstandslos geschehen, sondern wir nehmen an, daß dabei eine Reibung auftritt, die zwar vorläufig das Gleiten nicht verhindern soll, dabei aber doch während des Gleitens eine Arbeit leistet.

Abb. 10, die ich aus Band IV herübergenommen habe, gibt eine axonometrische Ansicht des Rades und Abb. 11 zeigt einen Grundriß des Rades in seiner augenblicklichen Stellung mit einer rechts oben angefügten Seitenansicht. Zur Beschreibung

dieser Stellung benutze ich die rechtwinkligen Koordinaten xy des Aufsitzpunktes, den Winkel φ, den die in den Fußboden fallende Radtangente mit der X-Achse bildet, den Winkel ψ, den die Radebene mit der Fußbodenebene einschließt, und schließlich den Winkel χ, den ein auf dem Rade festgelegter Halbmesser mit dem nach dem Berührungspunkte gehenden Halbmesser einschließt. Da das Rad jetzt auch gleiten darf, kann sich jede dieser fünf allgemeinen Koordinaten bei einer virtuellen Bewegung unabhängig von den übrigen ändern. Das Rad hat daher fünf Freiheitsgrade und keine holonomen Bedingungen. Wir sind daher jetzt berechtigt, das Verfahren von Lagrange ohne weiteres zur Ableitung der Bewegungsgleichungen anzuwenden, falls wir nur die Arbeit der inneren Kräfte entsprechend berücksichtigen.

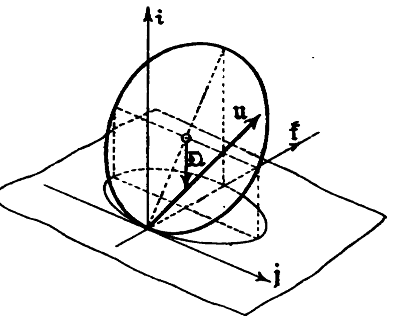


Abb. 10.

Um den Ausdruck für die lebendige Kraft aufstellen zu können, berechnen wir zuerst das Quadrat der Schwerpunktsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$. Einer virtuellen Änderung δx von x entspricht ein gleich großer Schwerpunktsweg. Ändert sich nur φ um $\delta\varphi$, so erfährt der Schwerpunkt eine Verschiebung in horizontaler Richtung um den Betrag $r\cos\psi\cdot\delta\varphi$, und die Projektion dieses Weges auf die X-Achse wird daraus durch Multiplikation mit $\cos\varphi$ gefunden. Bei einer virtuellen Änderung $\delta\psi$ erfährt der Schwerpunkt

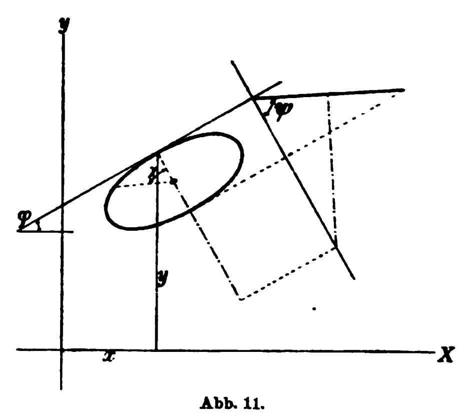


Abb. 11.

eine Verschiebung von der Größe $r\delta\psi$. Die Horizontalkomponente dieser Verschiebung ist gleich $r\delta\psi \sin\psi$, und wenn wir diese noch weiter nach der X- und der Y-Richtung zerlegen, erhalten wir für die X-Komponente den Betrag $-r\delta\psi \sin\psi \sin\varphi$. Die virtuellen Verschiebungen δy und $\delta\chi$ tragen zu einer Verschiebung des Schwerpunkts in der Richtung der X-Achse nichts bei. Daraus folgt im ganzen für die X-Komponente der Schwerpunktsgeschwindigkeit, wenn sich alle fünf Koordinaten zugleich ändern,

$$\dot{x} + r\cos\psi\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} - r\sin\psi\sin\varphi\cdot\dot{\psi}.$$

In der gleichen Weise lassen sich die Komponenten der Schwerpunktsgeschwindigkeit in der Richtung der Y-Achse und der zur Fußbodenebene senkrecht stehenden Z-Achse berechnen. Im ganzen erhalten wir damit

$$\mathfrak{v}_0^2 = (\dot{x} + r\cos\psi\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} - r\sin\psi\sin\cdot\dot{\psi})^2$$
$$+ (\dot{y} + r\cos\psi\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} + r\sin\psi\cos\varphi\cdot\dot{\psi})^2 + (r\cos\psi\cdot\dot{\psi})^2.$$

Durch Ausführen der Quadrierungen läßt sich dafür auch schreiben

$$\begin{aligned}\mathfrak{v}_0^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &+ 2\dot{x}r(\cos\psi\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} - \sin\psi\sin\varphi\cdot\dot{\psi})\\ &+ 2\dot{y}r(\cos\psi\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} + \sin\psi\cos\varphi\cdot\dot{\psi}) \qquad (141)\\ &+ r^2\cos^2\psi\cdot\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\psi}^2.\end{aligned}$$

Die Multiplikation dieses Ausdrucks mit der halben Masse des Radreifs liefert die von der Schwerpunktsgeschwindigkeit herrührende Translationsenergie. Nun schreiten wir zur Berechnung der Rotationsenergie, die der Drehung um eine durch den Schwerpunkt gehende Achse entspricht. Virtuelle Änderungen von x und y führen zu keiner Drehung des Rades. Einer virtuellen Änderung $\delta\varphi$ entspricht eine Drehung um eine zur Fußbodenebene senkrecht stehende Achse. Wir zerlegen diese Drehung in zwei Komponenten $\delta\varphi\cos\psi$ um die zur Radebene senkrecht stehende Achse und $\delta\varphi\sin\psi$ um den durch den Aufsitzpunkt des Rades gehenden Durchmesser. Bei

der Änderung $\delta\psi$ dreht sich das Rad um seinen horizontalen Durchmesser und bei der Änderung $\delta\chi$ um die zur Radebene senkrecht stehende Achse. Ersetzen wir die $\delta\varphi$ usf. durch die Geschwindigkeiten $\dot\varphi$ usf., so haben wir die Winkelgeschwindigkeitskomponenten der Raddrehung bezogen auf Trägheitshauptachsen des Rades. Für die senkrecht zur Radebene stehende Achse ist das Trägheitsmoment gleich mr^2, für einen Durchmesser die Hälfte davon.

Nach Gl. (112) von Band IV, S. 166 der 3. Aufl. kann die lebendige Kraft eines rotierenden Körpers nach der Formel

$$L = \tfrac{1}{2} u_1^2 \theta_x + \tfrac{1}{2} u_2^2 \theta_y + \tfrac{1}{2} u_3^2 \theta_z$$

berechnet werden, wenn $u_1 u_2 u_3$ die Winkelgeschwindigkeitskomponenten in den Richtungen der Hauptträgheitsachsen und die θ die zugehörigen Hauptträgheitsmomente bedeuten. Setzen wir die hier zutreffenden Werte ein, so erhalten wir für die Rotationsenergie

$$\tfrac{1}{2} mr^2 (\cos\psi \cdot \dot\varphi + \dot\chi)^2 + \tfrac{1}{4} mr^2 \sin^2\psi \cdot \dot\varphi^2 + \tfrac{1}{4} mr^2 \dot\psi^2.$$

Addieren wir hierzu die vorher festgestellte Translationsenergie, so finden wir für die lebendige Kraft des Rades den Ausdruck

$$\begin{aligned} L = \tfrac{1}{2} m (\dot x^2 + \dot y^2) &+ m\dot x r (\cos\psi \cos\varphi \cdot \dot\varphi - \sin\psi \sin\varphi \cdot \dot\psi) \\ &+ m\dot y r (\cos\psi \sin\varphi \cdot \dot\varphi + \sin\psi \cos\varphi \cdot \dot\psi) \qquad (142) \\ &+ \tfrac{1}{4} mr^2 \{3\dot\psi^2 + (1 + \cos^2\psi) \cdot \dot\varphi^2 + 2(\dot\chi + \cos\psi \cdot \dot\varphi)^2\}. \end{aligned}$$

Wir stellen jetzt zuerst die auf die Koordinate ψ bezogene Gleichung von Lagrange auf. Da mit einer virtuellen Änderung $\delta\psi$ kein Gleiten verbunden ist, leisten die inneren Kräfte keine Arbeit und die auf diese Koordinate reduzierte äußere Kraft ist

$$F_\psi = -mgr\cos\psi.$$

Für die Differentialquotienten der lebendigen Kraft erhalten wir

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = -m\dot x r \sin\psi \sin\varphi + m\dot y r \sin\psi \cos\varphi + \frac{3}{2} m r^2 \dot\psi,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\psi}\right) = -mr\frac{d^2x}{dt^2}\sin\psi\sin\varphi + mr\frac{d^2y}{dt^2}\sin\psi\cos\varphi + \frac{3}{2}mr^2\frac{d^2\psi}{dt^2} + \Omega,$$

$$\frac{dL}{d\psi} = \Omega - \frac{mr^2}{2}\cos\psi\sin\psi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - mr^2\left(\frac{d\chi}{dt} + \cos\psi\frac{d\varphi}{dt}\right)\sin\psi\cdot\frac{d\varphi}{dt}.$$

Mit Ω ist in den beiden letzten Gleichungen eine Summe von vier Gliedern bezeichnet, die in den beiden Gleichungen miteinander übereinstimmen und sich daher beim Aufstellen der Gleichung von Lagrange gegeneinander wegheben. Die Gleichung von Lagrange

$$F_\psi = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\psi}\right) - \frac{\partial L}{\partial \psi}$$

geht beim Einsetzen dieser Werte über in

$$\begin{aligned} -g\cos\psi = &-\frac{d^2x}{dt^2}\sin\psi\sin\varphi + \frac{d^2y}{dt^2}\sin\psi\cos\varphi + \frac{3r}{2}\frac{d^2\psi}{dt^2} \\ &+ \frac{3r}{2}\sin\psi\cos\psi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + r\sin\psi\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\chi}{dt}. \end{aligned} \tag{143}$$

In derselben Weise können auch die Bewegungsgleichungen für die vier anderen Koordinaten gebildet werden. Bei virtuellen Änderungen $\delta\varphi$, $\delta\chi$, δx oder δy bleibt der Schwerpunkt entweder in Ruhe oder er verschiebt sich nur in horizontaler Richtung, so daß die auf diese Koordinaten reduzierte äußere Kraft gleich Null ist. Dagegen leisten die Reibungen an der Aufsitzstelle des Rades eine Arbeit. Wir denken uns diese Reibungen zu einer Resultierenden mit den Komponenten X und Y und einem Moment M mit vertikalem Momentenvektor zusammengesetzt. Durch die Einführung dieses Momentes M soll der bohrenden Reibung Rechnung getragen werden, die sich einer Wendebewegung des Rades widersetzt. Will man die bohrende Reibung dagegen vernachlässigen, so kann dies dadurch geschehen, daß man späterhin M gleich Null setzt.

Für die Koordinate φ soll die Bildung der Bewegungsgleichung nochmals im einzelnen vorgenommen werden. Man findet zunächst

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r \dot{x} \cos\psi \cos\varphi + m r \dot{y} \cos\psi \sin\varphi$$

$$+ \frac{m r^2}{2}(1 + 3\cos^2\psi)\dot{\varphi} + m r^2 \cos\psi \cdot \dot{\chi},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m r \frac{d^2 x}{dt^2}\cos\psi \cos\varphi + m r \frac{d^2 y}{dt^2}\cos\psi \sin\varphi + \mathfrak{Q}_1$$

$$+ \frac{m r^2}{2}(1 + 3\cos^2\psi)\frac{d^2\varphi}{dt^2} - 3 m r^2 \cos\psi \sin\psi \frac{d\psi}{dt}\frac{d\varphi}{dt}$$

$$+ m r^2 \cos\psi \frac{d^2\chi}{dt^2} - m r^2 \sin\psi \frac{d\psi}{dt}\frac{d\chi}{dt},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \mathfrak{Q}_1,$$

wobei wiederum unter $\mathfrak{Q}_1$ eine Summe von vier Gliedern zu verstehen ist, die sich weiterhin weghebt. Die Gleichung von Lagrange lautet beim Einsetzen dieser Werte

$$\begin{aligned}\frac{M}{m r} = \frac{d^2 x}{dt^2}\cos\psi\cos\varphi + \frac{d^2 y}{dt^2}\cos\psi\sin\varphi + \frac{r}{2}\frac{d^2\varphi}{dt^2}(1 + 3\cos^2\psi) \\ + r\frac{d^2\chi}{dt^2}\cos\psi - 3r\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\psi}{dt}\sin\psi\cos\psi - r\frac{d\psi}{dt}\frac{d\chi}{dt}\sin\psi.\end{aligned} \tag{144}$$

Die Gleichungen für die Koordinaten x und y kann man sofort hinschreiben in der Form

$$\left.\begin{aligned}\frac{X}{m} &= \frac{d^2 x}{dt^2} + r\frac{d}{dt}\left(\cos\psi\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} - \sin\psi\sin\varphi\frac{d\psi}{dt}\right)\\ \frac{Y}{m} &= \frac{d^2 y}{dt^2} + r\frac{d}{dt}\left(\cos\psi\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} + \sin\psi\cos\varphi\frac{d\psi}{dt}\right)\end{aligned}\right\}. \tag{145}$$

Bei einer virtuellen Verschiebung $\delta\chi$ gleitet der Aufsitzpunkt des Rades um den Betrag $r\delta\chi$ nach rückwärts. Die X-Komponente dieser Strecke ist gleich $-r\delta\chi\cos\varphi$, die Y-Komponente gleich $-r\delta\chi\sin\varphi$. Zugleich leistet auch das Moment M der bohrenden Reibung bei dieser Drehung eine Arbeit. Die Komponente der Drehung $\delta\chi$ in vertikaler Rich-

tung ist gleich $\delta\chi \cos\psi$, und bei positivem $\delta\chi$ stimmt der Sinn dieser Drehungskomponente überein mit dem Sinn einer Drehung $\delta\varphi$. Hiernach wird

$$J_\chi = - Xr \cos\varphi - Yr \sin\varphi + M \cos\psi.$$

Der Differentialquotient von L nach χ ist Null und der nach $\dot{\chi}$ läßt sich leicht bilden. Die Gleichung von Lagrange lautet hiermit

$$\begin{aligned} - Xr \cos\varphi - Yr \sin\varphi + M \cos\psi \\ = mr^2 \left(\frac{d^2\chi}{dt^2} + \frac{d^2\varphi}{dt^2} \cos\psi - \frac{d\psi}{dt}\frac{d\varphi}{dt} \sin\psi\right). \end{aligned} \tag{146}$$

Hiermit sind die Bewegungsgleichungen für das gleitende Rad mit fünf Freiheitsgraden vollständig aufgestellt. Wenn X, Y, M gegeben wären, ließen sich, abgesehen von den Schwierigkeiten, die die Integration der Gleichungen bereitet, die Gesetze des Bewegungsvorgangs aus diesen Gleichungen ableiten. Nun sind uns diese drei Größen zwar nicht gegeben; wenn wir aber weiterhin voraussetzen, daß bei der Bewegung des Rades tatsächlich kein Gleiten auf dem Fußboden stattfindet, so schließt dies ein, daß X und Y in jedem Augenblicke so groß werden müssen, daß das Gleiten dadurch verhindert wird. Dieser spezielle Fall ist daher in dem vorher behandelten allgemeinen mit enthalten und er entsteht daraus, wenn wir uns vorbehalten, den Komponenten der Reibung nachträglich solche Werte beizulegen, daß zwischen den Geschwindigkeitskomponenten die beiden folgenden Gleichungen bestehen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= r\frac{d\chi}{dt}\cos\varphi \\ \frac{dy}{dt} &= r\frac{d\chi}{dt}\sin\varphi \end{aligned}\right\}. \tag{147}$$

Wir können dann die Gleichungen (145) dazu verwenden, um die tatsächlich auftretenden Komponenten X und Y der gleitenden Reibung daraus zu berechnen, während die drei übrigen Bewegungsgleichungen bei gegebenem M in Ver-

bindung mit den Gleichungen (147) dazu dienen, die allgemeinen Koordinaten als Funktionen der Zeit zu bestimmen.

Setzen wir in Gl. (143) die Werte aus den Gleichungen (147) ein, so geht sie über in

$$-g\cos\psi = \frac{3r}{2}\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{3r}{2}\sin\psi\cos\psi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + 2r\sin\psi\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\chi}{dt}. \quad (148)$$

Ebenso vereinfacht sich Gl. (144) zu

$$\frac{M}{mr^2} = 2\frac{d^2\chi}{dt^2}\cos\psi + \frac{d^2\varphi}{dt^2}\cdot\frac{1+3\cos^2\psi}{2} - 3\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\psi}{dt}\sin\psi\cos\psi - \frac{d\chi}{dt}\frac{d\psi}{dt}\sin\psi. \quad (149)$$

Setzen wir ferner die Werte von X und Y aus den Gleichungen (145) in die Gl. (146) ein und beachten dabei die Gleichungen (147), so erhalten wir nach vollständiger Durchführung der Rechnung

$$\frac{M}{mr^2}\cos\psi = 2\frac{d^2\chi}{dt^2} + 2\frac{d^2\varphi}{dt^2}\cos\psi - 3\frac{d\psi}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\sin\psi. \quad (150)$$

Endlich folgt noch aus der Elimination von M aus den beiden letzten Gleichungen

$$2\frac{d^2\chi}{dt^2}\sin\psi + \frac{3}{2}\frac{d^2\varphi}{dt^2}\sin\psi\cos\psi - 3\frac{d\psi}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\sin^2\psi + \frac{d\chi}{dt}\frac{d\psi}{dt}\cos\psi = 0. \quad (151)$$

Setzen wir nachträglich $M = 0$ ein, so haben wir die Bewegungsgleichungen für das rollende Rad unter Vernachlässigung der bohrenden Reibung vor uns. Eine allgemeine Integration dieser Gleichungen ist bei ihrer verwickelten Form natürlich nicht möglich. Wohl aber vermag man partikuläre Integrale davon anzugeben, die sich auf besondere Bewegungsarten beziehen. Der bedeutsamste dieser Sonderfälle bezieht sich auf die „rein rollende" Bewegung des Rades, also auf eine Bewegung, bei der sich das Rad in jedem

Augenblicke um die in Abb. 10, S. 149, konstruierte $\mathfrak{k}$-Achse dreht. Setzt man in den vorausgehenden Gleichungen

$$M = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} = 0,$$

so folgt zunächst aus den letzten Gleichungen

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0,$$

und Gl. (148) geht über in

$$-g \cos\psi = \frac{3r}{2} \sin\psi \cos\psi w^2 - 2r \sin\psi w u, \tag{152}$$

wenn die konstante Winkelgeschwindigkeit, mit der sich das Rad um seine Achse dreht, mit u und die ebenfalls konstante Winkelgeschwindigkeit, mit der sich die $\mathfrak{k}$-Achse in Abb. 10 dreht, mit w bezeichnet wird. Man muß hierbei nur beachten, daß einem positiven Werte von $\frac{d\chi}{dt}$ oder u ein negativer Wert von $\frac{d\varphi}{dt}$ oder w entspricht, wie aus den in Abb. 11 angegebenen Richtungen, in denen φ und χ positiv gezählt werden sollen, unmittelbar entnommen werden kann. Außerdem besteht noch zwischen den absoluten Werten von w und u die Beziehung

$$wR = ur,$$

wenn unter R der Krümmungshalbmesser der Bahnkurve verstanden wird, die der Aufsitzpunkt des Rades auf dem Fußboden beschreibt. Da $R \cos\psi = r$ ist, geht dies über in

$$w = u \cos\psi.$$

Setzt man diesen Wert in Gl. (152) ein und löst nach u auf, so erhält man

$$u = \sqrt{\frac{2g}{r \sin\psi(1 + 3 \sin^2\psi)}}. \tag{153}$$

Hiermit ist die Rollgeschwindigkeit ermittelt, die das Rad besitzen muß, um bei einer durch den Winkel ψ gegebenen Schiefstellung eine rein rollende Bewegung ausführen zu können.

Natürlich hätte man zur Ableitung dieses einfachen Ergebnisses nicht den Umweg über die allgemeinen Bewegungs-

gleichungen nötig gehabt. In Band IV habe ich vielmehr schon angedeutet, wie man auf Grund des Flächensatzes diese Beziehung zwischen u und ψ herzuleiten vermag. Ich will diese Ermittelung hier ebenfalls noch vornehmen und zwar hauptsächlich als Probe für die Richtigkeit der vorher aufgestellten Bewegungsgleichungen, da man nach der Durchführung so langer Rechnungen, wie sie dazu erforderlich waren, immer etwas mißtrauisch sein muß, ob nicht irgendwo ein Rechenfehler unterlaufen ist. Das beste Mittel, um solche Fehler zu entdecken, besteht aber darin, daß man für einfachere Fälle, bei denen sich das Ergebnis auch auf anderem Wege ableiten läßt, einen Vergleich mit den Folgerungen aus den allgemeineren Gleichungen anstellt.

Bei der rein rollenden Bewegung ist die Bahnkurve des Rades auf dem Fußboden ein Kreis, dessen Halbmesser vorher schon mit R bezeichnet war. Ein Kegel, der den Mittelpunkt dieses Kreises zur Spitze und den Radumfang zur Basis hat, rollt dabei auf dem Fußboden zusammen mit dem Rade. Wir wählen die Kegelspitze zum Momentenpunkte und stellen die Gleichung des Flächensatzes auf. Der Drall des bewegten Körpers ist ein Vektor, dessen Richtung mit Hilfe des auf den festen Punkt bezogenen Trägheitsellipsoids konstruiert werden kann. Das Trägheitsellipsoid ist ein Umdrehungsellipsoid, da der feste Punkt auf der Radachse liegt. Der Drall ist daher auf jeden Fall in der durch die Radachse und durch die Momentanachse (das ist die $\mathfrak{k}$-Achse in Abb. 10) gelegten Vertikalebene enthalten. Wenn das Rad nachher in eine andere Lage gelangt, ändert sich die Vertikalkomponente des Dralls nicht, während die Horizontalkomponente um einen Winkel $w\,dt$ im Zeitelemente dt gedreht wird. Um die Änderungsgeschwindigkeit des Dralls festzustellen, brauchen wir uns daher nur um die Horizontalkomponente des Dralls zu kümmern. Diese Komponente ist aber die Projektion des Dralls auf die Richtung der augenblicklichen Drehachse und wir finden sie nach Band IV, Gl. (123), S. 175 der 3. Aufl. gleich

$$B' = q\theta',$$

wenn wir mit q die Winkelgeschwindigkeit um die Momentanachse und mit θ' das auf diese Achse bezogene Trägheitsmoment des Rades bezeichnen. Nun ist

$$\theta' = \theta_0' + mr^2 \sin^2 \psi,$$

wenn unter θ_0' das Trägheitsmoment für die parallel zur Momentanachse gezogene Schwerpunktsachse verstanden wird. Nach Band IV, Gl. (116), S. 169 der 3. Aufl. ist aber

$$\theta_0' = \frac{mr^2}{2} \cos^2 \psi + mr^2 \sin^2 \psi$$

und wenn man dies einsetzt, erhält man

$$B' = q \frac{mr^2}{2} (1 + 3 \sin^2 \psi).$$

Der geometrische Zuwachs, den der Drall im Zeitelemente dt erfährt, steht senkrecht zur Momentanachse und ist gleich $B'wdt$. In der gleichen Richtung geht auch der Momentenvektor des aus dem Gewichte mg und der ihm gleichen Vertikalkomponente des Auflagerdrucks bestehenden Kräftepaars. Er hat die Größe $mgr \cos \psi$. Die Horizontalkomponente des Auflagerdrucks geht durch den Momentenpunkt und kommt daher in der Gleichung des Flächensatzes nicht vor. Diese Gleichung lautet daher

$$qw \frac{mr^2}{2} (1 + 3 \sin^2 \psi) = mgr \cos \psi.$$

Es bleibt noch übrig, eine Gleichung zwischen q und w aufzustellen. Die Schwerpunktsgeschwindigkeit hat die Größe $qr \sin \psi$, da $r \sin \psi$ den senkrechten Abstand des Schwerpunkts von der Momentanachse angibt. Andererseits kann aber die Geschwindigkeit des Schwerpunkts auch in w ausgedrückt werden, da der Schwerpunkt einen Kreis vom Halbmesser $R - r \cos \psi$ mit der Winkelgeschwindigkeit w beschreibt. Beachtet man, daß $R \cos \psi = r$ ist, so erhält man die Gleichung

$$w \left(\frac{r}{\cos \psi} - r \cos \psi\right) = qr \sin \psi,$$

aus der

$$q = w \operatorname{tg} \psi$$

folgt. Setzt man dies in die Gleichung des Flächensatzes, so läßt sie sich nach w auflösen und man findet

$$w = \cos\psi \sqrt{\frac{2g}{r\sin\psi\,(1+3\sin^2\psi)}}.$$

Das stimmt aber, wenn man beachtet, daß $w = u\cos\psi$ ist, mit Gl. (153) überein. Damit ist die verlangte Probe erbracht.

Der Übergang von Gl. (152) zu Gl. (153) wurde dadurch bewirkt, daß in jedem Gliede der Faktor $\cos\psi$ gestrichen wurde. Wenn jedoch ψ ein rechter Winkel ist, wird $\cos\psi$ zu Null und Gl. (152) wird für jeden Wert von u erfüllt, während w gleich Null zu setzen ist. Gl. (153) verliert daher für diesen Fall ihre Gültigkeit.

Von besonderer Wichtigkeit ist eine Bewegung des Rades, bei der es dauernd der aufrechten Lage benachbart bleibt und kleine Schwingungen darum ausführt. Man weiß nämlich schon aus der Erfahrung, daß eine solche Bewegung bei nicht zu kleinen Geschwindigkeiten stabil ist, und es handelt sich nun darum, die Theorie dieser Bewegung aufzustellen. Die Voraussetzung, daß es sich nur um kleine Schwingungen handeln soll, gestattet eine Vereinfachung der Bewegungsgleichungen in derselben Weise wie in früheren Fällen. Ich sehe aber davon ab, diese Untersuchung für den Fall $M = 0$ durchzuführen, nehme vielmehr anstatt dessen an, daß die bohrende Reibung groß genug ist, um eine „Wendebewegung" des Rades, also eine Drehungskomponente in der Richtung der $\mathfrak{i}$-Achse in Abb. 10 auszuschließen.

§ 30. Die Radbewegung bei großer bohrender Reibung.

Bei virtuellen Änderungen der fünf allgemeinen Koordinaten leistet die bohrende Reibung eine Arbeit, die nur von den virtuellen Änderungen $\delta\varphi$ und $\delta\chi$ abhängig ist. Diese Arbeit ist nämlich, wie schon bei der Ableitung der Gleichungen (144) und (146) festgestellt wurde, gleich

$$M\,(\delta\varphi + \cos\psi\,\delta\chi).$$

Wenn nun vorausgesetzt wird, daß M groß genug ist, um Drehungen, die in die Richtung des Momentenvektors fallen, zu verhüten, muß die Arbeit zu Null werden und die Bewegung erfolgt dann so, daß jederzeit

$$\frac{d\varphi}{dt} + \cos\psi \frac{d\chi}{dt} = 0 \tag{154}$$

ist. Diese Gleichung spricht eine weitere, nicht-holonome Bedingung aus, die zu den Gleichungen (147) hinzutritt. In der Tat stimmt sie auch, wenn die Gleichungen (147) dazu genommen werden, inhaltlich mit der bereits in § (13) angegebenen Bedingungsgleichung (65), S. 81, überein.

Für die Untersuchung der hiermit näher bestimmten Bewegung stehen uns die Bewegungsgleichungen (148) und (151) zur Verfügung, während eine der Gleichungen (149) oder (150) späterhin dazu verwendet werden kann, um die Größe des Moments M der bohrenden Reibung zu berechnen, die erforderlich ist, um die betrachtete Bewegung zu erzwingen.

Zunächst können wir aber die Gleichungen (148) und (151) durch Hinzunehmen der durch Gl. (154) ausgesprochenen Beziehung vereinfachen. Wenn dies geschieht, gehen die Gleichungen über in

$$\frac{2g}{r}\cos\psi + 3\frac{d^2\psi}{dt^2} - \sin\psi\cos\psi\,(1 + 3\sin^2\psi)\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 = 0, \tag{155}$$

$$\sin\psi\,(1 + 3\sin^2\psi)\frac{d^2\chi}{dt^2} + \cos\psi\,(9\sin^2\psi + 2)\frac{d\psi}{dt}\frac{d\chi}{dt} = 0. \tag{156}$$

Das sind also die strengen Grundgleichungen für die hier betrachtete Radbewegung. Da sie als Ergebnis verwickelter Rechnungen gefunden wurden, ist es wünschenswert, noch eine Probe darauf zu machen, ob kein Rechenfehler vorgekommen ist. Dazu verhilft uns der Satz von der lebendigen Kraft. Die inneren Kräfte leisten bei dieser Bewegung keine Arbeit; daher muß die Summe aus der lebendigen Kraft und der potentiellen Energie, die der Höhe des Radschwerpunkts über dem Fußboden entspricht, konstant, also

$$L + mgr\sin\psi = C \tag{157}$$

sein. Der in Gl. (142) aufgestellte Ausdruck für die lebendige Kraft vereinfacht sich hier wegen der durch die Gleichungen (147) und (154) ausgesprochenen Bedingungen erheblich. Man kann diesen vereinfachten Ausdruck auch unmittelbar von neuem ableiten und erhält auf beiden Wegen, wie man sich leicht überzeugt,

$$L = \frac{mr^2}{4}\left(3\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \sin^2\psi\,(1 + 3\sin^2\psi)\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2\right). \qquad (158)$$

Gleichung (157) muß sich als ein erstes Integral aus den beiden Bewegungsgleichungen (155) und (156) ableiten lassen. Zu diesem Zwecke multiplizieren wir Gl. (155) mit $\frac{d\psi}{dt}$ und Gl. (156) mit $\sin\psi\,\frac{d\chi}{dt}$ und addieren. Wir erhalten dann in der Tat eine integrable Geichung, nämlich die Gleichung, die man findet, wenn man Gl. (157) mit Berücksichtigung des in Gl. (158) angeschriebenen Ausdrucks von L nach t differentiiert. Die beabsichtigte Probe stimmt daher und zugleich haben wir ein erstes Integral der Bewegungsgleichungen aufgestellt.

Weitere allgemeine Integrale lassen sich nicht angeben; das hindert jedoch nicht, daß wir aus den Differentialgleichungen hinreichenden Aufschluß über besonders wichtige Bewegungsarten erhalten können. Nehmen wir zunächst an, daß die Rollgeschwindigkeit $\frac{d\chi}{dt}$ konstant sein soll, so folgt aus Gl. (156), daß $\frac{d\psi}{dt}$ gleich Null sein muß. Aus Gl. (155) läßt sich hierauf der Winkel ψ berechnen, der zu einem gegebenen Werte der Rollgeschwindigkeit gehört. Wir kommen damit nur wieder auf die schon im vorigen Paragraphen besprochene rein rollende Bewegung zurück. Die bohrende Reibung kommt dabei nicht zur Geltung. Wir sehen nun auch, daß das Hinzutreten der bohrenden Reibung nichts daran zu ändern vermag, daß bei allen anderen Bewegungsarten, die sie überhaupt zuläßt, die Rollgeschwindigkeit veränderlich sein muß.

Wir betrachten jetzt eine Bewegung, bei der ψ dauernd nahezu gleich einem Rechten bleibt. Wir setzen also

$$\psi = \frac{\pi}{2} + \psi_1$$

und betrachten ψ_1 als eine mit der Zeit veränderliche kleine Größe. Auch die Rollgeschwindigkeit kann sich in diesem Falle nicht viel ändern und wir setzen daher

$$\frac{d\chi}{dt} = u_0 + u_1,$$

wobei u_0 konstant und u_1 eine kleine Größe ist, die ebenfalls mit der Zeit veränderlich ist. Streichen wir nach Einsetzen dieser Werte in Gl. (155) alle Glieder, die von höherer Ordnung klein sind, setzen also

$$\cos\psi = -\psi_1 \quad \text{und} \quad \sin\psi = 1$$

usf., so erhalten wir

$$-\frac{2g}{r}\psi_1 + 3\frac{d^2\psi_1}{dt^2} + 4u_0^2\psi_1 = 0. \tag{158 a}$$

Wenn die Rollgeschwindigkeit u_0

$$u_0 = \sqrt{\frac{g}{2r}}, \tag{158 b}$$

wird hiernach die Beschleunigung der Fallbewegung des Rades zu Null und die Bewegung steht an der Grenze des stabilen und des labilen Laufes. Stabil ist dagegen die Laufbewegung des aufrecht rollenden Rades, wenn u_0 größer ist als dieser Wert. Gl. (158 a) ist dann von der Form der Differentialgleichung für einfache harmonische Schwingungen, nämlich

$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2} = -\frac{4u_0^2 r - 2g}{3r}\psi_1,$$

und als Lösung erhält man, wenn die Zeit von einem Augenblicke an gezählt wird, in dem ψ_1 seinen größten Wert A angenommen hatte,

$$\psi_1 = A\sin\alpha t \quad \text{mit} \quad \alpha = \sqrt{\frac{4u_0^2 r - 2g}{3r}}. \tag{158 c}$$

Die Schwingungsdauer der durch ψ_1 dargestellten kleinen Schwingungen ist

$$T_1 = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi\sqrt{\frac{3r}{4u_0^2 r - 2g}}.$$

Die Zeit, die vergeht, bis das Rad einen Umlauf vollzogen hat, ist

$$T_2 = \frac{2\pi}{u_0}.$$

Man findet also die Zahl der vollen Schwingungen ψ_1 während der Dauer eines Radumlaufs

$$N = \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{2g}{3u_0^2 r}}.$$

Diese Zahl wird um so kleiner, je schneller das Rad läuft; aber selbst für $u_0 = \infty$ bleibt sie noch etwas größer als Eins.

Die zweite Bewegungsgleichung gestattet uns nun auch, die periodischen Schwankungen der Rollgeschwindigkeit zu berechnen. Mit denselben Vernachlässigungen wie vorher geht Gl. (156) über in

$$4\frac{du}{dt} - 11\psi_1 \frac{d\psi_1}{dt} u = 0.$$

Die Variablen lassen sich in dieser Gleichung sofort trennen und die Integration liefert

$$\lg u = \tfrac{11}{8}\psi_1^2 + C_1.$$

Die Integrationskonstante C_1 ist der Wert von $\lg u$ für $\psi_1 = o$, d. h. für den Augenblick, in dem das Rad durch die lotrechte Lage hindurchgeht. Vorher war unbestimmt gelassen, welcher genauerer Wert von u als u_0 bei der Zerlegung in $u_0 + u_1$ gerechnet werden sollte. Bei der vorhergehenden Betrachtung kam es darauf deshalb nicht näher an, weil alle u nur sehr wenig verschieden voneinander sind und die Unterschiede beim Einsetzen in Gl. (155) zu Gliedern führten, die von höherer Ordnung klein waren und daher vernachlässigt werden durften. Jetzt können wir aber festsetzen, daß unter u_0 die Rollgeschwindigkeit für die aufrechte Lage verstanden werden soll. Dann liefert die vorhergehende Gleichung

$$u = u_0 e^{\frac{11}{8}\psi_1^2}.$$

Da der Exponent ein sehr kleiner Wert ist, genügt es, dafür

$$u = u_0\left(1 + \tfrac{11}{8}\psi_1^2\right) \tag{159}$$

zu schreiben. In der aufrechten Lage ist daher die Rollgeschwindigkeit am kleinsten. Für die größte Rollgeschwindigkeit im Verlaufe des Schwingungsvorgangs u_{max} hat man

$$u_{max} = u_0 \left(1 + \tfrac{11}{8} A^2\right)$$

und hieraus erkennt man, daß die Schwankungen in der Rollgeschwindigkeit im Verhältnisse zu u_0 von höherer Ordnung klein sind, als die Abweichungen ψ_1 aus der Mittellage.

Ferner erhalten wir aus Gl. (154) für den hier betrachteten Bewegungsvorgang

$$\frac{d\varphi}{dt} = \psi_1 u, \tag{160}$$

wobei an Stelle von u auch u_0 geschrieben werden kann. Setzt man den Wert von ψ_1 ein und integriert, so erhält man

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{A u_0}{\alpha} \cos \alpha t. \tag{161}$$

Die Spur des Radlaufs in der Fußbodenebene bildet daher nahezu eine gerade Linie, die den beliebigen Winkel φ_0 mit der X-Achse einschließt. Um die kleinen Abweichungen von dieser Geraden noch etwas genauer zu verfolgen, greifen wir auf die Gleichungen (147)

$$\frac{dx}{dt} = ru \cos \varphi \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dt} = ru \sin \varphi$$

zurück. Da die Änderung, die u erfährt, von höherer Ordnung klein ist, als die Änderung von φ, genügt es, wenn wir für die erste Gleichung

$$\frac{dx}{dt} = ru_0 \cos\left(\varphi_0 - \frac{A u_0}{\alpha} \cos \alpha t\right) = ru_0 \left(\cos \varphi_0 + \sin \varphi_0 \frac{A u_0}{\alpha} \cos \alpha t\right)$$

schreiben. Die Ausführung der Integration liefert

$$x = x_0 + ru_0 t \cos \varphi_0 + ru_0 \sin \varphi_0 \frac{A u_0}{\alpha^2} \sin \alpha t. \tag{162}$$

Die Koordinatenachsen konnten in der Fußbodenebene beliebig festgelegt sein. Nehmen wir jetzt an, daß die Y-Achse mit der Richtung φ_0 zusammenfällt, so ist $\cos \varphi_0 = 0$ und $\sin \varphi_0 = 1$ zu setzen und die vorhergehende Gleichung gibt uns

unmittelbar die Abweichungen von der geraden Bahn an. Die größte Abweichung f aus der mittleren Linie, d. h. von der Y-Achse ist

$$f = A \frac{u_0^2 r}{\alpha^2} = A \cdot \frac{3 u_0^2 r}{4 u_0^2 r - 2g} \cdot r. \qquad (163)$$

Die Abweichung wird bei gegebenem Werte der Amplitude A der Schwingungen ψ_1 um so kleiner, je schneller das Rad rollt. Die kleinste Abweichung für $u_0 = \infty$, die auch schon dann nahezu eintritt, wenn die Rollgeschwindigkeit mindestens etwa das 3- oder 4fache der kritischen beträgt, bei der die Bewegung stabil wird, ist

$$f_{\min} = \tfrac{3}{4} A r.$$

Hiermit ist die Bewegung genügend in allen Einzelheiten bekannt. Es entsteht nun aber noch die weitere Frage, wie groß das Moment der bohrenden Reibung sein muß, um die besprochene Bewegung zu erzwingen. Denn von der Beantwortung dieser Frage hängt es ab, bis zu welcher Grenze die vorhergehenden Entwicklungen überhaupt als physikalisch zutreffend zu betrachten sind. Zur Berechnung von M stehen uns die Gleichungen (149) oder (150) zur Verfügung, also wenn wir die letzte wählen, die Gleichung

$$\frac{M}{m r^2} \cos\psi = 2 \frac{d^2 \chi}{dt^2} + 2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \cos\psi - 3 \frac{d\psi}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \sin\psi .$$

Wenn wir beachten, daß sich ψ nur um den kleinen Winkel ψ_1 von einem Rechten unterscheidet, vereinfacht sich die Gleichung zunächst zu

$$-\frac{M}{m r^2} \psi_1 = 2 \frac{du}{dt} - 2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \psi_1 - 3 \frac{d\psi_1}{dt} \frac{d\varphi}{dt} .$$

Setzen wir hierauf die vorher festgestellten Werte der auf der rechten Seite stehenden Differentialquotienten ein, so erhalten wir nach Zusammenziehen der Glieder und Streichen des gemeinschaftlichen Faktors ψ_1

$$-\frac{M}{m r^2} = \tfrac{1}{2} u_0 \frac{d\psi_1}{dt}$$

und daher schließlich, wenn wir auch noch den Wert von $\frac{d\psi_1}{dt}$ einsetzen,

$$M = -\frac{mr^2}{2} u_0 A \alpha \cos \alpha t. \tag{164}$$

Bei der kritischen Geschwindigkeit, die die Grenze zwischen stabiler und instabiler Bewegung bildet, ist $\alpha = o$ und wenn die Geschwindigkeit nur wenig über der kritischen liegt, wird daher M verhältnismäßig niedrig, so daß dann in der Tat die Bewegung so, wie es besprochen war, vor sich gehen kann. Wenn u_0 größer wird, wächst damit auch α und unter der Voraussetzung, daß A denselben Wert behält, wird M bald so groß, daß es den größtmöglichen Wert der bohrenden Reibung übersteigt. Dann hört die Gültigkeit der vorhergehenden Formeln auf. Man kann indessen zu jedem Werte von u_0 einen Wert für die Schwingungsamplitude A angeben, bis zu dem hin die Bewegung so erfolgt, wie sie hier besprochen war. Um hierüber klarer zu sehen, ist es nötig, ein Zahlenbeispiel durchzurechnen.

Nehmen wir zu diesem Zwecke an, u_0 sei doppelt so groß als die durch Gl. (158 b) angegebene kritische Geschwindigkeit, so wird nach dieser Gleichung und nach Gl. (158 c)

$$u_0 \alpha = \frac{2g}{r},$$

und für den größten während der Bewegung auftretenden Wert von M erhält man nach Gl. (164)

$$M_{\max} = mgrA.$$

Nun ist der größte Wert von M, der zwischen Radumfang und Fußboden übertragen werden kann, jedenfalls proportional dem Radgewichte mg zu setzen. Außerdem hängt er von dem Reibungskoeffizienten und der Größe der Abplattungsfläche ab, in der eine Berührung zwischen dem Rade und dem Fußboden stattfindet. Bezeichnen wir diesen größtmöglichen Wert von M mit M', so können wir

$$M' = mg\varrho$$

setzen. Den Faktor ϱ kann man als den dem betreffenden Falle entsprechenden Koeffizienten der bohrenden Reibung be-

zeichnen. Setzen wir M_{max} gleich M', so erhalten wir eine Gleichung für die Amplitude A der Schwingungen ψ_1, bis zu der hin die Bewegung so vor sich geht, wie wir es hier vorausgesetzt haben. Wir finden

$$A_{max} = \frac{\varrho}{r},$$

also wenn z. B. $r = 30$ cm und $\varrho = 1$ mm angenommen wird,

$$A_{max} = 0{,}00333 = 0^0 11' 30''.$$

Die größte Abweichung f des Aufsitzpunktes, also des Mittelpunktes der Abplattungsfläche von der geraden Bahn, wird in diesem Falle nach Gl. (163)

$$f = \varrho = 1 \text{ mm}.$$

Wenn die Radebene größere Schwankungen A der Radebene gegen die lotrechte Lage ausführt, als etwas über 11′, verlieren daher bei der hier vorausgesetzten Radgeschwindigkeit, die einer Umfangsgeschwindigkeit von rund 2,40 m/sec entspricht, die vorhergehenden Formeln ihre Gültigkeit.

Es würde nun nichts im Wege stehen, die Rechnung auch noch für etwas größere Radschwankungen durchzuführen, wenn diese nur immer noch als klein betrachtet werden dürfen. Hierbei wäre zu beachten, daß nach Gl. (164) M seinen größten Wert annimmt für $\cos \alpha t = 1$, d. h. nach Gl. (158 c) in dem Augenblicke, in dem das Rad durch die lotrechte Lage hindurchgeht, während an der Grenze des Ausschlags, also für $\sin \alpha t = \pm 1$ die bohrende Reibung zu Null wird. Man müßte also den ganzen Schwingungsweg in drei Teile zerlegen, so daß in den beiden äußeren Teilen die Formeln dieses Paragraphen anwendbar bleiben, während für den mittleren Teil auf die Gleichungen (148) bis (151) unter Verwerfung von Gl. (154) zurückzugreifen wäre. In den Gleichungen (149) und (150) wäre dabei an Stelle von M der vorher angegebene Wert von M' zu setzen. Natürlich könnte man auch in diesem Falle von den Vereinfachungen Gebrauch machen, die durch die Voraussetzung kleiner Schwankungen um die lotrechte Radstellung ermöglicht werden.

Ich sehe jedoch davon ab, diese Rechnung hier noch anzuschließen, da das Hauptziel der ganzen Betrachtung, nämlich der Nachweis, daß die aufrechte Bewegung von einer bestimmten Geschwindigkeitsgrenze an stabil ist, ohnehin bereits erreicht ist. Daß dies so sein müsse, war zwar aus der Erfahrung schon von vornherein bekannt. Aber die Theorie lehrt, wenn sie eine Bestätigung solcher Erfahrungen liefert, zugleich immer noch mehr. Und zwar hat sie in diesem Falle zugleich den Wert der kritischen Geschwindigkeit kennen gelehrt. Hierin ist das Hauptergebnis der vorhergehenden Untersuchungen zu erblicken.

§ 31. Die pseudoreguläre Radbewegung.

In Anlehnung an die in der Kreiseltheorie eingeführten Bezeichnungen kann man die „rein-rollende" Bewegung des Rades, wie wir sie früher nannten, weiterhin auch als die „reguläre" Rollbewegung bezeichnen. Bei ihr bleibt der Winkel ψ, den die Radebene mit der Fußbodenebene bildet, konstant, die Spur der Radebene in der Fußbodenebene dreht sich mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$, auch die Rollgeschwindigkeit $\frac{d\chi}{dt}$ ist konstant, der Aufsitzpunkt des Rades beschreibt einen Kreis und die durch den Mittelpunkt des Rades senkrecht zur Radebene gezogene Radachse beschreibt einen Kreiskegel, dessen Spitze im Fußboden liegt und dessen Achse senkrecht dazu steht. Jede Bewegung, die ähnlich erfolgt wie die reguläre, im einzelnen aber kleine Abweichungen davon zeigt, möge ebenso wie in der Kreiseltheorie als eine pseudoreguläre bezeichnet werden.

Die reguläre Rollbewegung ist auch dann möglich, wenn die bohrende Reibung gleich Null gesetzt wird, wie wir schon in § 29 gefunden haben, und sie bleibt ebenso möglich, wenn die Flächen als rauh vorausgesetzt werden, so daß die bohrende Reibung nicht vernachlässigt werden darf. Auch wenn eine bohrende Reibung infolge der Beschaffenheit der miteinander in Berührung kommenden Flächen übertragen werden

kann, kommt sie doch nicht zustande, solange die Bewegung regulär bleibt. Bei einer Bewegung, die der regulären benachbart ist, wird daher die bohrende Reibung auch nur kleine Werte anzunehmen brauchen, um eine Drehung des Rades in dem ihr entsprechenden Sinne zu verhindern. Wir dürfen daher voraussetzen, daß die pseudoreguläre Radbewegung ausschließlich durch ein Zusammenwirken von „Rollen" und „Fallen" zustande kommt, während ein „Wenden" dabei durch die bohrende Reibung verhütet wird.

Die Gleichungen für die pseudoreguläre Radbewegung erhält man aus den Gleichungen (155) und (156), indem man darin

$$\psi = \psi_0 + \psi_1$$

setzt und unter ψ_0 eine konstante und unter ψ_1 eine kleine, mit der Zeit veränderliche Größe versteht, deren höhere Potenzen vernachlässigt werden dürfen. Ebenso zerlegen wir auch die Rollgeschwindigkeit in

$$\frac{d\chi}{dt} = u_0 + u_1,$$

so daß die konstanten Größen u_0 und ψ_0 einer regulären Rollbewegung entsprechen, also der Gl. (153) genügen. Setzt man diese Werte in Gl. (155) ein, hebt die von u_1 und ψ_1 freien Glieder, die nach Gl. (153) gegeneinander wegfallen, fort und vernachlässigt die von höherer Ordnung kleinen Glieder, so behält man

$$-\psi_1 \frac{2g}{r} \sin\psi_0 + 3\frac{d^2\psi_1}{dt^2} - 2u_0u_1 \sin\psi_0 \cos\psi_0 (1 + 3\sin^2\psi_0)$$
$$- \psi_1 u_0^2 (1 + 7\sin^2\psi_0 - 12\sin^4\psi_0) = 0.$$

Ebenso geht Gl. (156) über in

$$\sin\psi_0 (1 + 3\sin^2\psi_0) \cdot \frac{du_1}{dt} + \cos\psi_0 (9\sin^2\psi_0 + 2)\, u_0 \frac{d\psi_1}{dt} = 0,$$

da alle hierbei weggelassenen Glieder von höherer Ordnung klein sind. Die zweite Gleichung läßt sich sofort integrieren. Setzt man den dabei erhaltenen Wert von u_1 in die erste

Gleichung ein, so erhält man nach Zusammenfassen der Glieder unter Benutzung der durch Gl. (153) ausgesprochenen Beziehung

$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2} = -u_0^2(1 + 2\sin^2\psi_0 - 3\sin^4\psi_0)\psi_1 + C.$$

Unter C ist hierbei eine Konstante zu verstehen, die von der Integration der vorhergehenden Gleichung herstammt. Der in der Klammer stehende Ausdruck ist für jeden Wert von ψ_0 positiv. Die Gleichung stellt daher eine einfache harmonische Schwingung dar. Wenn ψ_0 einen rechten Winkel bedeutet, verlieren jedoch die vorhergehenden Gleichungen ihre Gültigkeit; dieser Fall ist aber bereits im vorigen Paragraphen erledigt worden. Andernfalls wird die Schwingungsdauer der harmonischen Schwingungen

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{2g}\cdot\frac{\sin\psi_0(1 + 3\sin^2\psi_0)}{1 + 2\sin^2\psi_0 - 3\sin^4\psi_0}}$$

gefunden. Hierbei ist der Wert von u_0 aus Gl. (153) eingesetzt. Dieser Ausdruck läßt sich noch bedeutend vereinfachen und liefert

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{2g}\frac{\sin\psi_0}{\cos^2\psi_0}}. \tag{165}$$

Die Betrachtung ließe sich jetzt noch in derselben Weise weiterführen, wie früher für den aufrechten Lauf des Rades. Ich sehe aber davon ab, da die bisher erzielten Ergebnisse bereits zu dem Nachweise genügen, daß die betrachtete pseudoreguläre Radbewegung möglich und die mit Gl. (153) in Übereinstimmung stehende reguläre Rollbewegung daher jedenfalls eine stabile Bewegung bildet.

Schließlich mögen hier noch einige Bemerkungen Platz finden, die sich auf die Theorie des Fahrrads beziehen. Ich muß dabei freilich sofort vorausschicken, daß ich mich mit dieser Theorie noch niemals eingehender beschäftigt habe. Wenn man das einzeln rollende Rad behandelt, kann man aber kaum umhin, dabei nebenher auch an das Fahrrad zu denken, und der Leser würde es daher vermissen, wenn ich darüber ganz mit Stillschweigen hinwegginge.

Betrachtet man das Fahrrad zunächst ohne alle Nebenbedingungen, so bildet es einen achtläufigen Verband, wenn wir uns die Lenkstange festgestellt denken, oder, wenn wir auch für diese eine Bewegung zulassen, einen neunläufigen. Das Gestell hat nämlich als starrer Körper sechs Freiheitsgrade, dazu kommt je ein Freiheitsgrad für die Drehung jedes Rades und gegebenfalls noch einer für die Drehung der Lenkstange. Zwei Freiheitsgrade fallen weg, wenn beide Räder stets auf dem Boden aufsitzen sollen. Schließen wir bei beiden Rädern das Gleiten aus, so fallen vier weitere Freiheitsgrade fort. Bei festgehaltener Lenkstange bleiben daher nur noch zwei Freiheitsgrade übrig. Andererseits wird aber die Zahl der Freiheitsgrade wieder vermehrt, wenn wir beachten, daß der Fahrer seinen Körper relativ zu seinem Sitze nach Belieben zu bewegen vermag.

Man könnte sich nun zunächst die Aufgabe stellen, die beiden Bewegungsgleichungen aufzustellen, die dem Falle mit zwei Freiheitsgraden entsprechen, also dem Falle, daß der Fahrer keine Bewegung relativ zum Gestell ausführt und die Lenkstange feststeht. Ich weiß freilich nicht, ob diese Aufgabe schon in Angriff genommen und gelöst wurde. Wenn ich sie selbst lösen müßte, würde ich mich jedoch des hier besprochenen Verfahrens von Lagrange nicht bedienen, da es offenbar zu sehr umständlichen Rechnungen führen müßte. Eine Gleichung würde sich, wie gewöhnlich, sehr leicht aus dem Satze von der lebendigen Kraft herleiten lassen und die andere könnte man aus dem Flächensatze erhalten, der auf eine beliebig in der Fußbodenebene gezogene Achse anzuwenden wäre. Für diese Achse heben sich nämlich die Momente der gleitenden Reibungen, die dabei als äußere Kräfte anzusehen sind, hinweg. Freilich kennt man auch die senkrechten Auflagerdrucke an beiden Aufsitzpunkten nicht von vornherein. Aber die dadurch hereingebrachte Unbekannte schafft man leicht hinweg, indem man den Flächensatz außerdem noch auf eine zweite in der Fußbodenebene liegende Achse anwendet und den unbekannten Auflagerdruck aus beiden Gleichungen

eliminiert. Das Moment der bohrenden Reibung verschwindet für beide Achsen. Ich nehme übrigens an, daß die bohrende Reibung eine recht wesentliche Rolle bei diesem Bewegungsvorgange spielt. Eine Wendebewegung zu verhindern vermag sie zwar offenbar unter gewöhnlichen Umständen nicht; aber sie dürfte eine Dämpfung der entstehenden Schwingungen herbeiführen, die wahrscheinlich sehr wesentlich für den Erfolg ist.

Natürlich wäre aber selbst mit einer strengen Lösung der zunächst ins Auge gefaßten Aufgabe noch nicht viel gewonnen. Denn so wie das Radfahren praktisch geübt wird, spielen ohne Zweifel die Drehungen an der Lenkstange und die von dem Fahrer vorgenommenen Schwerpunktsverlegungen eine sehr wichtige Rolle. Wenigstens schließe ich das aus dem, was mir darüber gesagt wurde, denn ich bin selbst kein Radfahrer. Übrigens hat sich die Praxis in diesem Falle sehr gut ohne die Theorie zu helfen gewußt, und ich halte es daher auch für besser, große Anstrengungen, wie sie zur Aufstellung einer umfassenden Theorie nötig wären, lieber auf andere Fragen zu verwenden, bei denen die Praxis die theoretische Untersuchung nicht so leicht zu entbehren vermag.

§ 32. Das Prinzip von Hamilton.

Außer den Gleichungen von Lagrange kennt man noch einige andere Verfahren zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen für einen mehrläufigen Verband. Man bezeichnet die Sätze, auf denen diese Verfahren beruhen, als „Prinzipe" der Mechanik. Zu ihnen gehören insbesondere das Prinzip von Hamilton, das Prinzip der kleinsten Wirkung und das Gaußsche Prinzip des kleinsten Zwanges. Für die praktischen Anwendungen, also für die technische Mechanik, kann man diesen Sätzen keinen großen Wert beilegen. Es ist mir wenigstens kein einziger Fall bekannt, in dem mit Hilfe dieser Sätze ein neues Ergebnis von praktischer Wichtigkeit gefunden worden wäre, das man nicht mindestens ebenso einfach auch mit Hilfe von anderen, hier bereits besprochenen Verfahren ableiten könnte.

Das schließt zwar nicht aus, daß man gelegentlich irgendeine bestimmte Frage auf einem dieser Wege etwas kürzer oder ansprechender zu behandeln vermag als auf dem andern. Jedenfalls kommt man aber in der technischen Mechanik sehr gut aus, ohne von den genannten Prinzipen den geringsten Gebrauch zu machen. Indessen kommt diesen Sätzen aus anderen Gründen, auf die ich nachher noch eingehen werde, eine gewisse Bedeutung zu. Ich will daher nicht unterlassen, wenigstens den wichtigsten dieser Sätze, als den man das Prinzip von Hamilton anzusehen hat, hier kurz zu besprechen.

Auch das Hamiltonsche Prinzip wird ähnlich den Gleichungen von Lagrange dazu verwendet, die Bewegungsgleichungen eines Systems von mehreren (oder beliebig vielen) Freiheitsgraden abzuleiten. Die Anwendbarkeit ist aber auf den Fall beschränkt, daß sich die an dem Systeme angreifenden äußeren Kräfte von einem Potentiale ableiten lassen. Dieses Potential oder, ausführlicher gesagt, die potentielle Energie des Systems, soweit sie durch das Kraftfeld der äußeren Kräfte bedingt ist, sei V; dann ist die zur virtuellen Änderung δq_i irgendeiner der Koordinaten q gehörige Arbeit der äußeren Kräfte gleich

$$-\delta q_i \cdot \frac{\partial V}{\partial q_i},$$

und für die auf die Koordinate q_i reduzierte äußere Kraft F_i hat man nach der schon in § 15 aufgestellten Gl. (73)

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}.$$

Die von Lagrange aufgestellte Gl. (78) läßt sich daher jetzt auch in der Form

$$\frac{\partial (L - V)}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) \tag{166}$$

schreiben. Für jede Koordinate q_i gilt eine Gleichung von dieser Form. **Alle diese Gleichungen lassen sich aber in der einzigen Formel**

$$\delta \int_0^{t_1} (L - V)\,dt = 0 \tag{167}$$

zusammenfassen, und diese Gleichung spricht das Hamiltonsche Prinzip aus. Ehe ich zum Beweise der aufgestellten Behauptung übergehen kann, muß ich den Sinn der angewendeten Zeichen erklären. Zwischen der Zeit $t = 0$ und der Zeit $t = t_1$ erfolgt die Bewegung des Systems auf irgendeine ganz bestimmte Art. Wir betrachten den Bewegungsvorgang innerhalb dieser Zeit, deren Anfang und Ende im übrigen ganz beliebig ausgewählt sein kann. Wir machen uns ferner klar, daß das System, weil es nicht zwangläufig ist, rein geometrisch betrachtet, auf sehr viele verschiedene Arten aus der Anfangs- in die Endlage übergeführt werden könnte. Zu irgend einer Zeit t, die zwischen 0 und t_1 liegt, haben also in Wirklichkeit die Koordinaten die Werte

$$q_1 \, q_2 \ldots q_i \ldots q_n$$

und die zugehörigen Geschwindigkeiten die Werte

$$\dot{q}_1 \, \dot{q}_2 \ldots \dot{q}_i \ldots \dot{q}_n.$$

Der geometrische Zusammenhang, der zwischen den Gliedern des Systems besteht, würde aber nicht hindern, daß zur Zeit t die Koordinaten und ihre Geschwindigkeiten etwa die Werte

$$(q_1 + \delta q_1), \ldots (q_i + \delta q_i) \ldots (q_n + \delta q_n),$$
$$(\dot{q}_1 + \delta \dot{q}_1), \ldots (\dot{q}_i + \delta \dot{q}_i) \ldots (\dot{q}_n + \delta \dot{q}_n)$$

hätten, in denen die δq ganz willkürlich gewählte unendlich kleine Änderungen sind, während die $\delta \dot{q}_i$ mit jenen so zusammenhängen, daß

$$\delta \dot{q} = \delta \left(\frac{dq}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \delta q$$

ist. Wenn wir uns alle δq als willkürliche Funktionen der Zeit gewählt denken, die nur an die Bedingung geknüpft sind, daß sie zu Anfang und zu Ende der Zeit verschwinden, haben wir damit irgendeine von der wirklichen unendlich wenig abweichende Bewegung beschrieben, durch die das System, rein geometrisch genommen, ebenfalls aus der Anfangslage in die Endlage übergeführt werden könnte. Zugleich müssen wir aber, wenn Anfangs- und Endzustand in dem wirklich vor-

liegenden Falle und in dem willkürlich variierten vollständig miteinander übereinstimmen sollen, auch noch die Bedingung einhalten, daß die $\delta\dot{q}$ an den beiden Grenzen verschwinden.

Das in Gl. (167) vorkommende Integral hat für die wirkliche Bewegung einen ganz bestimmten Wert, da zu jeder Zeit t eine bestimmte kinetische Energie L und eine bestimmte potentielle Energie V gehören. Auch für die variierte Bewegung können wir uns, nachdem die δq und hiermit die $\delta\dot{q}$ als Funktionen der Zeit, die den angegebenen Bedingungen genügen, gewählt sind, den Wert des Integrals berechnet denken. Das Hamiltonsche Prinzip behauptet nun, daß beide Werte stets einander gleich sind, wie man auch im übrigen die unendlich kleinen Variationen δq wählen möge. Man kann auch sagen, daß das Integral für die wirklich ausgeführte Bewegung entweder zu einem Maximum oder zu einem Minimum wird, denn die Bedingung dafür wird durch das Verschwinden der Variation angegeben. Diese letzte Bemerkung spielt aber keine Rolle bei den Anwendungen, die man von dem Prinzip machen kann.

Nach diesen Vorbemerkungen kann ich zum Beweise des Satzes übergehen. Dazu berechne ich die Variation des Integrals. Die Änderung, die das Integral erfährt, ist gleich der Summe der Änderungen seiner Elemente, also

$$\delta \int_0^{t_1} (L - V)\, dt = \int_0^{t_1} \delta (L - V)\, dt.$$

Um die Variation von $L - V$ zu erhalten, beachte man, daß sowohl L als V zunächst Funktionen der q sind, außerdem aber L auch noch Funktion der Geschwindigkeiten $\dot{q}$ ist. Man hat also

$$\begin{aligned}\delta(L - V) = \frac{\partial (L - V)}{\partial q_1}\delta q_1 + \cdots + \frac{\partial (L - V)}{\partial q_n}\delta q_n \\ + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\delta \dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\delta \dot{q}_n,\end{aligned} \tag{168}$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (166)

$$\delta(L - V) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)\delta q_1 + \cdots + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\right)\delta q_n$$
$$+ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\frac{d}{dt}(\delta q_1) + \cdots + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\frac{d}{dt}(\delta q_n).$$

Hier lassen sich je zwei Glieder zusammenfassen, so daß der Ausdruck übergeht in

$$\delta(L - V) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\delta q_1\right) + \cdots + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\delta q_n\right).$$

Die Integration nach der Zeit kann hieran sofort vorgenommen werden und man findet daher

$$\delta\int_0^{t_1}(L - V)\,dt = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\delta q_1 + \cdots + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\delta q_n\right]_0^{t_1}.$$

An den beiden Grenzen 0 und t_1 verschwinden aber alle Glieder, da wir die δq der Bedingung unterwerfen mußten, daß sie an den Grenzen zu Null werden. Hiermit ist Gl. (167) bewiesen.

Wir haben jetzt das Hamiltonsche Prinzip auf Grund der Lagrangeschen Gleichungen bewiesen; man kann auch umgekehrt zeigen, daß die Lagrangeschen Gleichungen eine notwendige Folge von Gl. (167) sind. Setzt man nämlich $\delta(L - V)$ aus Gl. (168) in Gl. (167) ein, so hat man

$$\int_0^{t_1}\left\{\frac{\partial(L-V)}{\partial q_1}\delta q_1 + \cdots + \frac{\partial(L-V)}{\partial q_n}\delta q_n\right\}dt$$
$$+\int_0^{t_1}\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\delta \dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\delta \dot{q}_n\right\}dt = 0.$$

Das letzte Integral läßt sich aber umformen, indem man beachtet, daß

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}(\delta q_i) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i$$

ist. Die Integration des ersten Gliedes in diesem Ausdrucke nach der Zeit läßt sich ausführen. Sie liefert Null, weil δq_i an den Grenzen verschwindet. Daher geht die Gleichung über in

$$\int_0^{t_1}\left\{\left(\frac{\partial(L-V)}{\partial q_1}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)\right)\delta q_1+\cdots\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial(L-V)}{\partial q_n}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\right)\right)\delta q_n\right\}dt=0.$$

Nun sind aber die δq ganz willkürlich und die Gleichung gilt für jede Wahl, die wir dafür treffen mögen. Wir können also z. B. alle δq mit Ausnahme von δq_i gleich Null setzen. Dann muß auch sein

$$\int_0^{t_1}\left(\frac{\partial(L-V)}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right)\delta q_i\cdot dt=0,$$

und da auch δq_i selbst noch eine willkürliche Funktion der Zeit ist, kann die Gleichung nur dann für jede beliebige Wahl dieser Funktion gültig sein, wenn zu jeder Zeit der andere Faktor gleich Null ist. Damit kommen wir wieder auf die Lagrangesche Gleichung (166). Wir haben uns hiermit überzeugt, daß das Hamiltonsche Prinzip und die Lagrangeschen Gleichungen im Grunde genommen dasselbe aussagen, wenigstens soweit es sich, wie hier angenommen, um die Anwendung auf Verbände mit holonomen Bedingungen handelt.

In der Tat macht es auch für die Behandlung einer Aufgabe kaum einen Unterschied, ob man von dem einen oder dem anderen Satze ausgeht. Auch wenn man vom Hamiltonschen Prinzip ausgehen will, muß man zunächst den Ausdruck für die lebendige Kraft und zugleich den für die potentielle Energie V aufstellen, worauf man durch die Ausführung der Variation an dem Integrale der Gl. (167) zu den Bewegungsgleichungen gelangt. Der Mathematiker schätzt an dem Hamiltonschen Prinzip die einfache und sich dem Gedächtnisse leicht einprägende Form der Gl. (167). Wer es als Hauptaufgabe der Mechanik betrachtet, Aufschluß über die in der Wirklichkeit vorkommenden Bewegungsvorgänge zu geben, wird auf diese Eleganz der Form freilich weniger Wert legen. Ähnlich ist es auch mit dem Prinzip der kleinsten Wirkung und

mit dem Gaußschen Prinzip des kleinsten Zwanges; es hätte keinen Zweck, wenn ich auf diese auch noch eingehen wollte.

Dagegen darf nicht verschwiegen werden, daß diese allgemeinen Sätze auf einem Gebiete in der Tat wichtige Dienste geleistet haben, die durch die anderen Methoden nicht oder wenigstens nicht gleich gut geleistet werden konnten. Maxwell hat nämlich die Induktion zwischen mehreren elektrischen Stromkreisen auf Sätze der Mechanik zurückgeführt und sie dadurch dem Verständnisse näher gebracht, indem er die elektrischen Leiter als mechanische Systeme von mehreren Freiheitsgraden und die magnetische Energie als die lebendige Kraft dieser Systeme auffaßte. Die Gesetze der elektrodynamischen Induktion, das Faradaysche Induktionsgesetz usf. zeigen sich dann in der Tat in genauer Übereinstimmung mit dem Verhalten, das man von einem in der angegebenen Art zusammengesetzten mechanischen Systeme zu erwarten hätte. Auch die Reibungen finden in dem elektrischen Systeme ihr Analogon in den Ohmschen Widerständen usf.

Der Satz von Hamilton bildet, ebenso wie die hier nicht weiter besprochenen Prinzipe, eine sehr allgemein gehaltene Aussage, von der man mit einem gewissen Rechte behaupten darf, daß sie den wesentlichsten Inhalt der Dynamik in einer einzigen kurzen Formel zusammenzufassen gestattet. Freilich setzt der richtige Gebrauch dieser Formel zugleich eine lange Reihe von Einzelkenntnissen voraus. Der Wert einer solchen Zusammenfassung ist aber insbesondere darin zu erblicken, daß sich die Erwartung daran knüpfen läßt, die Gültigkeit dieser Formel beschränke sich möglicherweise gar nicht auf das Gebiet der rein mechanischen Naturerscheinungen, aus denen sie ursprünglich abgeleitet wurde, sondern sie könne gerade ihrer allgemeinen Fassung wegen dazu geeignet sein, auch noch die Gesetzmäßigkeiten in anderen Teilen der Physik bei passender Deutung der in der Formel vorkommenden Größen richtig wiederzugeben.

Die Mechanik hat sich von allen Teilen der theoretischen Physik zuerst entwickelt, und hierauf versuchte man, wie es nicht anders sein konnte, die übrigen Teile zunächst in möglichst engem Anschlusse an die Mechanik auszubilden. Lange Zeit hindurch galt es überhaupt als das letzte Ziel der theoretischen Physik, alle Naturerscheinungen auf die Gesetze der Mechanik zurückzuführen. Solange man von der Erwartung ausging, daß dies möglich sein müsse, hatte man allen Grund dazu, die allgemeinsten Fassungen, die sich den mechanischen Gesetzen geben ließen, besonders hoch einzuschätzen, da man von ihnen am ersten erwarten durfte, daß sie sich auch noch über das engere Gebiet der Mechanik hinaus bewähren würden.

Heute ist man nun freilich, trotz mancher Einzelerfolge, von denen ich den bedeutsamsten schon besprochen habe, von der Meinung zurückgekommen, daß sich das ganze große Gebiet der Theorie der Elektrizität und des Magnetismus restlos in die alte Mechanik eingliedern ließe. Die Forscher, die auf diesem Gebiete arbeiten, neigen jetzt vielmehr der entgegengesetzten Ansicht zu, daß die Theorie der Elektrizität im Laufe ihrer weiteren selbständigen und von der Mechanik ganz unabhängigen Ausbildung dahin führen könne, letzten Endes auch noch die ganze Mechanik mit zu umfassen. Dabei bleibt zwar das Ziel im ganzen dasselbe wie früher, aber die Mittel, die man für tauglich hält, dahin zu gelangen, sind jetzt andere geworden. Durch diese Wendung haben die allgemeinen Prinzipe der Mechanik ihre frühere Bedeutung für naturphilosophische Betrachtungen dieser Art zum großen Teil eingebüßt.

Anmerkung. Bei der vorhergehenden Ableitung des Hamiltonschen Prinzips habe ich nur auf Verbände mit holonomen Bedingungen Rücksicht genommen. Man kann hinzufügen, daß sich diese Formel gerade ihrer allgemeinen Fassung wegen auch noch auf Verbände mit nicht-holonomen Bedingungen beziehen läßt. Es kommt dabei nur darauf an, die Variation δ, die darin vorkommt, so auszuführen, wie es hierzu nötig ist. Darauf gehe ich aber nicht weiter ein, da dies mit dem Zwecke dieses Lehrbuchs meiner Ansicht nach nicht vereinbar wäre.

Dritter Abschnitt.

Der Kreisel.

§ 33. **Die Bewegungsgleichungen für den symmetrischen Kreisel.**

Schon im vierten Bande habe ich einen kurzen Abriß der Kreiseltheorie gegeben, und ich setze hier voraus, daß sich der Leser mit dem, was dort besprochen wurde, bereits bekannt gemacht hat. Dort war auch schon die „Hauptgleichung“ für den schweren symmetrischen Kreisel, der sich reibungsfrei um einen Punkt der Symmetrieachse zu drehen vermag, aufgestellt worden, nämlich die Differentialgleichung in Vektorform, aus deren Integration sich alle Einzelerscheinungen der Kreiselbewegung, die sich unter den angegebenen Bedingungen einstellen können, herleiten lassen. Ich werde darauf alsbald zurückkommen. Einstweilen wollen wir aber die Differentialgleichungen der Kreiselbewegung noch einmal auf anderem Wege, ohne jede Bezugnahme auf die früheren Untersuchungen, von neuem ableiten, und zwar ohne vorläufig irgend eine Annahme über die an dem Kreisel angreifenden äußeren Kräfte zu machen. Dagegen wird auch jetzt wieder vorausgesetzt, daß sich der Kreisel um einen festen Punkt dreht und daß das auf diesen Punkt bezogene Trägheitsellipsoid ein Umdrehungsellipsoid ist, auf dessen Umdrehungsachse der Schwerpunkt des Kreisels liegt. Ein solcher Kreisel soll kurzweg als ein symmetrischer bezeichnet werden, obschon es auf seine Gestalt im übrigen gar nicht ankommt, falls nur die genannten Bedingungen erfüllt sind.

Der Kreisel mit festem Punkt bildet einen dreiläufigen Verband mit holonomen Bedingungen. Wir

wollen uns zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen des Verfahrens von Lagrange bedienen, das hier leicht zum Ziele führt. Die Koordinaten φ, ψ, χ, deren wir uns zur Beschreibung der augenblicklichen Stellung des Kreisels bedienen wollen, sind aus der Übersichtszeichnung in Abb. 12, zugleich auch den Richtungen nach, die wir als positiv ansehen wollen, zu entnehmen. O bedeutet den festen Punkt des Kreisels, S den Schwerpunkt. Die Lage der Kreiselachse beschreiben wir durch den Winkel ψ, den sie mit der vertikal nach oben gezogenen X-Achse einschließt, und durch den Winkel ψ, den die durch OS gelegte Vertikalebene mit der im Raume feststehenden XZ-Ebene bildet. In einer Ebene durch S und senkrecht zu OS denken wir uns einen in der Abbildung angegebenen Kreis von beliebigem Halbmesser gezogen, dessen Mittelpunkt S ist. Mit SB ist der Radius des Kreises bezeichnet, der

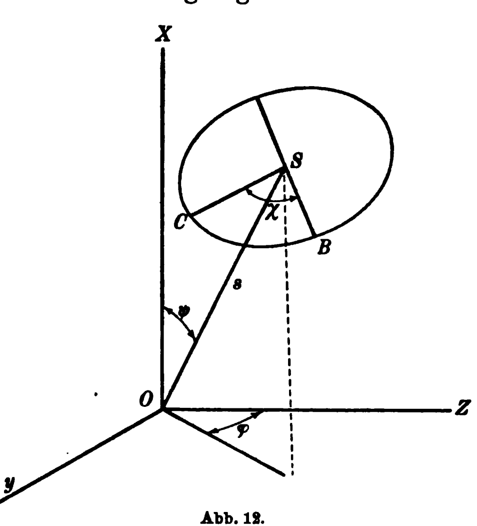


Abb. 12.

in der Ebene XOS enthalten ist, und zwar jener, für den die Verbindungslinie OB einen größeren Winkel mit der X-Achse einschließt als OS. Auf dem Kreiselkörper denken wir uns einen Punkt C markiert, und der Winkel, den SC mit SB einschließt, bildet die dritte Koordinate χ. Jede der drei Koordinaten kann unabhängig von den beiden andern geändert werden, so daß also in der Tat nur holonome Bedingungen vorliegen.

Der allgemeinste Bewegungszustand des Kreisels zur Zeit t wird durch die Geschwindigkeiten $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$, $\dot{\chi}$ gekennzeichnet. Die Geschwindigkeit $\dot{\chi}$ gehört zur Drehachse OS, also zu einer

Hauptträgheitsachse; das zugehörige Trägheitsmoment sei mit θ_1 bezeichnet. Auch die mit der Geschwindigkeit $\dot\psi$ erfolgende Drehung gehört zu einer Hauptträgheitsachse, nämlich zu jener, die senkrecht zur Ebene XOS steht. Die Geschwindigkeit $\dot\varphi$ dagegen bezieht sich auf die vertikale Achse OX. Wir zerlegen sie in zwei Komponenten $\dot\varphi \cos\psi$ in Richtung der Figurenachse OS und $\dot\varphi \sin\psi$ in Richtung der in der Ebene XOS liegenden Hauptachse, für die das Trägheitsmoment mit θ_2 bezeichnet werden soll.

Die lebendige Kraft finden wir in derselben Weise wie schon in § 29 für das rollende Rad nach Gl. (112) von Band IV, nämlich

$$L = \tfrac{1}{2}\theta_1 (\cos\psi \cdot \dot\varphi + \dot\chi)^2 + \tfrac{1}{2}\theta_2 (\dot\psi^2 + \sin^2\psi \cdot \dot\varphi^2). \qquad (169)$$

Für die in den Gleichungen von Lagrange vorkommenden Differentialquotienten erhält man der Reihe nach

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = \theta_2 \dot\psi, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\psi}\right) = \theta_2 \frac{d^2\psi}{dt^2},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = -\theta_1 \left(\cos\psi \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\chi}{dt}\right) \sin\psi \frac{d\varphi}{dt} + \theta_2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \sin\psi \cos\psi,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \theta_1 (\cos\psi\, \dot\varphi + \dot\chi) \cos\psi + \theta_2 \sin^2\psi\, \dot\varphi,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) = \theta_1 \left(\cos^2\psi \frac{d^2\varphi}{dt^2} - 2\cos\psi \sin\psi \frac{d\psi}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \cos\psi \frac{d^2\chi}{dt^2} - \sin\psi \frac{d\psi}{dt}\frac{d\chi}{dt}\right) + \theta_2 \left(\sin^2\psi \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\sin\psi\cos\psi \frac{d\psi}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \chi} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\chi} = \theta_1 (\cos\psi\, \dot\varphi + \dot\chi),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\chi}\right) = \theta_1 \left(\cos\psi \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \sin\psi \frac{d\psi}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d^2\chi}{dt^2}\right).$$

Die auf die Koordinaten reduzierten äußeren Kräfte seien einstweilen durch die allgemeinen Zeichen F_ψ, F_φ und F_χ wiedergegeben. Dann lauten die Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned}
F_\psi &= \theta_1\left(\sin\psi\cos\psi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \sin\psi\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\chi}{dt}\right)\\
&\qquad + \theta_2\left(\frac{d^2\psi}{dt^2} - \sin\psi\cos\psi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right),\\
F_\varphi &= \theta_1\left(\cos^2\psi\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \cos\psi\frac{d^2\chi}{dt^2} - 2\sin\psi\cos\psi\frac{d\psi}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right.\\
&\qquad\left. - \sin\psi\frac{d\psi}{dt}\frac{d\chi}{dt}\right)\\
&\qquad + \theta_2\left(\sin^2\psi\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\sin\psi\cos\psi\frac{d\psi}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right),\\
F_\chi &= \theta_1\left(\cos\psi\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d^2\chi}{dt^2} - \sin\psi\frac{d\psi}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (170)$$

In diesen Gleichungen kommen die Koordinaten φ und χ selbst nicht vor, sondern nur ihre Differentialquotienten nach der Zeit. Wir erzielen daher eine wesentliche Vereinfachung, wenn wir an ihrer Stelle zwei neue Variablen einführen, die durch die Gleichungen

$$w = \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{und} \quad u_1 = \frac{d\chi}{dt} + \cos\psi\frac{d\varphi}{dt}$$

definiert sind. Die Größe w können wir als die Winkelgeschwindigkeit der Präzessionsbewegung bezeichnen und u_1 gibt, wie aus den vorhergehenden Betrachtungen bereits hervorgeht, die in die Richtung der Figurenachse fallende Winkelgeschwindigkeitskomponente des augenblicklichen Bewegungszustands an. Aus der letzten Gleichung folgt

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{d^2\chi}{dt^2} + \cos\psi\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \sin\psi\frac{d\psi}{dt}\frac{d\varphi}{dt}.$$

Durch Substitution dieser Werte gehen die Gleichungen (170) in die folgende Form über

$$\left.\begin{aligned}
F_\psi &= u_1 w\,\theta_1\sin\psi + \theta_2\left(\frac{d^2\psi}{dt^2} - w^2\sin\psi\cos\psi\right),\\
F_\varphi &= \theta_1\left(\cos\psi\frac{du_1}{dt} - u_1\sin\psi\frac{d\psi}{dt}\right)\\
&\qquad + \theta_2\left(\sin^2\psi\frac{dw}{dt} + 2w\sin\psi\cos\psi\frac{d\psi}{dt}\right),\\
F_\chi &= \theta_1\frac{du_1}{dt}
\end{aligned}\right\} \quad (171)$$

Diese Gleichungen lassen sich zunächst in der folgenden Weise verwenden. Man nehme ψ, u_1 und w als ganz beliebige Funktionen der Zeit an. Dann lehren die Gleichungen, welche Kräfte man auf den Kreisel wirken lassen muß, um die dadurch beschriebene Bewegung herbeizuführen. Man kann also bestimmte einfache Annahmen über den Bewegungsvorgang machen und hierauf untersuchen, unter welchen Umständen eine solche Bewegung entsteht.

Ich will mich aber hierbei jetzt nicht aufhalten und sofort zu dem bemerkenswertesten Falle übergehen, daß die Bewegung ausschließlich unter dem Einflusse des Eigengewichtes vor sich geht. Dann ist

$$F_\psi = mgs \sin\psi, \quad F_\varphi = 0, \quad F_\chi = 0$$

zu setzen. Damit erhalten wir die Bewegungsgleichungen für den schweren symmetrischen Kreisel. Aus der letzten der Gleichungen (171) folgt für diesen Fall, daß u_1 eine Konstante ist, die durch die Anfangsbedingungen als gegeben betrachtet werden kann. Die beiden anderen Gleichungen gehen über in

$$\left.\begin{aligned} u_1 w \theta_1 \sin\psi + \theta_2\left(\frac{d^2\psi}{dt^2} - w^2 \sin\psi\cos\psi\right) - mgs\sin\psi &= 0 \\ -u_1\theta_1\frac{d\psi}{dt} + \theta_2\left(\sin\psi\frac{dw}{dt} + 2w\cos\psi\frac{d\psi}{dt}\right) &= 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (172)$$

Wir stehen jetzt vor der Aufgabe, die beiden Gleichungen zu integrieren, um die Variabeln ψ und w als Funktionen der Zeit darzustellen. Hierbei ist es nicht nötig, daß wir uns auf die Untersuchung besonderer Fälle beschränken, die sich leichter behandeln lassen, sondern die Aufgabe kann ganz allgemein gelöst werden.

§ 34. Strenge Lösung für den schweren symmetrischen Kreisel.

Die zweite der Gleichungen (172) wird integrabel durch Multiplikation mit $\sin\psi$ und die Integration liefert

$$u_1\theta_1\cos\psi + \theta_2 w \sin^2\psi = C_1. \qquad (173)$$

Die Integrationskonstante C_1 hängt von den Anfangsbedingungen ab. Wir dürfen von vornherein erwarten und finden auch nachher bestätigt, daß der Winkel ψ bei der eigentlichen Kreiselbewegung, die wir hier untersuchen wollen, zwischen gewissen Grenzen hin und her schwankt. Wir wollen nun die Zeit von einem Augenblicke an rechnen, in dem ψ grade ein Maximum oder ein Minimum, $\frac{d\psi}{dt}$ also gleich Null war, und diesen Grenzwert von ψ mit ψ_0 bezeichnen. Der zugehörige Wert von w sei w_0; dann wird

$$C_1 = u_1 \theta_1 \cos \psi_0 + \theta_2 w_0 \sin^2 \psi_0$$

und durch Auflösung von Gl. (173) nach w erhalten wir

$$w = \frac{u_1 \theta_1 (\cos \psi_0 - \cos \psi) + \theta_2 w_0 \sin^2 \psi_0}{\theta_2 \sin^2 \psi}. \qquad (174)$$

Wenn ψ als Funktion der Zeit ermittelt sein wird, ist durch diese Gleichung auch w bekannt.

Ein zweites Integral läßt sich entweder aus den Gleichungen (172) ableiten oder auch unmittelbar nach dem Satze von der lebendigen Kraft aufstellen. Für L erhält man nach Gl. (169) mit den inzwischen eingeführten Bezeichnungen

$$L = \tfrac{1}{2} \theta_1 u_1^2 + \tfrac{1}{2} \theta_2 \left(w^2 \sin^2 \psi + \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right).$$

Je höher der Schwerpunkt liegt, um so größer wird die potentielle Energie der Schwere und um so kleiner die lebendige Kraft L. In der durch den Winkel ψ angegebenen Lage ist die potentielle Energie um den Betrag

$$mgs \cos \psi$$

größer als bei horizontaler Lage der Kreiselachse. Wenn wir von der Berücksichtigung von Bewegungswiderständen absehen dürfen, ist die Summe aus der potentiellen Energie und der lebendigen Kraft konstant. Beachten wir, daß das erste Glied in dem Ausdrucke für L schon für sich konstant ist, so erhalten wir die Gleichung

$$2mgs \cos \psi + \theta_2 \left(w^2 \sin^2 \psi + \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right) = C_2. \qquad (175)$$

Um dieses Integral aus den Bewegungsgleichungen (172) selbst herzuleiten, löse man die zweite dieser Gleichungen nach $u_1\theta_1$ auf und setze den dabei gefundenen Wert in die erste Gleichung ein. Wenn man hierauf noch mit $\frac{d\psi}{dt}$ multipliziert, wird die Gleichung integrabel und führt ebenfalls zu Gl. (175).

Auch die Integrationskonstante C_2 ermitteln wir aus den Grenzbedingungen. Da zu Anfang der Zeit $\frac{d\psi}{dt}$ gleich Null sein sollte, finden wir

$$C_2 = 2\,mgs\cos\psi_0 + \theta_2 w_0^2 \sin^2\psi_0.$$

Da w vorher schon in ψ ausgedrückt war, erhalten wir durch Einsetzen dieses Wertes in Gl. (175) sofort eine Gleichung, in der nur noch die Variable ψ vorkommt. Die Gleichung lautet

$$2mgs(\cos\psi - \cos\psi_0) - \theta_2 w_0^2 \sin^2\psi_0 + \theta_2\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \frac{(u_1\theta_1(\cos\psi_0 - \cos\psi) + \theta_2 w_0 \sin^2\psi_0)^2}{\theta_2\sin^2\psi} = 0. \tag{176}$$

Durch Multiplikation mit $\theta_2\sin^2\psi$ und etwas geänderte Zusammenfassung der Glieder erhält man daraus

$$(\cos\psi - \cos\psi_0)\{2mgs\theta_2\sin^2\psi - 2u_1\theta_1\theta_2 w_0\sin^2\psi_0 + u_1^2\theta_1^2(\cos\psi - \cos\psi_0)\} + \theta_2^2 w_0^2 \sin^2\psi_0(\sin^2\psi_0 - \sin^2\psi) + \theta_2^2\left(\frac{d\cos\psi}{dt}\right)^2 = 0.$$

Die Gestalt der Gleichung weist darauf hin, daß sich eine erhebliche Vereinfachung erzielen läßt, wenn man weiterhin $\cos\psi$ als die unbekannte Variable ansieht. Wir setzen daher

$$\cos\psi = x \quad \text{und} \quad \cos\psi_0 = x_0. \tag{177}$$

Zur weiteren Abkürzung führen wir ferner noch die folgenden Bezeichnungen für die Konstanten ein

$$2mgs\theta_2 = a^2, \quad u_1\theta_1 = b, \quad \theta_2 w_0 = c. \tag{178}$$

Man überzeugt sich leicht, daß die in dieser Weise eingeführte Konstante a von den gleichen Dimensionen ist wie b und c,

was zur Übersichtlichkeit der Formeln erheblich beiträgt. Hiermit und nach einer kleinen Umformung geht die vorhergehende Differentialgleichung über in

$$(x-x_0)\{a^2(1-x^2)-2bc(1-x_0^2)+b^2(x-x_0)+c^2(1-x_0^2)(x+x_0)\}$$
$$+\theta_2^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=0.$$

Der in der geschweiften Klammer stehende Ausdruck enthält außer konstanten Größen die Variabele x und zwar ist er für x vom zweiten Grade. Aus der Algebra weiß man, daß sich ein solcher quadratischer Ausdruck in ein Produkt aus zwei linearen Faktoren zerlegen läßt. Die Gleichung läßt sich daher auf die Form bringen

$$\theta_2^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=a^2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2). \tag{179}$$

Unter x_1 und x_2 sind zwei konstante Größen zu verstehen, die man erhält, wenn man den quadratischen Ausdruck in der geschweiften Klammer gleich Null setzt und die dadurch entstehende Gleichung nach x auflöst. Diese Gleichung läßt sich schreiben

$$x^2a^2-x(b^2+c^2(1-x_0^2))=a^2-2bc(1-x_0^2)-b^2x_0+c^2(1-x_0^2)x_0.$$

Durch die Auflösung erhält man

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\frac{b^2+c^2(1-x_0^2)+\sqrt{R}}{2a^2}\\ x_2&=\frac{b^2+c^2(1-x_0^2)-\sqrt{R}}{2a^2}\end{aligned}\right\}. \tag{180}$$

Für den zur Abkürzung mit R bezeichneten Radikanden hat man zunächst

$$R=(b^2+c^2(1-x_0^2))^2$$
$$+4a^2\{a^2-2bc(1-x_0^2)-b^2x_0+c^2(1-x_0^2)x_0\}.$$

Dieser Radikand ist stets positiv; die Wurzeln x_1 und x_2 sind daher stets reell. Man erkennt dies daraus, daß sich R

durch einfache algebraische Umformungen in die folgende Form überführen läßt

$$
\begin{aligned}
R = [b^2 + c^2(1 - x_0^2) - 2a^2]^2 \\
+ 4a^2(1 - x_0)(b - c(1 + x_0))^2,
\end{aligned}
\tag{181}
$$

wovon man sich durch Entwicklung der Ausdrücke leicht überzeugt. Da nun x_0 einen Cosinus bedeutete (siehe Gl. (177)), der nicht größer als Eins werden kann, sind beide Glieder von R unter allen Umständen positiv.

Ferner folgt aus den Gleichungen (180), daß sowohl $x_1 + x_2$, als auch $x_1 - x_2$ positiv sein müssen. Daher ist x_1 auf jeden Fall positiv, während x_2 sowohl positiv als negativ sein kann. Dies hängt von den besonderen Werten der Konstanten a, b, c und x_0, d. h. von dem Anfangszustande der Bewegung ab. Ferner findet man

$$
1 - x_1 = \frac{2a^2 - b^2 - c^2(1 - x^2) - \sqrt{R}}{2a^2}
$$

und aus Gl. (181) folgt, daß dies unter allen Umständen ein negativer Wert sein muß. Daher ist x_1 nicht nur stets positiv, sondern auch stets größer als Eins. Hierbei ist von dem Grenzfalle, daß b und c gleich Null werden, womit die Bewegung in eine ebene Pendelbewegung übergeht, abgesehen.

Dagegen ist x_2 unter der Voraussetzung, daß es ebenfalls positiv ist, was freilich nicht nötig ist, aber bei den wichtigsten Anwendungen, die wir von diesen Entwicklungen zu machen, zutrifft, auf jeden Fall ein echter Bruch, da sich in derselben Weise zeigen läßt, daß $1 - x_2$ stets positiv sein muß.

Gehen wir nach dieser Besprechung der Konstanten zu Gl. (179) zurück, die in jedem Augenblicke der Bewegung erfüllt sein muß, so bemerken wir, daß die linke Seite als ein Quadrat stets positiv, der Faktor $x - x_1$ auf der rechten Seite aber stets negativ ist. Denn von x_1 ist bewiesen, daß es größer ist als Eins, und x kann, da es einen Cosinus bedeutet, nicht größer werden als Eins. Von den beiden Faktoren $(x - x_0)$ und $(x - x_2)$ muß daher jederzeit der eine positiv und der

andere negativ sein. Das heißt, x muß zwischen x_0 und x_2 liegen.

Differentiiert man Gl. (179) nach t, so erhält man nach Streichen des auf beiden Seiten auftretenden Faktors $\frac{dx}{dt}$

$$2\frac{\theta_2^2}{a^2}\frac{d^2x}{dt^2} = (x - x_0)(x - x_1) + (x - x_0)(x - x_2) + (x - x_1)(x - x_2). \tag{182}$$

Für die Zeit $t = 0$ folgt daher

$$2\frac{\theta_2^2}{a^2}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0 = (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)$$

und da der erste Faktor rechts negativ ist, folgt auch hieraus, daß die Bewegung sich von da ab nach x_2 hin wendet Nehmen wir also an, daß x_0 größer sei als x_2, so hat $\frac{dx}{dt}$ nach kurzer Zeit einen negativen Wert erlangt. Nun kann sich aber das Vorzeichen von $\frac{dx}{dt}$ in der aus Gl. (179) folgenden Gleichung

$$\frac{dx}{dt} = \pm\frac{a}{\theta_2}\sqrt{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)} \tag{183}$$

nicht an irgendeiner Stelle sprungweise ändern, außer an einer Stelle, an der der Ausdruck zu Null wird. Daher bleibt $\frac{dx}{dt}$, nachdem es negativ geworden ist, so lange negativ, bis es wieder zu Null wird, und das geschieht erst, wenn $x = x_2$ geworden ist. Von da ab kehrt sich, wie aus Gl. (182) hervorgeht, das Vorzeichen von $\frac{dx}{dt}$ um und es bleibt weiterhin positiv, bis x wieder gleich x_0 geworden ist, worauf sich der Schwingungsvorgang, dem der Wert von x unterworfen ist, in derselben Weise von neuem wiederholt. Hieraus folgt nun auch, daß x_0 und x_2 miteinander vertauscht werden dürfen, denn von x_0 war bei der Einführung dieses Wertes nur vorausgesetzt worden, daß es einer Stellung entspreche, bei der $\frac{d\psi}{dt}$ und hiermit auch $\frac{dx}{dt}$ gleich Null war. Jedenfalls ist es hiernach zulässig, unter x_0 weiterhin den größeren der beiden Grenzwerte zu verstehen, zwischen denen die Schwingung erfolgt.

Eine besondere Besprechung erfordert der Fall, daß $x_2 = x_0$ wird. Wir ermitteln zunächst die Beziehung, die zwischen den Konstanten bestehen muß, damit dieser Fall eintritt. Aus Gl. (180) findet man dafür die Bedingungsgleichung

$$2a^2x_0 = b^2 + c^2(1 - x_0^2) - \sqrt{R}.$$

Bringt man die beiden ersten Glieder der rechten Seite nach links, quadriert und führt den Wert von R ein, so erhält man nach Vereinfachung die Gleichung

$$a^2 - 2bc + 2c^2x_0 = 0. \tag{184}$$

Die Konstante a ist für den Kreisel ein für allemal gegeben. Dagegen hängen b, c und x_0 von dem beliebig zu wählenden Anfangszustande ab. Wenn zwei dieser Größen beliebig angenommen sind, kann man die dritte im allgemeinen immer noch so wählen, daß die vorstehende Beziehung erfüllt ist und hiermit x_2 gleich x_0 wird. Man muß dabei nur beachten, daß x_0 jedenfalls ein echter Bruch sein muß, so daß b und c nicht ganz beliebig angenommen werden dürfen, wenn die ins Auge gefaßte Bewegung möglich sein soll.

Wenn nun $x_2 = x_0$ ist, wird für $t = 0$ auch die Beschleunigung $\frac{d^2x}{dt^2}$ nach Gl. (182) zu Null. Daher bleibt die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$, die zu Anfang Null war, auch dauernd gleich Null. Man hat dann den Fall der regulären Präzession, den ich alsbald noch weiter besprechen werde.

Die zum Durchlaufen des Schwingungsweges von x_0 bis x_2 oder umgekehrt erforderliche Zeit T läßt sich aus Gl. (183) wie folgt berechnen. Man hat

$$dt = \pm \frac{\theta_2}{a} \frac{dx}{\sqrt{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}}.$$

Hieraus folgt für T

$$\begin{aligned} T &= -\frac{\theta_2}{a}\int_{x_0}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}} \\ &= +\frac{\theta_2}{a}\int_{x_2}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}}. \end{aligned} \tag{185}$$

Das Integral ist, da der Radikand vom dritten Grade in x ist, ein elliptisches. Auf die Auswertung gehe ich hier nicht weiter ein. Zum mindesten wird sich das Integral durch eine mechanische Quadratur stets näherungsweise berechnen lassen, wenn x_0, x_1 und x_2 bekannt oder auf Grund der vorhergehenden Formeln bereits berechnet sind. Für den wichtigsten Fall wird T im nächsten Paragraphen berechnet werden.

§ 35. Reguläre und pseudoreguläre Präzession.

Die Kreiselbewegung wird als eine reguläre Präzession bezeichnet, wenn der Winkel ψ, den die Figurenachse mit der lotrechten Richtung bildet, konstant bleibt, was dann zur Folge hat, daß auch die Winkelgeschwindigkeit w konstant wird. Wir sahen schon, daß dieser Fall eintritt, wenn $x_2 = x_0$ ist, wofür Gl. (184) die Bedingung ausspricht.

Anstatt uns hierauf zu berufen, können wir die Theorie der regulären Präzession aber auch unmittelbar aus den Bewegungsgleichungen (172) ableiten. Aus der letzten dieser Gleichungen folgt, daß für

$$\frac{d\psi}{dt} = 0 \quad \text{auch} \quad \frac{dw}{dt} = 0$$

sein muß, und die erste Gleichung liefert, wenn wir jetzt den konstanten Wert von ψ mit ψ_0 und den von w mit w_0 bezeichnen,

$$u_1 \theta_1 w_0 - \theta_2 w_0^2 \cos\psi_0 - mgs = 0. \tag{186}$$

Diese Gleichung stimmt, wenn man sich der Bedeutung der Konstanten a, b, c erinnert, mit Gl. (184) überein. Gewöhnlich wird sie dazu verwendet, die Winkelgeschwindigkeit w_0 der regulären Präzession, die zu einem gegebenen Werte von ψ_0 gehört, zu berechnen. Die Auflösung liefert

$$w_0 = \frac{u_1\theta_1 \pm \sqrt{u_1^2\theta_1^2 - 4\,mgs\,\theta_2 \cos\psi_0}}{2\theta_2 \cos\psi_0}. \tag{187}$$

Die Gleichung stimmt überein mit der schon im vierten Bande auf anderem Wege abgeleiteten Gleichung (167), S. 240

d. 3. Aufl., wobei nur zu beachten ist, daß dort die Vorzeichenfestsetzungen von den hier gebrauchten abweichen. Ich kann daher hier auf eine weitere Besprechung der regulären Präzession verzichten.

Als „pseudoregulär" wird die Präzessionsbewegung bezeichnet, wenn sie der regulären so nahe benachbart ist, daß sie sich bei der Beobachtung nicht von ihr unterscheiden läßt. Dies tritt ein, wenn die beiden Grenzen x_0 und x_2, zwischen denen sich x oder cos ψ bewegt, sehr nahe beieinander liegen.

Wir setzen für diesen Fall

$$x_1 - x_2 = p, \quad x_0 - x_2 = q, \quad x - x_2 = z$$

und beachten, daß q und z kleine Größen sind, deren höhere Potenzen vernachlässigt werden dürfen, während p viel größer ist. Dann wird

$$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = z(z - q)(z - p)$$
$$= zp(q - z).$$

Hiermit geht Gl. (183) über in

$$\frac{dz}{dt} = \pm \frac{a}{\theta_2} \sqrt{p(qz - z^2)}.$$

Wir trennen die Variabeln und erhalten

$$dt = \pm \frac{\theta_2}{a} \frac{dz}{\sqrt{p(qz - z^2)}}.$$

Die Ausführung der Integration liefert

$$t = C \pm \frac{\theta_2}{a\sqrt{p}} \arcsin\left(1 - \frac{2z}{q}\right).$$

Die Integrationskonstante C und das Vorzeichen des nächsten Gliedes bestimmen sich aus der Bedingung, daß z zur Zeit $t = 0$ gleich q sein sollte. Damit wird

$$t = \frac{\theta_2}{a\sqrt{p}}\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(1 - \frac{2z}{q}\right)\right). \qquad (188)$$

Die Zeit T für das einmalige Durchlaufen des ganzen Schwingungsweges wird damit

$$T = \pi \frac{\theta_2}{a\sqrt{p}}$$

oder, wenn man für p seinen Wert $x_1 - x_2$ aus Gl. (180) einsetzt,

$$T = \frac{\pi \theta_2}{\sqrt[4]{R}}. \tag{189}$$

Löst man Gl. (188) nach z auf, so erhält man

$$z = \frac{q}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi t}{T}\right). \tag{190}$$

Die Projektion eines Punktes der Figurenachse auf die lotrechte Richtung führt daher eine einfache harmonische Schwingung aus.

Hierbei fragt es sich aber noch, unter welchen Umständen das Eintreten einer pseudoregulären Präzessionsbewegung, wie wir sie hier vorausgesetzt haben, überhaupt zu erwarten ist. Oder mit anderen Worten: unter welchen Umständen x_2 und x_0 sehr wenig verschieden voneinander ausfallen. Zunächst kann man ganz allgemein sagen, daß dies immer dann eintreten wird, wenn Gl. (184) oder die damit gleichbedeutende Gleichung (186) von den sich auf den Anfangszustand beziehenden Konstanten zwar nicht genau erfüllt wird, wie dies zur Gleichheit von x_2 mit x_0 nötig wäre, aber doch nahezu. Hierzu gehört aber insbesondere der Fall, daß die Winkelgeschwindigkeit u_1, mit der der Kreisel um seine Achse rotiert, sehr groß ist, während die Winkelgeschwindigkeit w der Präzession gegenüber u_1 so klein ist, daß sie dieser gegenüber vernachlässigt werden kann.

Da dieser Fall des sehr schnell rotierenden Kreisels hauptsächlich von Wichtigkeit ist, denkt man in erster Linie an ihn, wenn von der pseudoregulären Präzession die Rede ist, und er muß daher hier auch noch besonders besprochen werden.

Wenn man in Gl. (180) c gegenüber b vernachlässigt, nachdem der Wert von R aus Gl. (181) eingesetzt ist, erhält man

$$x_1 = \frac{b^2 + \sqrt{(b^2 - 2a^2)^2 + 4a^2b^2(1 - x_0)}}{2a^2}$$

$$x_2 = \frac{b^2 - \sqrt{(b^2 - 2a^2)^2 + 4a^2b^2(1 - x_0)}}{2a^2}.$$

Der hier vorkommende Radikand R kann aber noch weiter vereinfacht werden, wenn die Winkelgeschwindigkeit u_1 so groß ist, daß b auch gegenüber a noch als ziemlich groß betrachtet werden kann. Man kann dann mit hinreichender Genauigkeit setzen

$$R = \sqrt{(b^2 - 2a^2)^2 + 4a^2b^2(1 - x_0)}$$
$$= \sqrt{b^4 + 4a^4 - 4a^2b^2x_0} = b^2 - \frac{2a^2b^2x_0 - 2a^4}{b^2}$$

Setzt man dies in die Gleichung für x_2 ein, so erhält man

$$x_2 = x_0 - \frac{a^2}{b^2} \quad \text{oder} \quad q = \frac{a^2}{b^2}. \tag{191}$$

In der Tat kann sich daher, wenn b groß gegen a ist, x_2 nur wenig von x_0 unterscheiden. Die Bewegung ist daher unter diesen Umständen stets eine pseudoreguläre Präzession. Dies war übrigens auch schon im vierten Bande mit einfacheren Hilfsmitteln nachgewiesen worden.

Für diesen Fall kann nun auch noch die Schwingungszeit T nach Gl. (189) weiter ausgerechnet werden, indem man den hier für R aufgestellten Wert einsetzt. Man findet dann

$$T = \frac{\pi\theta_2}{\sqrt{b^2 - \frac{2a^2b^2x_0 - 2a^4}{b^2}}},$$

wofür auch noch kürzer mit ausreichender Genauigkeit

$$T = \frac{\pi\theta_2}{b} = \frac{\pi\theta_2}{u_1\theta_1} \tag{192}$$

gesetzt werden kann.

Nachdem z oder, was auf dasselbe hinauskommt, x oder $\cos\psi$ als Funktion der Zeit dargestellt ist, kann man auch w nach Gl. (174) als Funktion der Zeit ermitteln. Ersetzt man in Gl. (174) $\cos\psi$ durch x, so lautet sie

$$w = w_0 \frac{1 - x_0^2}{1 - x^2} + \frac{u_1\theta_1}{\theta_2}\frac{x_0 - x}{1 - x^2}.$$

Hier darf man nicht das erste Glied der rechten Seite gegenüber dem zweiten vernachlässigen, wenn auch u_1 noch so groß gegenüber w_0 angenommen wird. Denn der Faktor von w_0 ist bei der pseudoregulären Präzession nahezu gleich Eins, während der Faktor $x_0 - x$ des zweiten Gliedes sehr klein ist. Führen wir an Stelle von x wieder z ein, so wird

$$w = w_0 \frac{1 - x_0^2}{1 - (x_0 + z - q)^2} + \frac{u_1 \theta_1}{\theta_2} \frac{q - z}{1 - (x_0 + z - q)^2}.$$

Mit Vernachlässigung von höheren Potenzen der kleinen Größen q und z läßt sich dafür schreiben

$$\begin{aligned} w &= w_0 \frac{1 - x_0^2}{1 - x_0^2 + 2x_0(q - z)} + \frac{u_1 \theta_1}{\theta_2} \frac{q - z}{1 - x_0^2 + 2x_0(q - z)}, \\ &= w_0 \frac{(1 - x_0^2)(1 - x_0^2 - 2x_0(q - z))}{(1 - x_0^2)^2} + \frac{u_1 \theta_1}{\theta_2} \frac{(q - z)(1 - x_0^2 - 2x_0(q - z))}{(1 - x_0^2)^2}, \\ &= w_0 - w_0 \frac{2x_0(q - z)}{1 - x_0^2} + \frac{u_1 \theta_1}{\theta_2} \frac{q - z}{1 - x_0^2} - \frac{u_1 \theta_1}{\theta_2} \frac{2x_0(q - z)^2}{(1 - x_0^2)^2}. \end{aligned}$$

Jedenfalls kann aber das letzte Glied dieses Ausdrucks gegenüber dem vorhergehenden vernachlässigt werden. Außerdem ist bei großem u_1 auch das zweite Glied klein gegenüber dem dritten, da der kleine Faktor $q - z$ in beiden vorkommt. Wir behalten daher

$$w = w_0 + (q - z) \frac{u_1 \theta_1}{\theta_2 (1 - x_0^2)}.$$

Für z können wir seinen Wert aus Gl. (190) und für q den aus Gl. (191), außerdem auch für die Konstanten a und b ihre Werte aus den Gleichungen (178) einsetzen. Dann wird nach einfacher Ausrechnung

$$w = w_0 + \frac{mgs}{u_1 \theta_1 (1 - x_0^2)} \left(1 - \cos \frac{\pi t}{T}\right). \tag{193}$$

Der veränderliche Teil von w wird daher bei großem u_1 sehr klein. Das konstante Glied w_0 ist nicht willkürlich, denn bei der Ableitung der Gleichung haben wir vorausgesetzt, daß w_0 so gewählt sei, daß sich x_2 und x_0 nur wenig voneinander

unterscheiden. Um auch w_0 dieser Bedingung gemäß zu bestimmen, können wir davon Gebrauch machen, daß der Mittelwert von w bei der pseudoregulären Präzession mit der Präzessionsgeschwindigkeit bei der regulären Präzession, der jene benachbart ist, übereinstimmen muß. Der Mittelwert von w für einen ganzen Umlauf ist nach Gl. (193)

$$w_m = w_0 + \frac{mgs}{u_1\,\vartheta_1\,(1 - x_0^2)}.$$

Das entsprechende w_m der regulären Präzession läßt sich dagegen nach Gl. (187) berechnen. In dieser Formel können wir unter der Voraussetzung eines großen Wertes von u_1

$$\sqrt{u_1^2\,\vartheta_1^2 - 4mgs\,\vartheta_2 \cos\psi_0} = u_1\,\vartheta_1 - \frac{2mgs\,\vartheta_2 \cos\psi_0}{u_1\,\vartheta_1}$$

setzen. Ferner ist zu beachten, daß in Gl. (187) das negative Wurzelvorzeichen zu nehmen ist, da es sich um die langsame reguläre Präzession handelt. Hiermit erhält man aus Gl. (187) für w_m

$$w_m = \frac{mgs}{u_1\,\vartheta_1}.$$

Der Vergleich beider Werte für w_m liefert

$$w_0 = -\frac{mgs\,x_0^2}{u_1\,\vartheta_1\,(1 - x_0^2)}$$

und wenn man dies in Gl. (193) einsetzt, erhält man

$$w = \frac{mgs}{u_1\,\vartheta_1}\left(1 - \frac{1}{1 - x_0^2}\cos\frac{\pi t}{T}\right). \tag{194}$$

Besonders zu beachten ist hierbei, daß $1 - x_0^2$ ein echter Bruch und daher das zweite Glied in den Extremwerten von größerem Betrage ist, als das erste. Bei der pseudoregulären Präzession ist daher w abwechselnd positiv und negativ, wenn auch im ganzen die positiven Werte überwiegen.

Da die pseudoreguläre Präzession von besonderer Wichtigkeit ist, möge noch ein zweiter Weg zur Ermittelung

von w eingeschlagen werden. Dazu gehen wir auf die ursprünglichen Bewegungsgleichungen (172) zurück. Die erste dieser Gleichungen schreiben wir

$$w \sin \psi \, (u_1 \, \theta_1 - \theta_2 \, w \cos \psi) + \theta_2 \frac{d^2 \psi}{dt^2} - mgs \sin \psi = 0.$$

Da nun in unserem Falle $u_1 \, \theta_1$ als sehr groß gegen $\theta_2 \, w$ vorausgesetzt wird, dürfen wir das zweite Glied in der Klammer gegen das erste vernachlässigen. Lösen wir hierauf die Gleichung nach w auf, so erhalten wir

$$w = \frac{mgs}{u_1 \, \theta_1} - \frac{\theta_2}{u_1 \, \theta_1 \sin \psi} \frac{d^2 \psi}{dt^2}.$$

Die Beschleunigung von ψ können wir aus Gl. (190) entnehmen. Man hat nämlich

$$z = x - x_0 + q \quad \text{oder} \quad x = x_0 + z - q$$

und hiermit nach Gl. (190)

$$\cos \psi = \cos \psi_0 + \frac{q}{2} \left(\cos \frac{\pi t}{T} - 1 \right).$$

Durch Differentiation nach t erhält man daraus

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{q \dfrac{\pi}{T} \sin \dfrac{\pi t}{T}}{2 \sin \psi}.$$

Da sich ψ nur wenig ändert, genügt es, bei der zweiten Differentiation nach t den Nenner des Ausdrucks als konstant zu betrachten, also $\sin \psi$ durch $\sin \psi_0$ zu ersetzen. Dann wird

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = \frac{q \left(\dfrac{\pi}{T} \right)^2 \cos \dfrac{\pi t}{T}}{2 \sin \psi_0}$$

und wenn man diesen Wert in die Gleichung für w einsetzt, erhält man

$$w = \frac{mgs}{u_1 \, \theta_1} - \frac{\theta_2 \, q}{2 u_1 \, \theta_1 \sin^2 \psi_0} \left(\frac{\pi}{T} \right)^2 \cos \frac{\pi t}{T}.$$

Für q können wir ferner den Wert aus Gl. (191) und für T den aus Gl. (192) einsetzen. Damit geht die Gleichung über in

$$w = \frac{mgs}{u_1 \, \theta_1} - \frac{mgs}{u_1 \, \theta_1 \sin^2 \psi_0} \cos \frac{\pi t}{T}.$$

Wenn man sich erinnert, daß $\sin^2 \psi_0 = 1 - x_0^2$ gesetzt werden kann, erkennt man, daß dieser Wert mit dem auf anderem Wege in Gl. (194) abgeleiteten übereinstimmt.

Nachdem w bekannt ist, kann auch der Winkel φ, von dem w der Differentialquotient war, als Funktion der Zeit angegeben werden, indem man w nach t integriert. Man erhält dann

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{mgs}{u_1 \theta_1}\left(t - \frac{1}{1 - x_0^2} \frac{T}{\pi} \sin \frac{\pi t}{T}\right). \tag{195}$$

Die Integrationskonskonstante φ_0 gibt den Wert von φ zur Zeit $t = 0$ an. Wir dürfen diese Integrationskonstante, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, nachträglich auch gleich Null setzen, indem wir uns die Ebene, von der aus φ gezählt wird, durch die Anfangslage der Kreiselachse gelegt denken.

Um die Bewegung vollständig zu beschreiben, bleibt uns jetzt nur noch übrig, die Gestalt der sphärischen Kurve zu ermitteln, die irgendein Punkt der Figurenachse, z. B. der Schwerpunkt, bei der Bewegung durchläuft. Dazu stehen uns bereits alle erforderlichen Angaben zur Verfügung. Die Bahnkurve des Schwerpunkts verläuft in einer schmalen Kugelzone, entsprechend den Werten von x_0 und x_2. Ein kurzes Stück dieser Zone, wie es wenigen Umläufen des Kreisels um die Figurenachse entspricht, kann nahezu als eben angesehen werden. Um eine anschauliche Vorstellung von der Gestalt der sphärischen Kurve zu gewinnen, genügt es daher, eine ebene Kurve zu zeichnen, die als die Projektion eines kurzen Stücks der sphärischen Kurve auf die an die Kugel gelegte Berührungsebene anzusehen ist.

Wir legen in dieser Ebene ein rechtwinkliges Koordinatensystem $\xi\eta$ fest, so daß die η-Achse horizontal gerichtet ist und durch die Mitte der Kugelzone geht, also gleiche Abstände von den durch x_2 und x_0 angegebenen Rändern hat. Die dazu senkrechte ξ-Achse legen wir durch den Punkt, in dem sich die Kreiselachse zur Zeit $t = 0$ befand, und rechnen die ξ positiv, wenn sie nach oben, die η positiv, wenn sie nach links hin

gehen, wie es dem Umlaufssinne der Präzessionsbewegung bei positiven Werten von w entspricht.

Die Berührungsebene und hiermit auch die ξ-Achse bildet mit der lotrechten Achse einen Winkel, der gleich $\frac{\pi}{2} - \psi$ ist, wobei für ψ auch ψ_0 genommen werden darf. Die Projektion von ξ auf die lotrechte Achse ist daher gleich $\xi \sin \psi_0$ zu setzen.

Andererseits ist die Projektion des zum Schwerpunkt gehenden Radiusvektors s auf die lotrechte Achse gleich $s \cos \psi$ oder sx oder auch $s(x_0 + z - q)$, wofür auch nach Gl. (190)

$$s\left(x_0 + \frac{q}{2}\left(\cos\frac{\pi t}{T} - 1\right)\right)$$

geschrieben werden kann. Die mittlere Lage der Schwerpunktsprojektion hat daher die Höhe $s\left(x_0 - \frac{q}{2}\right)$ über dem Drehpunkte des Kreisels. Die Unterschiede von dieser mittleren Lage sind gleich den Projektionen von ξ und wir erhalten daher für ξ

$$\xi = \frac{qs}{2 \sin \psi_0} \cos \frac{\pi t}{T}. \tag{196}$$

Die Koordinate η erhalten wir durch Multiplikation von φ mit dem auf die lotrechte Achse gezogenen Perpendikel, das gleich $s \sin \psi_0$ ist. Wir finden daher nach Gl. (195), wenn wir φ_0 gleich Null setzen,

$$\eta = \frac{mgs^2 \sin \psi_0}{u_1 \theta_1} \left(t - \frac{1}{1 - x_0^2} \frac{T}{\pi} \sin \frac{\pi t}{T}\right). \tag{197}$$

Durch die Gleichungen (196) und (197) ist die Bewegung des Punktes $\xi\eta$ in der Zeichenebene vollständig bestimmt. Wir zerlegen sie in eine mit gleichmäßiger Geschwindigkeit in der η-Richtung fortschreitende Geschwindigkeit, die dem ersten Gliede von η entspricht, und in den Rest, der die Abweichungen von der regulären Präzessionsbewegung angibt. Setzen wir also

$$\eta = \frac{mgs^2 \sin \psi_0}{u_1 \theta_1} t + \eta_1,$$

so ist

$$\eta_1 = -\frac{mgs^2}{u_1 \theta_1 \sin \psi_0} \frac{T}{\pi} \sin \frac{\pi t}{T}.$$

Aus dieser Gleichung und Gl. (196) eliminieren wir t, indem wir beide nach dem cos und dem sin, der darin vorkommt, auflösen und die Summe der Quadrate gleich Eins setzen. Dann erhalten wir

$$\xi^2 \left(\frac{2 \sin \psi_0}{q s}\right)^2 + \eta_1^2 \left(\frac{u_1 \, \theta_1 \sin \psi_0}{m g s^2} \frac{\pi}{T}\right)^2 = 1.$$

Hier sind noch für q und T ihre Werte aus den Gleichungen (191) und (192) einzusetzen. Man findet dann, daß die beiden Klammerwerte einander gleich sind. Die Gleichung geht damit über in

$$\xi^2 + \eta_1^2 = \left(\frac{m g s^2 \theta_2}{u_1^2 \theta_1^2 \sin \psi_0}\right)^2 = \left(\frac{q s}{2 \sin \psi_0}\right)^2 \qquad (198)$$

Die Bewegung $\xi \eta_1$ relativ zur regulären Präzession erfolgt daher auf einem Kreise, dessen Halbmesser durch den Klammerwert angegeben wird.

Nimmt man dazu die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit in Richtung der η-Achse, so erkennt man, daß der Schwerpunkt eine zykloidische Bahn beschreibt. Der Kreis

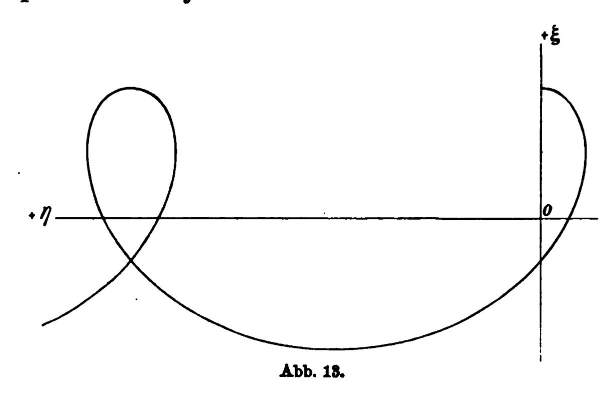


Abb. 13.

wird von $\xi \eta_1$ in der Zeit $2T$ einmal durchlaufen und währenddessen rückt zugleich der Mittelpunkt des Kreises, auf dem sich der die Bahnkurve beschreibende Punkt befindet, im Sinne der η-Achse um

$$\frac{m g s^2 \sin \psi_0}{u_1 \, \theta_1} 2T \quad \text{oder um} \quad 2\pi \frac{m g s^2 \theta_2 \sin \psi_0}{u_1^2 \theta_1^2}$$

weiter. Dieser Weg ist im Verhältnisse $1 : \sin^2 \psi_0$ kleiner, als es einer gemeinen Zykloide entsprechen würde; der Schwerpunkt beschreibt daher eine verkürzte Zykloide. Erst, wenn ψ_0 ein Rechter wäre, also bei horizontaler Richtung der Kreiselachse ginge die Zykloide in eine gemeine Zykloide über. Wenn dagegen ψ_0 klein ist, der Kreisel also nahezu aufrecht steht, ist die Zykloide so stark verkürzt, daß sich die Bahn für einen einmaligen Umlauf nicht viel von einem Kreise unterscheidet. — Abb. 13 gibt die Gestalt der Bahnkurve für den Fall an, daß ψ_0 gleich 45^0 ist.

§ 36. Die Hauptgleichung in Vektorform.

Die in den vorhergehenden Paragraphen behandelte Theorie des schweren symmetrischen Kreises stützte sich auf die nach dem Verfahren von Lagrange abgeleiteten Bewegungsgleichungen (172). Das ist ein ganz bequemer Ausgangspunkt und weil ich es für nützlich halte und durch dieses Buch dazu beitragen möchte, daß sich die Kenntnis des Lagrangeschen Verfahrens und die Übung in seiner Anwendung unter den Ingenieuren weiter ausbreiten, habe ich ihm hier den Vorzug gegeben. Es wäre aber leicht möglich gewesen, alle Ergebnisse, zu denen wir hier gelangten, auch ohne Kenntnis der Gleichungen von Lagrange ausschließlich auf Grund des Satzes von der lebendigen Kraft und des Flächensatzes abzuleiten.

In der Tat habe ich auf diesem Wege bereits im vierten Bande, S. 237 der 3. Aufl., die dort als Hauptgleichung bezeichnete Gl. (162)

$$\theta_2 \, V \mathfrak{s}_1 \frac{d^2 \mathfrak{s}_1}{dt^2} - \mathfrak{u}_1 \, \theta_1 \frac{d \mathfrak{s}_1}{dt} + s \, V \mathfrak{Q} \mathfrak{s}_1 = 0 \qquad (199)$$

abgeleitet, die eben so gut zum Ausgangspunkt der Entwickelungen der vorhergehenden Paragraphen hätte genommen werden können wie die Gleichungen (172). Unter $\mathfrak{s}_1$ ist ein in der Richtung der Figurenachse gezogener Einheitsvektor zu verstehen, dessen Richtungsänderung im Laufe der Zeit durch die Gleichung beschrieben wird. $\mathfrak{Q}$ ist das als gerichtete Größe

aufgefaßte Gewicht des Kreisels, dessen Betrag Q auch gleich mg gesetzt werden kann. Die übrigen Bezeichnungen stimmen mit den in den vorhergehenden Paragraphen gebrauchten überein.

Um sich zu überzeugen, daß die Hauptgleichung (199) nur eine andere Ausdrucksform für die in den Bewegungsgleichungen (172) enthaltenen Aussagen bildet, zerlege man $\mathfrak{s}_1$ in seine Komponenten nach den Koordinatenachsen, indem man

$$\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{i}x + \mathfrak{j}y + \mathfrak{k}z$$

setzt und dabei beachtet, daß diese Komponenten in den Koordinaten φ und ψ durch die Gleichungen

$$x = \cos\psi; \quad y = \sin\psi\sin\varphi; \quad z = \sin\psi\cos\varphi$$

ausgedrückt werden können. Bildet man nun die Differentialquotienten von $\mathfrak{s}_1$ und setzt sie in Gl. (199) ein, worauf die Vektorprodukte nach den gewöhnlichen Regeln auszuführen sind, so zerfällt Gl. (199) in drei Komponentengleichungen, von denen die sich auf die $\mathfrak{i}$-Komponente beziehende unmittelbar mit der zweiten der Gleichungen (172) übereinstimmt. Die beiden anderen Komponentengleichungen führen im Zusammenhange mit der ersten von ihnen beide zu der ersten der Gleichungen (172).

Übrigens ist es keineswegs nötig, um zu den früheren Ergebnissen zu gelangen, Gl. (199) erst durch die Gleichungen (172) zu ersetzen. Auch ohne diesen Umweg kann man unmittelbar von der Vektorgleichung aus zu diesem Ziele gelangen, wie ich früher einmal in einem Aufsatze in der Zeitschr. für Math. u. Phys., Bd. 48, 1902, S. 272 nachgewiesen habe. Man muß indessen zugeben, daß eine wesentliche Abkürzung gegenüber dem früheren Verfahren durch die Anwendung der Vektorrechnung hier nicht herbeigeführt wird. Gl. (199) übertrifft zwar ohne Zweifel durch Einfachheit und Regelmäßigkeit des Baues erheblich die ihr gleichwertigen Bewegungsgleichungen (172). Aber wenigstens das von mir in dem angeführten Aufsatze eingeschlagene Lösungsverfahren befriedigt nicht in demselben Maße. Ich sehe daher davon ab, es hier nochmals wieder-

zugeben, um so mehr als dadurch zur Sache selbst gegenüber dem bereits in den vorhergehenden Paragraphen Gefundenen nichts Neues beigebracht würde.

§ 37. Das Raumpendel.

Die Pendelbewegung ist in den Differentialgleichungen der Kreiseltheorie mit eingeschlossen. Man braucht, um auf sie zu kommen, nur $u_1\,\theta_1$ gleich Null zu setzen.

Für ein Fadenpendel trifft dies immer zu, weil bei ihm das Trägheitsmoment θ_1 zu Null wird. Bei einem Körper von beliebiger symmetrischer Gestalt nennt man dagegen die Bewegung eine Pendelbewegung, wenn $u_1 = 0$ ist.

Die Gleichungen der vorhergehenden Paragraphen vereinfachen sich jedoch nicht sehr erheblich mit $u_1\,\theta_1 = 0$. Die Bewegung des sphärischen Pendels — auch die des Fadenpendels — ist daher fast ebenso verwickelt, wie die des schweren symmetrischen Kreisels. Zunächst erhält man an Stelle von Gl. (174) S. 185

$$w = w_0 \frac{\sin^2 \psi_0}{\sin^2 \psi} = w_0 \frac{1 - x_0^2}{1 - x^2}. \tag{200}$$

Mit x oder ψ wird daher auch w bekannt. Für die Abhängigkeit zwischen x und t haben wir Gl. (183) unverändert zu übernehmen, nämlich

$$\frac{dx}{dt} = \pm \frac{a}{\theta_2} \sqrt{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}. \tag{201}$$

Nur die Ausdrücke für die Konstanten x_1 und x_2 werden etwas einfacher. Anstatt der Gleichungen (180) erhält man nämlich, da hier $b = 0$ ist,

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{c^2(1 - x_0^2) + \sqrt{R}}{2a^2} \\ x_2 &= \frac{c^2(1 - x_0^2) - \sqrt{R}}{2a^2} \end{aligned}\right\}, \tag{202}$$

wobei für R an Stelle von Gl. (181)

$$R = c^4 (1 - x_0^2)^2 + 4a^4 + 4a^2 c^2 (1 - x_0^2)\, x_0 \tag{203}$$

zu setzen ist. Handelt es sich insbesondere um ein Fadenpendel von der Fadenlänge l, so ist

$$s = l; \quad \theta_2 = ml^2; \quad a^2 = 2gm^2l^3; \quad c = w_0 ml^2$$

zu setzen. Die Differentialgleichung für x lautet dann

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2g}{l}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}. \tag{204}$$

Für die Konstanten x_1 und x_2 erhält man nach einfacher Ausrechnung

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{w_0^2 l}{4g}(1-x_0^2) + \frac{1}{4g}\sqrt{w_0^4 l^2 (1-x_0^2)^2 + 16g^2 + 8glw_0^2(1-x_0^2)x_0} \\ x_2 &= \frac{w_0^2 l}{4g}(1-x_0^2) - \frac{1}{4g}\sqrt{w_0^4 l^2 (1-x_0^2)^2 + 16g^2 + 8glw_0^2(1-x_0^2)x_0} \end{aligned}\right\} . \tag{205}$$

Wenn der Anfangszustand durch x_0 und w_0 gegeben ist, findet man zunächst die andere Grenze x_2 für die Schwingung und hierauf nach Gl. (204) das Gesetz, nach dem die Schwingung erfolgt.

Wenn x_0 positiv ist, muß x_2 negativ sein, wie aus der letzten Gleichung folgt. Auch dann, wenn man sich den Faden durch einen auf Druck widerstandsfähigen Stab ersetzt denkt, kann daher das Raumpendel keine Schwingungen ausführen, bei denen der Schwerpunkt dauernd über der durch den Aufhängepunkt gelegten Horizontalebene bleibt, wie dies beim Kreisel zutrifft.

Man kann ferner die Frage stellen, ob es wie bei den ebenen Pendelschwingungen so auch bei den sphärischen möglich ist, für jeden Körper von symmetrischer Gestalt, der eine Pendelbewegung ausführt, eine reduzierte Pendellänge l anzugeben, so daß ein Fadenpendel von dieser Länge bei gleichem Anfangszustande auch weiterhin die gleiche Bewegung ausführt, wie die Figurenachse des symmetrischen Körpers. Diese Frage ist zu bejahen. Und zwar ist die reduzierte Pendellänge genau wie bei den ebenen Pendelschwingungen

$$l = \frac{i^2}{s} \tag{206}$$

zu setzen, wenn unter i der zum Trägheitsmomente θ_2 gehörige Trägheitshalbmesser verstanden wird. Um dies zu beweisen, beachte man, daß nach der Definition von a und c allgemein

$$\frac{c^2}{2a^2} = \frac{w_0^2 \theta_2^2}{4mgs\theta_2} = \frac{w_0^2 i^2}{4gs}$$

ist, woraus beim Bestehen von Gl. (206)

$$c^2 = a^2 \frac{w_0^2 l}{2g}$$

folgt. Hiermit geht zunächst der für R gegebene Ausdruck in Gl. (203) über in

$$R = \frac{a^4}{4g^2}\left\{w_0^4 l^2 (1-x_0^2)^2 + 16g^2 + 8glw_0^2 (1-x_0^2)x_0\right\}.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichungen (202) ein, so erhält man dieselben Werte wie in den Gleichungen (205) für das Fadenpendel. Außerdem ist

$$\frac{a^2}{\theta_2^2} = \frac{2mgs\theta_2}{\theta_2^2} = \frac{2gs}{i^2} = \frac{2g}{l},$$

so daß auch die Differentialgleichung (201) für das körperliche Pendel genau mit Gl. (204) für das Fadenpendel übereinstimmt.

Aus den Gleichungen (205) folgt

$$x_1 + x_2 = \frac{w_0^2 l}{2g}(1 - x_0^2),$$

$$x_1 x_2 = -1 - \frac{lw_0^2}{2g}(1 - x_0^2)x_0$$

und hieraus folgt, daß zwischen den drei Konstanten $x_0\, x_1\, x_2$ die Beziehung besteht

$$x_0 x_1 + x_0 x_2 + x_1 x_2 + 1 = 0. \tag{207}$$

Durch die Grenzen x_0 und x_2, zwischen denen die Schwingung erfolgt, ist daher x_1 schon mit bestimmt. Darin unterscheidet sich die Pendelbewegung von der Kreiselbewegung. Für diese findet man nämlich nach den Gleichungen (180)

$$x_0 x_1 + x_0 x_2 + x_1 x_2 + 1 = 2b\,\frac{bx_0 + c(1 - x_0^2)}{a^2}.$$

Es ist daher im allgemeinen nicht möglich, ein Fadenpendel anzugeben, das dieselbe Bewegung ausführt, wie die Figurenachse eines Kreisels. Nur wenn x_0 negativ ist und zwischen b und c die Beziehung

$$bx_0 + c(1 - x_0^2) = 0$$

besteht, ist dies möglich.

§ 38. Der Kreisel mit gleitender Spitze.

Unter der „Spitze" des Kreisels verstehe ich den Punkt, von dem bisher angenommen war, daß er festgehalten sei. Jetzt nehme ich dagegen an, daß der Kreisel mit dieser Spitze auf eine horizontale Ebene aufgesetzt sei, in der die Spitze ohne Reibungswiderstand zu gleiten vermag. Der Kreisel hat dann fünf Freiheitsgrade. Man kann aber diesen Fall leicht in derselben Weise behandeln wie den früheren.

Der an der Spitze übertragene Auflagerdruck kann nach unserer Voraussetzung nur senkrecht gerichtet sein. Aus dem Satze von der Bewegung des Schwerpunkts folgt daraus, daß sich die Horizontalkomponente der Schwerpunktsgeschwindigkeit nicht zu ändern vermag. Wir können daher die ganze Bewegung in zwei Anteile zerlegen, von denen der eine in einer gleichförmigen horizontalen Translation besteht, während der andere Anteil die Kreiselbewegung im engeren Sinne darstellt. Daß der zweite Bewegungsanteil unabhängig von dem ersten ist, folgt ohne weiteres aus den Sätzen über die Relativbewegung. Denn für einen Raum, der die gleichförmige Translationsbewegung mitmacht, werden die Ergänzungskräfte der Relativbewegung zu Null.

Es genügt daher, wenn wir von der Translationsbewegung ganz absehen, also die Untersuchung auf den Fall beschränken, daß der Schwerpunkt von Anfang an keine horizontale Geschwindigkeitskomponente hatte und sich daher auch weiterhin nur in vertikaler Richtung bewegt. Dann kommen nur noch drei Freiheitsgrade der Bewegung in Betracht.

Zur Beschreibung der augenblicklichen Lage des Kreisels benutzen wir wieder wie in dem früheren Falle der Abb. 12, S. 181 die drei Koordinaten ψ, φ und χ. Die einzige Änderung besteht darin, daß die X-Achse des im Raume festliegenden Koordinatensystems jetzt durch den Schwerpunkt S zu ziehen ist, der sich nur längs der X-Achse zu verschieben vermag. Die Projektion von S auf den Fußboden bildet den Ursprung O des Koordinatensystems. Die Winkel ψ, φ, χ sind aber in derselben Weise zu zählen, wie es in Abb. 12 angegeben war.

Die Höhe des Schwerpunkts über der YZ-Ebene ist gleich $s \cos \psi$; die Schwerpunktsgeschwindigkeit daher gleich

$$s \sin \psi \cdot \dot{\psi}$$

und für die lebendige Kraft erhält man den Ausdruck

$$L = \tfrac{1}{2}\,\theta_1 (\cos\psi \cdot \dot{\varphi} + \dot{\chi})^2 + \tfrac{1}{2}\,\theta_2' (\dot{\psi}^2 + \sin^2\psi \cdot \dot{\varphi}^2) + \tfrac{1}{2}\, m s^2 \sin^2\psi \cdot \dot{\psi}^2. \tag{208}$$

Hierin bedeutet wie früher θ_1 das auf die Figurenachse des Kreisels bezogene Trägheitsmoment, θ_2' dagegen das Trägheitsmoment für eine durch den Schwerpunkt senkrecht zur Figurenachse gezogene Achse, während sich früher in Gl. (169) θ_2 auf eine durch die Spitze des Kreisels in dieser Richtung gehende Achse bezogen hatte. Zwischen θ_2 und θ_2' besteht daher der Zusammenhang

$$\theta_2 = \theta_2' + m s^2.$$

Für die Differentialquotienten von L nach ψ und $\dot{\psi}$ erhält man hier

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \theta_2' \dot{\psi} + m s^2 \sin^2\psi \cdot \dot{\psi},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}\right) = \theta_2' \frac{d^2\psi}{dt^2} + m s^2 \sin^2\psi \frac{d^2\psi}{dt^2} + 2 m s^2 \sin\psi \cos\psi \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = -\theta_1 \left(\cos\psi \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\chi}{dt}\right) \sin\psi \frac{d\varphi}{dt} + \theta_2' \sin\psi \cos\psi \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + m s^2 \sin\psi \cos\psi \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2.$$

An die Stelle der ersten der Gleichungen (170) S. 183 in § 33 tritt daher hier die Gleichung

$$F_\psi = \theta_2' \frac{d^2\psi}{dt^2} + ms^2 \sin^2\psi \frac{d^2\psi}{dt^2} + ms^2 \sin\psi \cos\psi \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2$$
$$+ \theta_1 \left(\cos\psi \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\chi}{dt}\right) \sin\psi \frac{d\varphi}{dt} - \theta_2' \sin\psi \cos\psi \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Dagegen bleiben die beiden letzten der Gleichungen (170) unverändert bestehen, wenn nur θ_2 darin durch θ_2' ersetzt wird. Das letzte Glied in Gl. (208) ist nämlich unabhängig von φ, χ, $\dot\varphi$ und $\dot\chi$ und trägt daher zu den sich auf die Koordinaten φ und χ beziehenden Lagrangeschen Gleichungen nichts bei, während die beiden ersten Glieder in dem Ausdrucke für L mit dem in Gl. (169) für den Kreisel mit fester Spitze aufgestellten übereinstimmen, abgesehen davon, daß θ_2 durch θ_2' ersetzt ist.

Führt man wie früher in § 33 w und u_1 ein, so läßt sich die vorhergehende Gleichung auch schreiben

$$F_\psi = u_1 w \, \theta_1 \sin\psi + \theta_2' \left(\frac{d^2\psi}{dt^2} - w^2 \sin\psi \cos\psi\right)$$
$$+ ms^2 \left(\sin^2\psi \frac{d^2\psi}{dt^2} + \sin\psi \cos\psi \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right)$$

und da auch hier für F_ψ derselbe Ausdruck gilt wie in dem früheren Falle, erhält man an Stelle der ersten der Gleichungen (172)

$$u_1 w \theta_1 \sin\psi + \theta_2' \left(\frac{d^2\psi}{dt^2} - w^2 \sin\psi \cos\psi\right)$$
$$+ ms^2 \left(\sin^2\psi \frac{d^2\psi}{dt^2} + \sin\psi \cos\psi \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right) - mgs \sin\psi = 0,$$

während die zweite der Gleichungen (172) nach Ersatz von θ_2 durch θ_2' unverändert übernommen werden kann.

Daher läßt sich auch die in § 34 besprochene Lösung mit geringen Änderungen auf den jetzt vorliegenden Fall übertragen. So erhält man an Stelle von Gl. (174)

$$w = \frac{u_1 \theta_1 (\cos\psi_0 - \cos\psi) + \theta_2' w_0 \sin^2\psi_0}{\theta_2' \sin^2\psi}$$

und an die Stelle der Gleichung (175) tritt hier

$$2mgs\cos\psi + \theta_2'\left(w^2\sin^2\psi + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right) + ms^2\sin^2\psi\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = C_2.$$

Die Konstante C_2 läßt sich ebenso ermitteln wie früher. Führt man wieder $x = \cos\psi$ ein, so erhält man schließlich an Stelle von Gl. (179)

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 =$$

$$\frac{(x-x_0)\{2mgs\theta_2'(x^2-1)+2u_1\theta_1\theta_2'w_0(1-x_0^2)-u_1^2\theta_1^2(x-x_0)-\theta_2'^2w_0^2(1-x_0^2)(x-x_0)\}}{\theta_2'(\theta_2'+ms^2(1-x^2))}.$$

Auch die Trennung der Variabeln ist sofort möglich. Dagegen ist die Auswertung des nach x zu nehmenden Integrals jetzt erheblich schwieriger, wegen des im Nenner auf der rechten Seite vorkommenden Gliedes in x, das früher gefehlt hatte.

Die reguläre und die pseudoreguläre Präzession lassen sich jedoch auch in diesem Falle ohne Schwierigkeit behandeln. Für die reguläre Präzession erhält man dieselbe Formel wie in Gl. (187), wobei nur θ_2 durch θ_2' zu ersetzen ist. Die pseudoreguläre Präzession behandelt man ebenso wie früher nach der „Methode der kleinen Schwingungen“, d. h. man setzt etwa $x = x_0 + z$ und betrachtet z als eine kleine Größe, deren höhere Potenzen vernachlässigt werden können, worauf die Integrationen ausgeführt werden können. Um nicht zu weitläufig zu werden, sehe ich aber von der weiteren Ausrechnung hier ab.

§ 39. Kreiselverbände.

Auch schon der sich um einen festen Punkt drehende Kreisel bildet mit dem Gestell, das den Drehpunkt stützt, zusammen einen Verband. Bei den praktisch wichtigeren Anwendungen des Kreisels handelt es sich aber um Verbände, die aus mehr Körpern bestehen, so daß der Kreisel selbst nicht das einzige unter den Gliedern des Verbandes ist, das eine Bewegung ausführt. Die Dynamik dieser allgemeineren Kreiselverbände kann meist in ganz ähnlicher Weise behandelt werden, wie bei den bisher betrachteten Kreiseln.

Hier bespreche ich zuerst ein besonders einfaches Beispiel, während die praktisch wichtigeren Kreiselverbände, besonders der Schiffskreisel weiterhin eine ausführliche Darstellung finden sollen.

Ein solcher Kreiselverband kann noch erheblich einfacher sein, als der früher betrachtete Kreisel mit festgehaltener Spitze und zwar dann, wenn er nur zwei Freiheitsgrade hat. Derartige Anordnungen lassen sich noch in sehr verschiedener Weise treffen; am einfachsten z. B. so, daß von den früher gebrauchten Koordinaten φ und ψ die eine konstant erhalten wird.

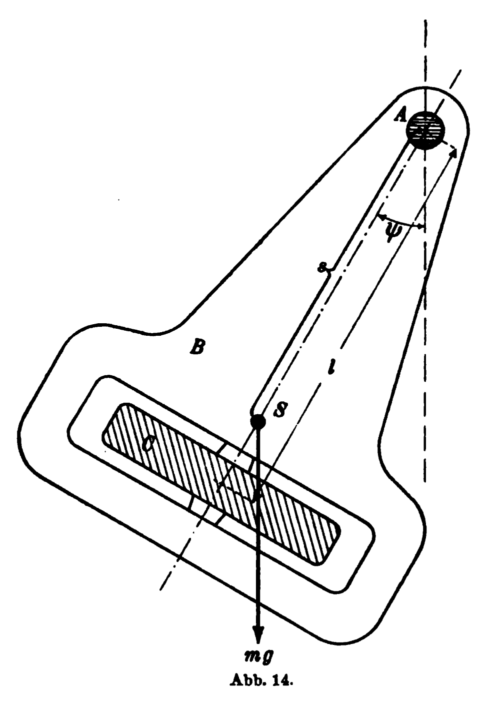


Abb. 14.

Abb. 14 stellt einen Kreiselverband mit zwei Freiheitsgraden dar. Um eine horizontale Aufhängeachse A schwingt ein Pendel B und in diesem ist ein Schwungrad C drehbar gelagert. Der Körper C und hiermit der ganze Verband hat daher zwei Freiheitsgrade. Wenn das Schwungrad C vorher in schnelle Umdrehung versetzt war, wird es, solange diese andauert, als ein Kreisel bezeichnet. Man kann nun z. B. fragen, welche Bewegung der Verband ausführt, wenn er nach Herstellung eines beliebigen Anfangszustandes weiterhin nur dem Einflusse des Eigengewichtes ausgesetzt ist.

Denkt man sich den schweren symmetrischen Kreisel mit festgehaltener Spitze einer Bewegungsbeschränkung unterworfen, die eine Änderung der Koordinate φ in Abb. 12, S. 181 ver-

hindert, so erhält man einen zweiläufigen Verband, der mit dem in Abb. 14 nahezu übereinstimmt. Die Übereinstimmung wäre vollständig, wenn der Pendelkörper B in Abb. 14 als masselos vorausgesetzt werden dürfte. Für diesen Fall könnten die in § 33 aufgestellten Bewegungsgleichungen ohne weiteres übernommen werden mit der Bedingung, daß in ihnen φ konstant und daher $\dot{\varphi}$ gleich Null zu setzen wäre.

Wenn die Masse des Pendelkörpers B nicht vernachlässigt werden darf, wie wir hier voraussetzen, ändern sich die Gleichungen ein wenig ab. Wir wollen sie des Zusammenhangs wegen in derselben Weise aufstellen, wie es bisher geschehen war.

Die lebendige Kraft des ganzen Verbands ist gleich der Summe der lebendigen Kräfte von B und C. Die lebendige Kraft von B ist gleich

$$\tfrac{1}{2}\,\theta_B\dot{\psi}^2,$$

wenn mit θ_B das auf die Aufhängeachse bezogene Trägheitsmoment von B bezeichnet wird. Die lebendige Kraft von C ist gleich der Summe von Translationsenergie und Rotationsenergie zu setzen. Die der Schwerpunktsgeschwindigkeit $l\dot{\psi}$ von C entsprechende Translationsenergie ist gleich

$$\tfrac{1}{2}\,m_C l^2\dot{\psi}^2.$$

Die Rotationsenergie von C läßt sich selbst wieder in zwei Teile zerlegen, entsprechend den zueinander senkrecht stehenden Winkelgeschwindigkeitskomponenten $\dot{\chi}$ um die Schwungradachse und $\dot{\psi}$ um die durch den Schwerpunkt parallel zur Aufhängeachse A gezogene Achse. Die zugehörigen Trägheitsmomente seien mit θ_1 und θ_2' bezeichnet. Im ganzen wird dann die lebendige Kraft

$$L = \tfrac{1}{2}(\theta_B + m_C l^2 + \theta_2')\dot{\psi}^2 + \tfrac{1}{2}\theta_1\dot{\chi}^2.$$

Bezeichnet man ferner das Trägheitsmoment von B und C zusammen für die Aufhängeachse mit θ_2, so ist

$$\theta_2 = \theta_B + \theta_2' + m_C l^2,$$

und hiernach läßt sich L auf die einfachere Form

$$L = \tfrac{1}{2}\theta_2 \dot{\psi}^2 + \tfrac{1}{2}\theta_1 \dot{\chi}^2 \tag{209}$$

bringen. Wir haben daher

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \theta_2 \dot{\psi}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}\right) = \theta_2 \frac{d^2 \psi}{dt^2},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}} = \theta_1 \dot{\chi}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}}\right) = \theta_1 \frac{d^2 \chi}{dt^2},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \chi} = 0.$$

Die Lagrangeschen Gleichungen liefern demnach

$$\left.\begin{aligned} F_\psi &= \theta_2 \frac{d^2 \psi}{dt^2} \\ F_\chi &= \theta_1 \frac{d^2 \chi}{dt^2} \end{aligned}\right\}. \tag{210}$$

Dies gilt noch für jede beliebige Art des Angriffs äußerer Kräfte. Wirkt nur das Eigengewicht auf den Verband ein und bezeichnen wir die Masse von B und C zusammen mit m und den Abstand des gemeinschaftlichen Schwerpunkts von der Aufhängeachse mit s, so ist

$$F_\psi = -\,mgs \sin \psi \quad \text{und} \quad F_\chi = 0$$

zu setzen. Aus der zweiten der Gleichungen (210) folgt dann, daß die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\chi}$ des Schwungrads konstant bleibt, und die erste Gleichung geht über in

$$\theta_2 \frac{d^2 \psi}{dt^2} = -\,mgs \sin \psi. \tag{211}$$

Das ist die Bewegungsgleichung für ein gewöhnliches Pendel. Die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\chi}$ kommt nämlich in ihr gar nicht vor und der Verband führt daher Pendelschwingungen aus, genau so, als wenn das Schwungrad überhaupt nicht rotierte.

Dieses Beispiel ist sehr lehrreich; es zeigt nämlich aufs deutlichste, wie ungenau eine sehr verbreitete Vorstellung ist, mit der man sich Rechenschaft über die Erscheinungen der Kreiselbewegung zu geben versucht. Es wird nämlich gewöhn-

lich gesagt, ein schnell rotierendes Schwungrad setze einer Drehung seiner Bewegungsebene einen Widerstand entgegen. Wenn man diese ziemlich unbestimmt gehaltene Aussage richtig auslegt, läßt sich gar nichts dagegen einwenden. Aber die nächstliegende Deutung, wonach dieser Widerstand sich gegen die Drehung der Bewegungsebene selbst richte und diese zu hindern vermöge, ist durchaus falsch. Denn man sieht an dem besprochenen Beispiele, daß das Schwungrad, und wenn es auch noch so schnell rotierte, unmittelbar nicht den geringsten Einfluß auf die Pendelbewegung und auf die damit verbundene Drehung der Schwungradebene auszuüben vermag. Der „Widerstand" des Schwungrades gegen diese Drehung äußert sich vielmehr nur in der Übertragung eines Kräftepaares auf die Lager der Aufhängeachse, und im vierten Bande der Vorlesungen habe ich schon ausführlich besprochen, wie man dieses Kräftepaar in einfacher Weise mit Hilfe des Flächensatzes ermitteln kann. Solange die Lager genügend widerstandsfähig sind, um dieses Kräftepaar ohne merkliche Formänderung aufzunehmen, vermag es aber an dem ganzen Bewegungsvorgange nichts zu ändern.

Man braucht natürlich nicht das Verfahren von Lagrange, um zu diesen einfachen Ergebnissen zu gelangen. Die Anwendung des Flächensatzes für die Aufhängeachse führt ebenfalls sofort dazu. Die der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\chi}$ entsprechende Drall-Komponente steht nämlich senkrecht zur Schwungradebene und hiermit auch senkrecht zur Aufhängeachse, projiziert sich daher auf diese Achse als Punkt und tritt also in der auf diese Achse bezogenen Gleichung des Flächensatzes überhaupt nicht auf. Man kommt auf diese Weise ebenfalls ohne weiteres zu Gl. (211) und den aus ihr gezogenen Schlüssen.

§ 40. Kreiselpendel mit elastisch nachgiebiger Stützung.

Nehmen wir an, es ließe sich jemand einen Apparat nach Abb. 14 bauen, um die im vorhergehenden Paragraphen gezogenen Schlüsse einer experimentellen Prüfung zu unterwerfen.

Dann könnte es leicht sein, daß sich die Schwingungsdauer der Pendelbewegung im Widerspruch mit der bisher besprochenen einfachsten Theorie als stark abhängig von der Winkelgeschwindigkeit des Kreisels herausstellte. Und zwar würde das besonders dann eintreten, wenn die Aufhängeachse A (Abb. 14) des Pendels etwas schwach konstruiert wäre, so daß sie sich leicht ein wenig zu biegen vermöchte. Eine auf den ersten Blick gering erscheinende Abweichung von der Voraussetzung einer unnachgiebigen Stützung vermag nämlich schon sehr erhebliche Änderungen im Verlaufe der ganzen Bewegung herbeizuführen.

Bei allen Kreiselanordnungen bedarf es überhaupt sehr sorgfältiger Überlegungen über alle Umstände, die etwa eine Beachtung bei dem theoretischen Ansatze erfordern könnten. So würde auch hier bei dem mit dem Kreisel versehenen Pendel eine Theorie, die nicht auf die Nachgiebigkeit der Stützung Rücksicht nimmt, sehr unvollständig sein und leicht zu ganz irrigen Schlüssen verleiten.

Wenn wir auf die Möglichkeit einer Verbiegung der Aufhängeachse A Rücksicht nehmen, treten noch zwei weitere Freiheitsgrade zu den beiden früheren hinzu. Der Punkt des Pendelrahmens, in dem sich die Kreiselachse mit der Aufhängeachse schneidet, soll zwar auch jetzt noch als festgehalten betrachtet werden. Während wir aber früher annahmen, daß sich der Pendelrahmen nur um die senkrecht zur Zeichenebene der Abb. 14 stehende Achse zu drehen vermöchte, kommen jetzt Drehungen um zwei in der Ebene der Abb. 14 liegende Achsen hinzu, von denen die eine in der Richtung der Kreiselachse angenommen sein möge, während die andere hierzu senkrecht steht.

Es steht auch hier nichts im Wege, die Bewegungsgleichungen nach dem Verfahren von Lagrange aufzustellen. Man führe hierzu als weitere allgemeine Koordinaten die beiden Winkel ein, um die sich der Pendelrahmen aus der Mittellage um die soeben angegebenen beiden Achsen gedreht hat. Die auf diese Koordinaten reduzierten äußeren Kräfte sind den Koordinaten selbst proportional zu setzen. Aber die Durch-

führung der Rechnung wird dann sehr umständlich und die Formeln werden viel verwickelter, als es für praktische Zwecke nötig ist. Von vornherein läßt sich nämlich voraussehen, daß die Winkelgeschwindigkeiten, die zu den neu eingeführten allgemeinen Koordinaten gehören, sehr gering im Verhältnisse zur Winkelgeschwindigkeit der Pendelbewegung oder erst recht im Verhältnisse zur Kreiselgeschwindigkeit ausfallen werden. Dieser Umstand gestattet, eine Reihe von Gliedern in den allgemein gültigen Gleichungen zu unterdrücken. Man kommt aber viel einfacher zum Ziele, wenn man von diesen zulässigen Vernachlässigungen von vornherein Gebrauch macht, anstatt sie erst nachträglich an den allgemeingültig abgeleiteten Gleichungen vorzunehmen. Freilich muß hinzugefügt werden, daß der umständlichere Weg insofern sicherer ist, als es bei dem abgekürzten Verfahren besonders vorsichtiger Überlegungen darüber bedarf, welche Glieder vernachlässigt werden dürfen und welche beibehalten werden müssen.

Wir stützen uns jetzt auf den Flächensatz. Als Momentenpunkt wählen wir den Punkt, um den sich der Pendelrahmen dreht, also den Schnittpunkt der Kreiselachse mit der Aufhängeachse. Der Drehung des Schwungrades für sich entspricht ein in der Richtung der Umdrehungsachse gehender Drall von der Größe $w\theta$, wenn wir jetzt die Umdrehungsgeschwindigkeit $\dot{\chi}$ mit dem Buchstaben w bezeichnen. Dazu kommt ein in der Richtung der Aufhängeachse des Pendels gehender Drall von der Größe $\theta_2 \frac{d\psi}{dt}$. Hierbei wird angenommen, daß die Aufhängeachse eine Hauptträgheitsachse des aus dem Pendelrahmen und dem Kreisel bestehenden Verbandes bilde. Weitere Bewegungsanteile, die aber gegenüber den vorigen nur sehr geringe Beiträge zum Drall liefern, werden durch die Verbiegung der Aufhängeachse herbeigeführt. Lassen wir diese Verbiegung zuerst ganz außer acht, so wird durch die Drehung $d\psi$ um die Aufhängeachse im Zeitelemente dt zunächst eine Richtungsänderung des ersten Drallanteils $w\theta_1$ bewirkt und der geometrische Zuwachs, den der Drall infolge davon er-

fährt, steht senkrecht dazu, liegt in der Bewegungsebene des Pendels und hat die Größe $w\theta_1 d\psi$. Die Division mit dt liefert hieraus nach dem Flächensatze das Moment des zugehörigen Kräftepaares, das von der Aufhängeachse auf den Pendelrahmen übertragen werden muß. Der Biegungswinkel, den dieses Kräftepaar hervorbringt, sei mit ϑ bezeichnet. Dann ist

$$\vartheta = cw\theta_1 \frac{d\psi}{dt}, \tag{212}$$

wenn mit c ein von der Biegungssteifigkeit der Aufhängeachse abhängiger Faktor bezeichnet wird, der sich im einzelnen Falle nach den in der Festigkeitslehre gegebenen Anweisungen berechnen läßt. Wir nehmen an, daß c so groß ist, daß ϑ und auch die Geschwindigkeit $\frac{d\vartheta}{dt}$ stets klein bleibt gegenüber ψ und $\frac{d\psi}{dt}$ und daher erst recht gegenüber w.

Die Drehung um die Aufhängeachse ändert nichts an der Richtung des zweiten Drallanteils; die Änderungsgeschwindigkeit der Größe dieses Anteils ist dagegen gleich $\theta_2 \frac{d^2\psi}{dt^2}$ zu setzen.

Nun betrachten wir die Änderungen, die der Drall infolge der Drehung mit der Geschwindigkeit $\frac{d\vartheta}{dt}$ erfährt. Der erste Anteil $w\theta_1$ erfährt eine Richtungsänderung und der dadurch herbeigeführte geometrische Zuwachs steht wiederum senkrecht zu diesem Anteile, also zur Schwungradachse, und zugleich senkrecht zu der Achse, um die die Drehung ϑ erfolgt; er geht also in der Richtung der Aufhängeachse des Pendelrahmens. Hierbei ist noch eine Betrachtung über den Pfeil dieses Zuwachses erforderlich. Nehmen wir an, daß sich das Schwungrad von der Aufhängeachse in Abb. 14 gesehen im Uhrzeigersinne drehe, so geht der Drall $w\theta_1$ in der Richtung auf A hin. Der Winkel ϑ sei als positiv bezeichnet, wenn sich der untere Teil des Pendelrahmens in Abb. 14 von dem vorn stehenden Beschauer entfernt, sich also senkrecht zur Papierfläche nach hinten hin bewegt. Diese Festsetzung wird übrigens schon durch den Ansatz in Gl. (212) gefordert, da

die Drehung ϑ in diesem Sinne erfolgt, wenn der in Abb. 14 mit ψ bezeichnete Winkel wächst. Man überzeugt sich davon leicht durch die Betrachtung des Zuwachses, den der Drall $w\theta_1$ durch die Drehung $d\psi$ erfährt.

Wenn jetzt der Winkel ϑ wächst, erfährt dadurch der Drall $w\theta_1$ einen geometrischen Zuwachs, der für den vorn stehenden Beschauer der Abb. 14 nach vorn hin geht. Das ist dieselbe Richtung, in der auch die Änderungsgeschwindigkeit des zweiten Drallanteils $\theta_2 \frac{d^2\psi}{dt^2}$ ginge unter der Voraussetzung, daß die Beschleunigung $\frac{d^2\psi}{dt^2}$ positiv wäre. Die Größe des zu einer Drehung um $d\vartheta$ gehörigen Zuwachses von $w\theta_1$ ist gleich $w\theta_1 d\vartheta$ zu setzen.

Auch der zweite Drallanteil $\theta_2 \frac{d\psi}{dt}$ erfährt durch die Drehung um $d\vartheta$ eine Richtungsänderung und daher einen geometrischen Zuwachs, der, wie die geometrische Betrachtung lehrt, entgegengesetzt zum Drehungsvektor des Schwungrades gerichtet ist. Da wir eine sehr große Umdrehungsgeschwindigkeit des Schwungrades voraussetzten, ist aber der zweite Drallanteil $\theta_2 \frac{d\psi}{dt}$ als klein gegenüber dem ersten Anteile zu betrachten und daher kann man den geometrischen Zuwachs von der Größe $\theta_2 \frac{d\psi}{dt} d\vartheta$ gegenüber dem vorher behandelten, übrigens in anderer Richtung gehenden Zuwachse $w\theta_1 d\vartheta$ vernachlässigen. Erst recht sind zu vernachlässigen die weiteren Drallanteile und ihre Änderungen, die durch die Geschwindigkeiten $\frac{d\vartheta}{dt}$ usf. hervorgerufen werden.

Daher kommen auch bei den statischen Momenten der äußeren Kräfte, die auf den aus Pendelrahmen und Schwungrad bestehenden Verband ausgeübt werden, nur in Betracht das im Schwerpunkt angreifende Gewicht und das Kräftepaar aus den Lagerkräften, die durch die Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\psi}{dt}$ hervorgerufen werden. Der Momentenvektor dieses Kräftepaares, das die Verbiegung ϑ hervorbringt,

steht aber senkrecht zur Aufhängeachse. Beschränken wir uns daher jetzt auf die Betrachtung der in der Richtung der Aufhängeachse gehenden Komponenten, so erhalten wir aus dem Flächensatze die Gleichung

$$\Theta_2 \frac{d\psi}{dt^2} + w\Theta_1 \frac{d\vartheta}{dt} = - mgs \sin\psi \,. \tag{213}$$

Hierbei war zu beachten, daß der Momentenvektor, der zum Gewichte gehört, wie aus Abb. 14 zu entnehmen ist, von vorn nach hinten gerichtet ist, während die beiden Glieder auf der linken Seite Änderungsgeschwindigkeiten des Dralls angeben, die bei positivem Vorzeichen, wie wir vorher sahen, in der entgegengesetzten Richtung gehen. Daraus erklärt sich das auf der rechten Seite der Gleichung beizufügende Minuszeichen.

Setzt man nachträglich $c = 0$ und hiermit $\vartheta = 0$, so geht Gl. (213) wieder in die einfachere Gl. (211) über. Wir können daher sagen, daß das zweite Glied der linken Seite das Verbesserungsglied bildet, das einzuführen ist, um der elastischen Verbiegung der Aufhängeachse Rechnung zu tragen.

In Gl. (212) sind die Faktoren c und Θ_1 ohnehin konstant und auch die Umdrehungsgeschwindigkeit w des Kreisels darf als konstant betrachtet werden. Setzt man ϑ aus Gl. (212) in Gl. (213), so geht diese über in

$$(\Theta_2 + cw^2\Theta_1^2) \frac{d^2\psi}{dt^2} = - mgs \sin\psi \,. \tag{214}$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von Gl. (211) nur durch den konstanten Faktor auf der linken Seite. Wir können daher sagen, daß der Einfluß der elastischen Verbiegung der Aufhängeachse so wirkt, als wenn das Trägheitsmoment Θ_2 um den Betrag $cw^2\Theta_1^2$ vergrößert wäre. Die Schwingungen erfolgen daher langsamer bei rotierendem als bei stillstehendem Schwungrade, befolgen aber im übrigen das gewöhnliche Gesetz der Pendelbewegung. Für die Dauer T einer vollen Pendelschwingung erhält man bei kleinen Ausschlägen

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta_2 + cw^2\Theta_1^2}{mgs}} \,. \tag{215}$$

Auch wenn die Biegungssteifigkeit der Aufhängeachse ziemlich groß und c daher klein ist, kann doch durch einen hinreichend großen Wert der Winkelgeschwindigkeit w des Schwungsrads eine beträchtliche Vergrößerung der Schwingungsdauer herbeigeführt werden. Man sieht daraus, wie nötig es war, die Betrachtung des vorigen Paragraphen zu ergänzen, da diese für sich allein genommen geeignet ist, zu physikalisch ganz unzutreffenden Schlüssen zu verleiten.

Für kleine Schwingungsausschläge des Pendels kann man

$$\psi = \psi_0 \sin \frac{2\pi}{T} t$$

setzen, wenn ψ_0 die Schwingungsamplitude bedeutet. Aus Gl. (212) folgt dann für ϑ

$$\vartheta = \psi_0 c w \theta_1 \frac{2\pi}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t .$$

Für den größten Biegungswinkel ϑ_0, der im Verlauf der Schwingung vorkommt, erhält man daher nach Einsetzen des Wertes von T aus Gl. (215)

$$\vartheta_0 = \psi_0 c w \theta_1 \sqrt{\frac{mgs}{\theta_2 + c w^2 \theta_1^2}} . \tag{216}$$

Um die Größenverhältnisse von ϑ_0 und ψ_0 besser zu überblicken, schreiben wir dafür

$$\left(\frac{\vartheta_0}{\psi_0}\right)^2 = cmgs \frac{c w^2 \theta_1^2}{\theta_2 + c w^2 \theta_1^2} .$$

Hieraus folgt, daß ϑ_0 einen um so größeren Bruchteil von ψ_0 ausmacht, je schneller das Schwungrad rotiert. Dabei nähert sich aber das Verhältnis bei großem w bald einer festen Grenze, die es nicht überschreiten kann, da der Bruch auf der rechten Seite den Wert Eins nur nahezu erreichen, aber nicht überschreiten kann. Für $w = \infty$ erhält man

$$\left(\frac{\vartheta_0}{\psi_0}\right)^2_{\max} = cmgs . \tag{217}$$

Nun bedeutet $cmgs$ den in Bogenmaß ausgedrückten Biegungswinkel, den die Aufhängeachse erfährt, wenn man den

Apparat umlegt, so daß das Moment *mgs* des Gewichtes die Verbiegung der Aufhängeachse herbeiführt. Selbst wenn die Aufhängeachse gar nicht besonders steif konstruiert ist, wird doch unter gewöhnlichen Umständen der Biegungswinkel, der hierbei eintritt, recht klein sein, so daß ϑ_0, obschon aus dieser kleinen Zahl erst noch die Quadratwurzel zu nehmen ist, doch nur einen ziemlich kleinen Teil des Pendelausschlags ψ_0 ausmachen kann. Wenn man einen Versuch mit dem Pendelkreisel ausführte und von dem Einflusse der elastischen Nachgiebigkeit der Aufhängeachse (oder anderer Teile des Rahmens usf., die in dem gleichen Sinne wirken kann) nichts wüßte oder nicht daran dächte, könnte es sehr leicht geschehen, daß die Verbiegungen ϑ ihrer Kleinheit wegen gar nicht beobachtet würden. Der Versuchsansteller würde sich dann schwer erklären können, wie es kommt, daß die Schwingungsdauer im Widerspruche mit der im vorigen Paragraphen vorgetragenen einfacheren Theorie so stark von der Umdrehungsgeschwindigkeit des Kreisels abhängt. Dieser Fall zeigt sehr eindringlich, mit welcher Sorgfalt man bei der Bildung des Ansatzes für die Theorie einer Kreiselbewegung im einzelnen Falle vorgehen muß, um einen auf den ersten Blick vielleicht recht unbedeutend erscheinenden Umstand nicht zu übersehen, von dem sich bei genauerer Betrachtung leicht herausstellen kann, daß er ganz wider die anfängliche Erwartung doch von ausschlaggebender Bedeutung ist. Mir selbst sind Fälle dieser Art vorgekommen.

§ 41. Der Schlicksche Schiffskreisel.

Durch Wind und Wellen wird ein Schiff in Schwingungen versetzt. Hierbei bewegt sich das Schiff als starrer Körper, d. h. ohne merkliche Formänderung. Der allgemeinste Fall einer derartigen Bewegung läßt sich zunächst in zwei Anteile zerlegen, nämlich in eine Translationsbewegung, die mit der Geschwindigkeit des Schwerpunkts erfolgt, und in eine Rotationsbewegung, bei der sich das Schiff um Achsen dreht, die durch den Schwerpunkt gezogen sind. Von der Translationsbewegung

führt die vertikale Komponente zu den sogenannten Tauchschwingungen mit einer auf- und niedergehenden Bewegung. Die Schwingungsdauer der Tauchschwingungen ist verhältnismäßig kurz uud die Ausschläge bleiben unter gewöhnlichen Umständen ziemlich klein. Zu Translationsschwingungen in horizontaler Richtung kann es in der Regel überhaupt nicht kommen. — Viel wichtiger als die translatorischen Schwingungen sind die Drehschwingungen mit großen Ausschlägen, in die das Schiff bei einem starken Seegange geraten kann. Eine Rotation um den Schwerpunkt kann in drei Komponenten zerlegt werden, nämlich in Drehungen um drei zueinander senkrecht stehende Achsen, von denen die erste mit der Schiffslängsachse, die zweite mit der horizontalen Querachse zusammenfällt, während die dritte in der Gleichgewichtslage des Schiffes vertikal steht. Eine Drehung um die dritte Achse wird als eine Wendebewegung des Schiffes bezeichnet. Eine Schwingung um diese Achse wird aber durch den Seegang im allgemeinen nicht herbeigeführt. Der Grund dafür liegt darin, daß das Gleichgewicht des ruhenden Schiffes gegen Drehung um diese Achse indifferent ist, also eine Kraft fehlt, die das Schiff nach einer Gleichgewichtsstörung wieder in die frühere Lage zurückzutreiben sucht.

Die Bewegung um die Schiffslängsachse ist die wichtigste von allen Schwingungen, weil sie zu den größten Ausschlägen führt; sie wird als die Roll- oder Schlingerbewegung bezeichnet. Die Bewegung um die horizontale Querachse des Schiffes heißt die Stampfbewegung, die praktisch ebenfalls sehr wichtig ist. Denn wenn sie auch nicht zu so großen Drehungen zu führen vermag, wie die Rollbewegung, so sind dafür die Wege, die zu bestimmten Drehungswinkeln gehören, um so größer, weil sich das Schiff zu viel größeren Abständen von der Querachse als von der Längsachse erstreckt.

Der Schlicksche Schiffskreisel ist dazu bestimmt, die Rollschwingungen zu beseitigen oder wenigstens sehr stark zu vermindern, während die Tauchschwingungen und die Stampfbewegungen davon (wenigstens unmittelbar) nicht berührt werden.

Der Gedanke, einen Kreisel, d. h. ein schnell umlaufendes Schwungrad anzuwenden, um die Schiffsschwingungen zu mildern, scheint schon sehr früh aufgetaucht zu sein. Jedenfalls war schon vor Schlick ein Patent auf eine Anordnung erteilt, nach der durch ein im Schiffe um eine feste Achse drehbares Schwungrad dieser Erfolg herbeigeführt werden sollte. Der Erfinder ging dabei offenbar von der üblichen falschen Annahme aus, daß sich der Kreisel einer Drehung seiner Schwungradebene widersetze und daher einen Widerstand ausübe, der diese Drehung hemme. Wer die Theorie des Kreisels einigermaßen kennt, sieht ohne weiteres ein, daß auf diesem Wege kein Erfolg zu erwarten war.

Den richtigen Weg zur Lösung der Aufgabe hat erst Herr Konsul Dr. O. Schlick in Hamburg eingeschlagen, dem die Technik des Schiffsbaues vorher schon sehr wichtige Fortschritte zu verdanken hatte. Schlick hat die Gesetze der Kreiselbewegung klar erfaßt und sie für die Lösung der gestellten Aufgabe in geschickter Weise nutzbar zu machen gewußt. Von der Ausführbarkeit seines Planes hatte er sich alsbald durch Modellversuche überzeugt und später hat er auch die Ausführung im großen vorbereitet. Nur für die Aufstellung einer genaueren Theorie und die zahlenmäßige Angabe der zur Herbeiführung des gewünschten Erfolges erforderlichen Kreiselstärke hat er sich einer fremden Hilfe bedienen müssen. Er wandte sich zu diesem Zwecke an einige bekannte Professoren und zuletzt auch an mich. Bald nachdem Herr Schlick erklärt hatte, daß einer Veröffentlichung dieser theoretischen Ausarbeitungen nichts mehr im Wege stehe, erschien zuerst eine Abhandlung darüber von Herrn Prof. Lorenz in Danzig in der Physikalischen Zeitschrift 1904, S. 27 und hierauf von mir in der Zeitschr. d. Vereins D. Ing. 1904, S. 478. Der Unterschied beider Bearbeitungen bestand hauptsächlich darin, daß Herr Lorenz auf die Reibung, die sich der Bewegung des Kreiselrahmens widersetzt, keine Rücksicht genommen hatte, während ich durch einen glücklichen Griff die Reibung von vornherein in Ansatz gebracht und infolge davon bald erkannt

hatte, wie wichtig die Rolle ist, die diesem Umstande, den man sonst leicht zu vernachlässigen geneigt ist, gerade im vorliegenden Falle zukommt. Herr Schlick, dem beide Arbeiten schon längere Zeit vor ihrer Veröffentlichung vorlagen, hatte auch sofort mit dem sicheren Blicke des mit seinem Gegenstande vollständig vertrauten Mannes erkannt, daß nur eine Theorie, die auf die Reibung die gebührende Rücksicht nimmt, imstande sein würde, als Grundlage für die weitere Ausarbeitung des Projektes zu dienen. Auf die Bedeutung der Reibung war er offenbar schon durch seine Modellversuche aufmerksam geworden und er entschloß sich daher, als ihm meine Rechenergebnisse bekannt geworden waren, ohne jedes Zögern, die von mir abgeleiteten Formeln für die Versuche im großen Maßstabe in Anwendung zu bringen.

Der Theoretiker ist meist dazu geneigt, die Leistung, die in der Aufstellung einer einem bestimmten Vorgange gut angepaßten Theorie liegt, besonders hoch einzuschätzen und darüber andere Verdienste geringer zu bewerten. Ich weiß mich selbst im allgemeinen nicht frei von dieser Neigung; um so mehr aber fühle ich mich verpflichtet, hier noch ausdrücklich zu erklären, daß nach meiner eigenen Schätzung gerade in der Frage des Schiffskreisels die Leistung des Herrn Schlick die weitaus bedeutendere gegenüber den von mir und anderen dazu gegebenen Theorien ist. Nachdem Herr Schlick die Wirkung der von ihm erfundenen Vorrichtung klar erkannt und sie an Modellen genügend studiert hatte, war es nur mehr eine Frage des Zufalls, wem es von den Theoretikern, die er befragte, zuerst glücken würde, den dazu passenden theoretischen Ansatz ausfindig zu machen, während umgekehrt keiner von allen diesen Theoretikern von selbst auf den Gedanken des Schiffskreisels gekommen wäre. Diese Überlegung führt ohne weiteres zu einer gerechten Würdigung des Wertes der einzelnen Leistungen, die zusammen wirken mußten, um das Ziel zu erreichen.

Der Schlicksche Schiffskreisel besteht in einem Kreiselpendel, das mit dem im vorigen Paragraphen behandelten in

einer gewissen Verwandtschaft steht. Denkt man sich einen solchen Apparat, wie er in Abb. 14, S. 210, gezeichnet ist, in einem Schiffe aufgehängt, so daß die horizontale Aufhängeachse A quer zur Längsachse des Schiffes liegt, so hat man schon einen Schiffskreisel in seiner einfachsten Ausführungsform. An die Stelle der durch die Verbiegung der Aufhängeachse herbeigeführten, im vorigen Paragraphen mit ϑ bezeichneten Drehungen treten bei dem Schiffe nur weit größere Drehungswinkel wegen der Rollbewegungen, die das Schiff entweder von selbst schon infolge des Seegangs ausführt oder zu denen es auch bei stiller See dadurch gebracht wird, daß man das Kreiselpendel absichtlich in Schwingungen versetzt. Die Theorie des Vorganges ist freilich etwas umständlicher als im vorigen Falle.

Daß überhaupt eine Wechselwirkung zwischen den Rollschwingungen des Schiffes und den Schwingungen des Kreiselpendels relativ zum Schiffe besteht, ist für den Leser, der sich bereits mit den vorhergehenden Paragraphen bekannt gemacht hat, ohne weiteres klar. Die nächstliegende Frage ist aber die, ob diese Wirkung bei den großen Abmessungen und Massen des Schiffes gegenüber den dagegen notwendig sehr viel kleineren des Schwungrades ausreichend groß gemacht werden kann, um einen hinreichenden Erfolg der Vorrichtung zu ermöglichen. Oder mit anderen Worten die Frage: wie stark man den Kreisel jedenfalls machen muß, damit ein solcher Erfolg überhaupt erwartet werden kann, wobei es als eine spätere Sorge betrachtet werden darf, wie man die Einrichtung zu treffen hat, um diesen an sich hiermit ermöglichten Erfolg auch wirklich zu erreichen.

Dazu genügt eine ganz einfache Betrachtung, die von allen weiteren Untersuchungen, die sich notwendig an bestimmte Annahmen halten müssen, über deren Berechtigung im einzelnen man verschiedener Meinung sein kann, ganz unabhängig ist und die daher hier an den Anfang der ganzen Theorie gestellt werden soll.

Wir stützen uns dazu auf den Flächensatz, den wir auf den aus dem Schiffe samt dem darin aufgehängten Kreiselpendel bestehenden Punkthaufen anwenden. Das Schiff liege zuerst ruhig in ruhigem Wasser und der Kreisel vom Trägheitsmomente J rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit w in dem ruhig herabhängenden Pendelrahmen. Dann möge vom Schiffe aus durch Einwirkung einer hinreichend großen Kraft, die für den ganzen Verband eine innere Kraft ist, der Kreiselrahmen eine Drehung um einen Winkel ψ in kurzer Zeit erfahren. Es fragt sich, wie sich das Schiff diesem Vorgange gegenüber verhält. Hierbei dürfen wir annehmen, daß sich das Schiff während der kurzen Dauer des Stoßvorganges, der den Kreiselrahmen aus seiner lotrechten Lage verrückte, nicht merklich aus seiner anfänglichen Lage entfernt hat, so daß alle äußeren Kräfte, also das Gewicht und der Auftrieb, die auf den ganzen Verband wirken, während der Stoßzeit im Gleichgewichte miteinander bleiben. Dann muß nach erfolgter Drehung des Kreiselrahmens der Schwerpunkt des ganzen Punkthaufens in Ruhe und der Drall nach Größe und Richtung unverändert geblieben sein. Hat sich also der Schwerpunkt des Kreiselrahmens gehoben, so muß der Schwerpunkt des Schiffskörpers ein wenig gesunken sein. Diese Bewegung, die ganz unabhängig davon ist, ob das Schwungrad rotiert oder nicht, ist aber jedenfalls ganz unheblich und kann weiterhin außer Betracht bleiben. Dazu kommt eine zweite Bewegung des Schiffskörpers, die ebenfalls zu vernachlässigen ist, nämlich eine geringe Drehung im Sinne einer Stampfbewegung. Wegen der Drehung des Kreiselrahmens in einer Richtung muß sich nämlich der Schiffskörper um einen leicht zu berechnenden, jedenfalls aber sehr geringen Betrag in der entgegengesetzten Richtung drehen. Daß es auf diese Bewegung weiterhin nicht ankommen kann, geht ebenfalls am deutlichsten daraus hervor, daß sie der Größe nach ganz unabhängig davon ist, ob der Kreisel rotiert oder nicht.

Von ganz anderer Größenordnung ist dagegen die Bewegung, die dem Schiffskörper von dem schnell rotierenden Schwungrade wegen der Richtungsänderung des Kreiseldralls

aufgezwungen wird. Dieser Drall hat nach wie vor die Größe

$$B = Jw, \tag{218}$$

während er aus der Richtung $\mathfrak{B}_0$ in die Richtung $\mathfrak{B}_1$ (Abb. 15) übergeführt wird. Dem entspricht eine Änderung des Vektors

$$\Delta\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_0.$$

Da sich der Drall des ganzen Punkthaufens nicht geändert haben kann, muß daher dem Schiffskörper eine Drehbewegung erteilt worden sein, die zu einem mit $\Delta\mathfrak{B}$ entgegengesetzt gerichteten Dralle von der gleichen Größe gehört. Um die Winkelgeschwindigkeit dieser Drehung nach Größe und Richtung zu ermitteln, zerlegen wir $\Delta\mathfrak{B}$ in eine vertikale und eine horizontale Komponente. Für die vertikale Komponente V erhalten wir unter Berücksichtigung von Gl. (218)

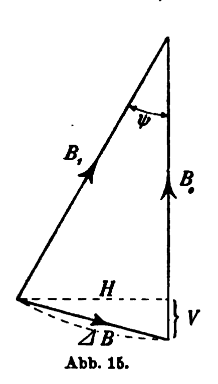


Abb. 15.

$$V = B(1 - \cos\psi) = Jw(1 - \cos\psi)$$

und für die horizontale Komponente H

$$H = Jw \sin\psi.$$

Die beiden Komponenten V und H fallen in die Richtungen von Hauptträgheitsachsen des Schiffskörpers; die jeder von ihnen entsprechende Winkelgeschwindigkeitskomponente erhalten wir daher durch Division mit dem zugehörigen Trägheitsmomente des Schiffskörpers. Wegen der langgestreckten Gestalt eines Schiffes sind die drei Hauptträgheitsmomente sehr verschieden voneinander; das auf die Längsachse bezogene Trägheitsmoment θ ist nämlich kleiner als das zur vertikalen Achse gehörige Trägheitsmoment θ_1 oder als das zur Querachse gehörige $\theta_{\prime\prime}$.

Bezeichnen wir die Winkelgeschwindigkeiten, die der Schiffskörper um die vertikale Achse und um die Längsachse erlangt hat, mit den kleinen Buchstaben v und h, so folgt

$$v = \frac{Jw(1 - \cos\psi)}{\theta_1}, \quad h = \frac{Jw \sin\psi}{\theta}.$$

Da θ_1 viel größer ist als θ, wird schon aus diesem Grunde v klein gegen h. Außerdem wird aber auch bei nicht zu großem ψ der Zähler von v klein gegenüber dem von h. Man sieht daher, daß es auf die Geschwindigkeit v der Wendebewegung, die dem Schiffskörper durch die betrachtete Kreiselumlegung erteilt wird, nicht ankommt gegenüber der viel größeren Geschwindigkeit h der Rollbewegung.

Wir können daher unsere Betrachtung dahin zusammenfassen, daß die mit dem Kreiselrahmen vorgenommene Drehung eine Rollbewegung des Schiffskörpers mit der Geschwindigkeit h zur Folge hat, neben der außerdem noch einige kleinere Bewegungsanteile hervorgerufen werden, die aber gegenüber der Rollbewegung ganz unbedeutend sind, so daß sie für die weitere Betrachtung vernachlässigt werden dürfen.

Die Größe h drückt demnach zahlenmäßig die Größe des Einflusses aus, den wir mit Hilfe eines gegebenen Kreisels auf den Schiffskörper auszuüben vermögen. Der darin als Faktor vorkommende Drall des Kreisels $J\omega$ bildet das Maß dieses Einflusses, soweit er nur von dem Kreisel selbst abhängt. Es ist daher zweckmäßig, in diesem Zusammenhange den Drall $J\omega$ auch als die Stärke des Kreisels zu bezeichnen, um hierdurch darauf hinzuweisen, daß die Größe des durch den Kreisel herbeizuführenden Erfolges in der Tat nur von $J\omega$ abhängt und nicht etwa, wie man sonst vielleicht von vornherein vermuten könnte, von der lebendigen Kraft.

Wir müssen uns aber nun ferner überlegen, was ein bestimmter Wert von h für das betreffende Schiff bedeutet. Zu diesem Zwecke vergleichen wir die Winkelgeschwindigkeit h mit jener Winkelgeschwindigkeit, die das Schiff bei einer durch andere Ursachen hervorgerufenen Rollschwingung annimmt. Solange die Ausschläge nicht allzu groß werden, kann man die Rollbewegung eines Schiffes, das keinen Kreisel trägt, als eine einfache harmonische Schwingung betrachten. Diese Bewegung wurde schon in Band IV, S. 338 der 3. Auflage behandelt und es zeigte sich, daß die reduzierte Pendellänge dafür

$$l_{red} = \frac{g\theta}{Qs}$$

gesetzt werden kann, wenn man unter θ wie vorher das Trägheitsmoment für die Schiffslängsachse, unter Q das Gewicht des Schiffes und unter s die metazentrische Höhe versteht, also den Abstand zwischen Metazentrum und Schwerpunkt.

Bezeichnet man den Winkel, um den das Schiff zur Zeit t gegen die aufrechte Lage geneigt ist, mit φ, so kann daher, wiederum unter der hier ohne Zweifel hinreichend genau zutreffenden Annahme nicht zu großer Ausschläge,

$$\varphi = \varphi_0 \sin t \sqrt{\frac{Qs}{\theta}}$$

gesetzt werden, wobei unter φ_0 die Amplitude der Rollschwingung zu verstehen ist. Die Geschwindigkeit, mit der das Schiff durch die Gleichgewichtslage geht, sei jetzt mit h_0 bezeichnet; man erhält dafür durch Differentiation des vorhergehenden Ausdrucks

$$h_0 = \varphi_0 \sqrt{\frac{Qs}{\theta}}.$$

Mit diesem Werte von h_0 haben wir den vorher für h aufgestellten Ausdruck zu vergleichen. Setzen wir beide Werte einander gleich, so können wir daraus den Rollwinkel φ berechnen, bis zu dem das Schiff infolge der ihm erteilten Winkelgeschwindigkeit weiter schwingt, wenn es nach Drehung des Kreiselrahmens und Festhalten des Kreisels in der neuen Lage sich selbst überlassen wird. Wir finden dann

$$\varphi = \frac{Jw \sin \psi}{\sqrt{Qs\theta}}.$$

Wenn die Wirkung des Kreisels ausreichen soll, um die durch andere Ursachen hervorgerufenen Rollbewegungen des Schiffes hinreichend zu bekämpfen, muß jedenfalls der nach dieser Gleichung berechnete Ausschlag φ, der durch den Kreisel hervorgerufen werden kann, nicht zu klein, sondern nahezu von der gleichen Größenordnung sein, wie die Ausschläge φ_0, die durch andere Ursachen, also durch den Seegang hervorgerufen

werden können. Wie groß diese Ausschläge ungefähr sind, ist aus der Erfahrung hinlänglich bekannt; sie hängen einerseits von der Stärke des Seegangs ab, auf den man im besonderen Falle zu rechnen hat, und andererseits von der Größe des Schiffes, das ihm ausgesetzt ist. Wir betrachten daher die Größe φ_0 dieser Ausschläge als eine hinreichend genau einzuschätzende oder aus der Erfahrung zu entnehmende Konstante. Gewöhnlich wird φ_0 in Gradmaß ausgedrückt etwa zwischen den Grenzen 15^0 und 30^0 anzunehmen sein, je nach der Größe des Schiffes und dem Fahrwasser, in dem es verkehren soll.

In den vorhergehenden Gleichungen kommt der Sinus des Winkels ψ vor, über den noch eine bestimmte Annahme zu machen ist. Um eine gegebene Kreiselstärke hinreichend auszunutzen, müssen wir ziemlich große Ausschläge ψ zulassen. Andererseits wollen wir ψ aber auch nicht zu groß ansetzen, schon um den durch v ausgedrückten Einfluß des Kreisels auf die Wendebewegung in mäßigen Grenzen zu halten. Ich wähle daher ψ zu 45^0. Hierbei ist aber zu beachten, daß bei den vorhergehenden Betrachtungen angenommen wurde, daß sich der Kreisel aus der Mittellage in die Lage ψ bewege. Beim regelmäßigen Arbeiten der ganzen Vorrichtung wird dagegen der Kreisel abwechselnd nach beiden Seiten hin ausschlagen. Unter der Voraussetzung, daß es uns gelingt, den Kreisel vollständig zur Bekämpfung der Rollbewegungen auszunutzen, haben wir daher für einen einmaligen Schwingungsweg eine Wirkung, wie sie der Umlegung aus der Lage ψ von der einen Seite zur Lage ψ auf der anderen Seite entspricht. Die geometrische Änderung, die der Drall hierbei erfährt, ist das Doppelte des vorher berechneten Wertes von H. Zugleich wird hierbei für den ganzen Schwingungsweg V zu Null, d. h. der Einfluß auf die Wendebewegung wird ebenfalls im ganzen genommen zu Null, da der Anstoß, der auf dem halben Schwingungswege in der einen Richtung erteilt wurde, durch den darauf erfolgenden Anstoß in der entgegengesetzten Richtung wieder aufgehoben wird.

Mit Rücksicht auf diese Betrachtungen setze ich daher in der vorhergehenden Gleichung zunächst $\sin\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und nehme dann von φ den doppelten Wert. Damit erhalte ich

$$\varphi = 1{,}41 \frac{Jw}{\sqrt{Qs\theta}}.$$

Von φ_0 soll dieser Wert einen angemessenen Bruchteil ausmachen, etwa

$$\varphi = m\varphi_0,$$

wobei m ein Erfahrungskoeffizient ist, dessen zweckmäßige Festsetzung aus Versuchen mit ausgeführten Kreiselschiffen zu entnehmen sein wird. Setzt man dies ein und löst die vorhergehende Gleichung nach Jw auf, so erhält man

$$Jw = \frac{m}{1{,}41}\varphi_0\sqrt{Qs\theta}. \tag{219}$$

Das ist also die Formel für die Kreiselstärke, die jedenfalls nötig ist, um die Rollbewegungen mit dem Kreisel wirksam bekämpfen zu können.

Bei der ersten Aufstellung der Formel lagen natürlich keine Erfahrungen zur Ermittelung des Wertes von m vor; man war vielmehr ausschließlich auf eine Schätzung angewiesen. Ich nahm diese Schätzung in der Art vor, daß ich

$$Jw = \tfrac{1}{5}\varphi_0\sqrt{Qs\theta} \tag{220}$$

setzte, was einem Werte des Koeffizienten m von rund 0,28 entspricht. Mit anderen Worten heißt dies, daß ein Schiff, für das man den Ausschlag φ_0 zu 20^0 anzunehmen hatte, durch einmaliges Umlegen des nach dieser Formel berechneten Kreisels aus der Lage $\psi = -45^0$ in die Lage $\psi = +45^0$ einen Anstoß erhält, der eine Rollbewegung mit Ausschlägen von $4{,}6^0$ hervorzubringen oder auch zu vernichten vermag. Dies sah ich als hinreichend an, weil ja die größten Ausschläge φ_0 des kreisellosen Schiffes nicht plötzlich durch einen einzigen Anstoß, sondern durch wiederholtes Auftreffen von Wellen in zufällig günstigem Zusammentreffen hervorgebracht werden und der Kreisel während dieses wiederholten Anpralls der Wogen

mehrere Ausschläge machen kann, die ein Anwachsen zu größeren Werten φ_0 leicht verhindern können. Ich nahm sogar an, daß der Wert in Gl. (220) schon etwas hoch gegriffen sei und vielleicht auf Grund der Erfahrung in Zukunft vermindert werden dürfe.

Bis jetzt sind, soweit mir bekannt ist, drei Schiffe mit einem nach dieser Formel berechneten Kreisel ausgerüstet worden. Mit dem ersten dieser Schiffe, dem „Seebär", habe ich auch selbst einmal eine Probefahrt mitgemacht. Das Ergebnis hat allgemein befriedigt, da die Rollschwingungen bis auf einen kleinen Rest von etwa 1,5 bis 2^0 vernichtet wurden. Nach dem, was ich über die Ergebnisse mit den andern beiden Schiffen erfahren habe, hat sich auch bei ihnen die Formel (220) bewährt. Meine anfängliche Vermutung, daß der Kreisel wohl noch etwas schwächer als nach Gl. (220) gehalten werden dürfte, hat sich dagegen nicht bestätigt. Man wird daher bis auf weiteres an dieser Formel festhalten müssen.

Man kann dies auch um so mehr, als die Formel ohnehin in φ_0 noch einen Faktor enthält, der nicht ohne weiteres in bestimmten Zahlen gegeben ist, sondern der selbst erst noch auf Grund der Erfahrung, die sich in diesem Falle allerdings auf die gewöhnlichen, in großer Zahl vorhandenen Schiffe ohne Kreisel bezieht, eingeschätzt werden muß. Es steht aber nichts im Wege, die Formel (220) auf jeden Fall beizubehalten, und die Erfahrungen, die inzwischen mit Kreiselschiffen bereits gemacht sind oder noch zu machen sein werden, dahin zu verwerten, daß sie für die passende Wahl des Winkels φ_0 ohne Rücksicht auf die ursprüngliche Bedeutung dieses Koeffizienten für künftige Ausführungen die Richtschnur abgeben.

Bei der Anwendung von Gl. (220) ist zunächst zu beachten, daß φ_0 natürlich nicht in Gradmaß, sondern in Bogenmaß auszudrücken ist. Das Schiffsgewicht Q oder mit anderen Worten die Wasserverdrängung ist ohne weiteres gegeben. Die metazentrische Höhe s ist, wenn sie nicht schon bekannt sein sollte, durch einen besonderen Versuch an dem fertigen Schiffe leicht zu ermitteln, indem man beobachtet, um wieviel sich

das Schiff bei einer einseitigen Belastung oder bei der Belastung durch ein Kräftepaar schief stellt. Aus den Betrachtungen in Band I, S. 401 der 3. Aufl. geht dies ohne weiteres hervor.

Das Trägheitsmoment θ des Schiffes entnimmt man am einfachsten einer Angabe über die volle Schwingungsdauer der Rollbewegungen, die das Schiff ohne Kreisel ausführt. Für nicht zu große Ausschläge hat man dafür die Formel

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_{red}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{\theta}{Qs}}.$$

Entnimmt man hieraus θ und setzt den Wert in Gl. (220) ein, so geht sie über in

$$Jw = \frac{1}{10\pi} \varphi_0 Q s T. \tag{221}$$

Bezeichnet man ferner den Winkel φ_0 in Gradmaß ausgedrückt mit φ_0', so daß also

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{180} \varphi_0'$$

ist, so läßt sich die Formel für die Kreiselstärke auch

$$Jw = \frac{\varphi_0'}{1800} Q s T \tag{222}$$

schreiben, was für die praktische Ausrechnung manchmal bequemer ist.

Hat man also z. B. $\varphi_0' = 15^0$, $Q = 2000\,\mathrm{t} = 2.10^6$ kg, $s = 1{,}2$ m und $T = 8$ sec, so folgt

$$Jw = 160000 \text{ mkg sec.}$$

Wie man nun den Kreisel baut, um die erforderliche Kreiselstärke herbeizuführen, ist für die Wirkung auf das Schiff ganz gleichgültig. Man wird ihn natürlich so schnell als es angeht umlaufen lassen, um mit einem möglichst kleinen J, also auch mit einem geringen Gewichte und geringem Raumbedarf auskommen zu können.

Bei den vorhergehenden Betrachtungen war ausdrücklich vorausgesetzt, daß die Einrichtungen so getroffen werden könnten, daß der Kreisel in mög-

lichst günstiger Weise ausgenutzt wird. Wir müssen uns aber jetzt noch Rechenschaft darüber geben, ob dies tatsächlich durchführbar ist und von welchen Umständen die günstigste Ausnutzung abhängt. Zu diesem Zwecke ist es nötig, das Verhalten des Kreiselschiffes unter bestimmten einfachen, mehr oder weniger willkürlich gewählten Voraussetzungen näher zu untersuchen. Die Ergebnisse, zu denen man dabei gelangt, haben zwar an sich, den beschränkten Voraussetzungen entsprechend, auch nur einen beschränkten Wert; trotzdem liefern sie aber eine geeignete Unterlage für die weitere Beurteilung der ganzen Einrichtung.

§ 42. Schwingungen des Kreiselschiffes ohne Einwirkung äußerer Anstöße.

Ich setze jetzt einen beliebigen Anfangszustand der Rollbewegung des Schiffes und der Pendelbewegung des Kreiselrahmens voraus und betrachte den weiteren Fortgang dieser Bewegung unter der Annahme, daß von außenher kein weiterer Anstoß mehr erfolgt. Von äußeren Kräften soll also nur das Gewicht und der Auftrieb des Wassers wirken und zwar so, daß Gewicht und Auftrieb ein Kräftepaar miteinander bilden, dessen Moment für einen nicht zu großen Rollwinkel φ genau genug gleich

$$Qs\varphi$$

gesetzt werden kann, wenn Q wiederum das Gewicht und s die metazentrische Höhe bedeutet.

Wir setzen ferner voraus, daß das Schiff im Anfangszustande nur rollte und nicht stampfte. Dann wird zwar im weiteren Fortgange auch eine geringe Stampfbewegung gerade infolge der Schwingungen des Kreiselrahmens eintreten; aber diese ist, wie eine einfache Überschlagsrechnung zu lehren vermag, so gering, daß sie gar keine Bedeutung hat und deshalb hier auch nicht näher berücksichtigt werden soll. Wir begnügen uns vielmehr mit der Aufstellung einer Bewegungsgleichung für die Änderung der die Schiffsstellung beschreibenden Koordinate φ.

Um die Bewegungsgleichungen abzuleiten, kann man sich des Verfahrens von Lagrange bedienen. Wenn man von vornherein im Zweifel darüber ist, wie weit man mit den Vernachlässigungen einzelner Bewegungsanteile gehen darf, empfiehlt es sich auch, diesen freilich etwas mühsamen Weg einzuschlagen. Man führt dann außer φ noch eine zweite Koordinate zur Beschreibung der Lage des Schiffes ein, den Stampfwinkel, wie wir in leicht verständlicher Ausdrucksweise dafür sagen wollen. Aber hier begnüge ich mich damit, auf diesen Weg hinzuweisen für den Fall, daß der Leser das Bedürfnis empfinden

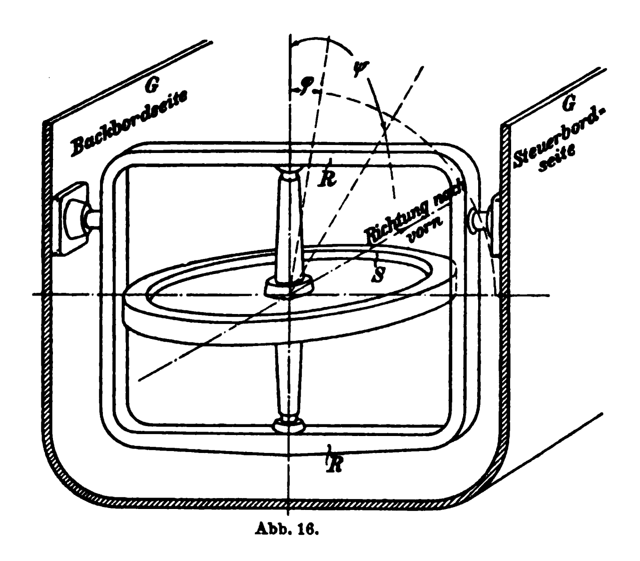


Abb. 16.

sollte, sich über den Betrag der von mir vernachlässigten Glieder genauere Rechenschaft zu geben; ich selbst werde aber die Rechnung ausschließlich auf den Flächensatz stützen.

Abb. 16 zeigt einen Teil des Schiffsgerippes G mit dem Kreiselrahmen R und dem Schwungrad S und gibt an, in welchen Richtungen die Drehung φ des Schiffes und die Drehung ψ des Kreiselrahmens positiv gezählt werden sollen. Das Schwungrad möge von oben gesehen im Uhrzeigersinn umlaufen. Im entgegengesetzten Falle wäre in den nachfolgenden Gleichungen

die Winkelgeschwindigkeit w überall mit entgegengesetztem Vorzeichen zu nehmen.

Der Drall Jw ist nach unserer Voraussetzung ein nach oben gerichteter Vektor. Dreht er sich um den positiven Winkel $d\psi$, so erfährt er einen nach vorn gerichteten Zuwachs. Andererseits entspricht einer Drehung um die Schiffslängsachse im Sinne der positiven φ ein Drall des Schiffskörpers, der, wie aus der Abbildung hervorgeht, nach hinten gerichtet ist, da eine solche Drehung von hinten gesehen mit der Uhrzeigerbewegung gleich gerichtet ist. Die Änderungsgeschwindigkeit des Dralls von Schiffskörper und Kreisel zusammengenommen kann daher gleich

$$-\theta \frac{d^2\varphi}{dt^2} + Jw \frac{d\psi}{dt}$$

gesetzt werden, wenn ein nach vorn gerichteter Zuwachs mit dem positiven Zeichen versehen wird. Nach dem Flächensatz ist dieser Ausdruck gleich dem statischen Momente der äußeren Kräfte zu setzen. Vorher war schon bemerkt, daß die äußeren Kräfte ein Kräftepaar vom Momente $Qs\varphi$ bilden. Das Kräftepaar sucht das Schiff wieder in die aufrechte Lage zurückzudrehen. Das ist eine Drehung, die von hinten gesehen der Uhrzeigerbewegung entgegengerichtet ist. Der Momentenvektor des Kräftepaars geht daher nach vorn und ist mit positivem Vorzeichen in die Gleichung des Flächensatzes einzusetzen. Man erhält also

$$-\theta \frac{d^2\varphi}{dt^2} + Jw \frac{d\psi}{dt} = Qs\varphi \tag{223}$$

als Bewegungsgleichung für das Schiff.

Hierzu muß noch eine Bemerkung gemacht werden. Bei der Ableitung der Gleichung wurden kleine Drehungen φ und ψ vorausgesetzt. Wenn aber auch φ unbedenklich als klein angesehen werden darf, so gilt dies keineswegs mit demselben Rechte für den Winkel ψ, denn tatsächlich läßt man den Kreiselrahmen um große Winkel schwingen. Eigentlich muß man daher dem letzten Gliede auf der linken Seite, das die Komponente der Änderung des Kreiseldralls in der Schiffslängsrichtung an-

geben soll, noch den Faktor $\cos\psi$ beifügen. Aber ich sehe davon ab und begnüge mich mit der Durchführung der Rechnung unter der Voraussetzuug kleiner Ausschläge auch für den Kreiselrahmen, bei denen $\cos\psi = 1$ gesetzt werden kann. Denn tatsächlich handelt es sich ja jetzt nicht darum, einen Vorgang genau zu untersuchen, so wie er in Wirklichkeit eintritt, sondern zunächst nur um ein Beispiel für eine mögliche Bewegung.

Ferner ist noch zu bemerken, daß bei der Aufstellung der Gleichung auch keine Rücksicht auf die Dämpfung genommen ist, die die Rollschwingungen des Schiffes durch den Wasserwiderstand erfahren. Das ist deshalb zulässig, weil diese Dämpfung in der Tat nur gering ist gegenüber jener, die durch den Kreisel herbeigeführt wird.

Nun ist noch eine Bewegungsgleichung für die pendelnde Bewegung des Kreiselrahmens zu bilden. Denken wir uns zunächst den Kreiselrahmen in seiner Mittellage relativ zum Schiffe festgehalten, so läßt sich nach dem Flächensatze leicht berechnen, wie groß das Kräftepaar sein muß, das vom Schiffskörper auf ihn übertragen werden muß. Der Kreiselrahmen führt nämlich in diesem Falle mit dem Schiff zusammen die Rollbewegungen aus und der nach oben gekehrte Drallvektor Jw erfährt bei einem positiven Zuwachs des Winkels $d\varphi$ eine Ablenkung, die einem in Abb. 16 nach rechts hin gehenden Zuwachs entspricht. Das Kräftepaar, das von den Lagern her auf den Kreiselrahmen ausgeübt werden muß, um ihn gegen das Schiff festzuhalten, hat daher einen horizontal nach rechts hin gerichteten Momentenvektor von der Größe

$$Jw\frac{d\varphi}{dt}.$$

Lassen wir hierauf dieses Kräftepaar, das den Kreisel festhielt, fortfallen, so erfährt der Kreiselrahmen eine Winkelbeschleunigung von derselben Größe und Richtung, als wenn im ruhenden Schiffe ein Kräftepaar von demselben Momentenvektor mit entgegengesetzter Richtung darauf einwirkte. Der Momentenvektor dieses beschleunigenden Kräftepaars, zu dem sich die

zweiten Zusatzkräfte der Relativbewegung zusammenfassen lassen, ist daher in Abb. 16 nach links gerichtet.

Weiter wirkt das statische Moment des Gewichtes des ganzen Kreiselpendels auf die Schwingung des Kreiselrahmens ein. Wir nehmen an, daß der Schwerpunkt tiefer liegt als die Aufhängeachse. Bei einem positiven Ausschlag ψ des Pendels dreht dann das Gewicht in Abb. 16 von rechts gesehen entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn.

Ferner nehmen wir an, daß sich der Pendelbewegung eine Reibung von der Art einer Flüssigkeitsreibung widersetzt. Das Moment dieser Reibung ist dann gleich

$$k\,\frac{d\psi}{dt}$$

anzunehmen, wenn k eine Konstante bedeutet, die das Moment der Reibung für die Winkelgeschwindigkeit Eins des Pendels angibt.

Hiermit sind die Kräfte aufgezählt, unter deren Einfluß sich die Schwingungen des Kreiselpendels relativ zum Schiffe vollziehen. Der Winkel ψ und seine Differentialquotienten werden positiv gerechnet, wenn die Drehung, die Winkelgeschwindigkeit oder die Winkelbeschleunigung von rechts her gesehen im Uhrzeigersinn erfolgen. Das Moment der Zusatzkräfte und des Gewichtes geht, wie wir vorher feststellten, im entgegengesetzten Sinne und auch das Moment der Reibung geht im entgegengesetzten Sinne mit der Geschwindigkeit. Wir haben daher für die Bewegung des Kreiselpendels relativ zum Schiffe die Gleichung zu bilden

$$\vartheta\,\frac{d^2\psi}{dt^2} = -Jw\,\frac{d\varphi}{dt} - pr\psi - k\,\frac{d\psi}{dt}\,. \tag{224}$$

Hierbei ist mit ϑ das Trägheitsmoment des ganzen Kreiselpendels samt Kreisel usf., bezogen auf die Aufhängeachse, bezeichnet, ferner mit p das Gewicht dieser Teile und mit r der Abstand des Schwerpunktes von der Aufhängeachse.

Auch bei der Aufstellung dieser Gleichung ist vorausgesetzt, daß die Ausschläge des Kreiselrahmens klein bleiben.

Denn eigentlich wäre sonst für das statische Moment des Gewichtes $pr \sin \psi$ an Stelle von $pr\psi$ einzusetzen. Für unsere Zwecke reicht es aber aus, die Bewegung zunächst einmal unter der Annahme kleiner Ausschläge zu untersuchen, womit die Gleichungen eine für die Integration möglichst bequeme Form annehmen.

§ 43. Integration der Bewegungsgleichungen.

Wir schreiben die beiden Bewegungsgleichungen (223) und (224) nochmals in der Form

$$\left.\begin{aligned} \theta \frac{d^2\varphi}{dt^2} - J\omega \frac{d\psi}{dt} + Qs\varphi &= 0 \\ \vartheta \frac{d^2\psi}{dt^2} + J\omega \frac{d\varphi}{dt} + k \frac{d\psi}{dt} + pr\psi &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (225)$$

zusammen. Um daraus die Variable ψ zu eliminieren, differentiieren wir die zweite Gleichung nach t und führen hierauf den aus der ersten Gleichung zu entnehmenden Ausdruck für $\frac{d\psi}{dt}$ in sie ein. Man erhält dann für φ die lineare Differentialgleichung vierter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{aligned} \frac{d^4\varphi}{dt^4} + \frac{k}{\vartheta}\frac{d^3\varphi}{dt^3}\left(\frac{Qs}{\theta} + \frac{pr}{\vartheta} + \frac{J^2\omega^2}{\vartheta\theta}\right)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k\frac{Qs}{\vartheta\theta}\frac{d\varphi}{dt} \\ + \frac{pr}{\vartheta}\frac{Qs}{\theta}\varphi = 0. \end{aligned} \qquad (226)$$

In derselben Weise kann man auch die Variable φ aus den Bewegungsgleichungen (225) eliminieren, indem man die erste von ihnen nach t differentiiert und hierauf $\frac{d\varphi}{dt}$ aus der zweiten Gleichung in sie einsetzt. Wenn man dies ausführt, überzeugt man sich, daß, wie immer in Fällen dieser Art, die Differentialgleichung, der ψ genügen muß, genau mit der für φ aufgestellten übereinstimmt.

Zur Vereinfachung der weiteren Rechnung führen wir die folgenden Abkürzungen ein:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{k}{\vartheta} \\ a_2 &= \frac{Qs}{\theta} + \frac{pr}{\vartheta} + \frac{J^2 w^2}{\vartheta\theta} \\ a_3 &= \frac{k}{\vartheta}\frac{Qs}{\theta} \\ a_4 &= \frac{pr}{\vartheta}\frac{Qs}{\theta} \end{aligned}\right\}, \tag{227}$$

womit Gl. (226) übergeht in

$$\frac{d^4\varphi}{dt^4} + a_1\frac{d^3\varphi}{dt^3} + a_2\frac{d^2\varphi}{dt^2} + a_3\frac{d\varphi}{dt} + a_4\varphi = 0. \tag{228}$$

Die Koeffizienten a sind ihrer Definition nach sämtlich positive Größen, denn die einzige in Gl. (227) auftretende Größe, die auch negativ werden könnte, nämlich w, tritt darin nur im Quadrate auf. Dagegen können a_3 und a_2 auch gleich Null werden, nämlich dann, wenn $k = 0$ ist, d. h. wenn man den Kreiselrahmen so aufhängt, daß die sich seiner Bewegung widersetzende Reibung vernachlässigt werden kann. Dieser Fall hat für uns als Grenzfall Bedeutung und wird durch die allgemeinere Betrachtung schon mit umfaßt.

Am einfachsten integriert man Gleichungen von der Form (228) zunächst mit Hilfe von Exponentialfunktionen. Setzt man nämlich

$$\varphi = A_1 e^{\alpha_1 t},$$

so wird dadurch die Gleichung befriedigt, unter der Voraussetzung, daß α_1 eine Wurzel der Bedingungsgleichung

$$\alpha^4 + a_1\alpha^3 + a_2\alpha^2 + a_3\alpha + a_4 = 0, \tag{229}$$

der sogenannten charakteristischen Gleichung ist. Da diese Gleichung vierten Grades im allgemeinen vier voneinander verschiedene Wurzeln hat, kann man auch das allgemeine, mit vier willkürlichen Konstanten behaftete Integral der Differentialgleichung aus einer Summe von Gliedern von dieser Form zusammensetzen, also

$$\varphi = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + A_3 e^{\alpha_3 t} + A_4 e^{\alpha_4 t}. \tag{230}$$

Wir müssen uns jetzt ein Urteil darüber verschaffen, welche Eigenschaften den Wurzeln α_1 bis α_4 zukommen.

Sehr einfach gestaltet sich die Beantwortung dieser Frage für den Grenzfall des ungebremsten Kreisels, also für $k = 0$, womit $a_1 = 0$ und $a_3 = 0$ wird. Die charakteristische Gleichung vereinfacht sich dann zu

$$\alpha^4 + a_2\alpha^2 + a_4 = 0,$$

woraus sofort

$$\alpha^2 = -\frac{a_2}{2} \pm \sqrt{\frac{a_2^2}{4} - a_4}$$

folgt. Da a_2 und a_4 positiv sind, folgt hieraus, daß beide Werte von α^2 negativ werden. Die Wurzel auf der rechten Seite bleibt nämlich jedenfalls reell. Man erkennt dies, indem man die Werte von a_2 und a_4 aus den Gleichungen (227) einführt; dann wird nämlich

$$\sqrt{\frac{a_2^2}{4} - a_4} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{Qs}{\theta} + \frac{pr}{\vartheta} + \frac{J^2w^2}{\vartheta\theta}\right)^2 - 4\,\frac{pr}{\vartheta}\,\frac{Qs}{\theta}},$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{Qs}{\theta} - \frac{pr}{\vartheta}\right)^2 + \frac{J^4w^4}{\vartheta^2\theta^2} + 2\left(\frac{Qs}{\theta} + \frac{pr}{\vartheta}\right)\frac{J^2w^2}{\vartheta\theta}}$$

und der Wert unter dem Wurzelzeichen bildet jetzt eine Summe von Gliedern, die sämtlich positiv sind.

Die charakteristische Gleichung hat daher für den ungebremsten Kreisel vier rein imaginäre Wurzeln, die paarweise gleich groß und von entgegengesetzten Vorzeichen sind. Schreiben wir für den vorher aufgestellten Wert von α^2 kürzer $-q_1^2$ für den Fall des positiven und $-q_2^2$ für den Fall des negativen Wurzelzeichens, so ist

$$\alpha_1 = +iq_1, \quad \alpha_2 = -iq_1, \quad \alpha_3 = +iq_2, \quad \alpha_4 = -iq_2$$

zu setzen. Die Lösung der Differentialgleichung lautet daher jetzt

$$\varphi = A_1 e^{iq_1 t} + A_2 e^{-iq_1 t} + A_3 e^{iq_2 t} + A_4 e^{-iq_2 t}. \tag{231}$$

Tatsächlich kann der Winkel φ nur eine reelle Funktion der Zeit t sein. Die willkürlich gebliebenen Integrationskonstanten A sind daher so zu wählen, daß der ganze Aus-

druck reell wird. Dazu müssen die A komplexe Größen sein. Setzen wir

$$e^{iq_1 t} = \cos q_1 t + i \sin q_1 t$$

und entsprechend bei den übrigen Gliedern, so erhalten wir

$$\varphi = (A_1 + A_2) \cos q_1 t + (A_1 - A_2) i \sin q_1 t$$
$$+ (A_3 + A_4) \cos q_2 t + (A_3 - A_4) i \sin q_2 t.$$

Damit dies reell wird, müssen A_1 und A_2 konjugiert komplex sein und ebenso A_3 und A_4. In reeller Form lautet daher die Lösung der Gleichung

$$\varphi = B_1 \cos q_1 t + B_2 \sin q_1 t + B_3 \cos q_2 t + B_4 \sin q_2 t, \quad (232)$$

wenn man jetzt unter den B beliebige reelle Konstanten versteht.

Man kann diese Gleichung noch ein wenig umformen, indem man

$$\varphi = C_1 \sin (q_1 t + \beta_1) + C_2 \sin (q_2 t + \beta_2) \quad (233)$$

setzt, worin die C und β die vier willkürlichen Konstanten der allgemeinen Lösung bilden. Durch Auflösung des Sinus der Winkelsumme kommt man nämlich wieder auf die vorhergehende Form.

Aus Gl. (233) geht hervor, daß sich die Schwingung des Schiffes aus der Übereinanderlagerung von zwei ungedämpften Schwingungen mit verschiedener Schwingungsdauer zusammensetzt. Für die Schwingungsdauern erhält man

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{2\pi}{q_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4a_4}\right)}} \\ T_2 &= \frac{2\pi}{q_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4a_4}\right)}} \end{aligned}\right\}. \quad (234)$$

Nun bleibt noch ψ zu ermitteln. Wir sahen vorher, daß ψ derselben Differentialgleichung vierter Ordnung genügen muß wie φ und daß es sich daher auch in derselben allgemeinen Form darstellen lassen muß. Aber die Integrationskonstanten, die dabei auftreten, sind nicht mehr willkürlich, nachdem die

von φ bereits gewählt sind, sondern sie sind von den in dem Ausdrucke für φ vorkommenden abhängig.

Wir greifen daher auf die erste der Gleichungen (225) zurück, in die wir φ so einsetzen, wie es in Gl. (230) dargestellt war. Dann erhalten wir

$$\frac{d\psi}{dt} = A_1 \frac{Qs + \alpha_1^2\theta}{Jw} e^{\alpha_1 t} + A_2 \frac{Qs + \alpha_2^2\theta}{Jw} e^{\alpha_2 t} + A_3 \frac{Qs + \alpha_3^2\theta}{Jw} e^{\alpha_3 t} + A_4 \frac{Qs + \alpha_4^2\theta}{Jw} e^{\alpha_4 t},$$

woraus durch Integration nach t

$$\psi = A_1 \frac{Qs + \alpha_1^2\theta}{\alpha_1 Jw} e^{\alpha_1 t} + A_2 \frac{Qs + \alpha_2^2\theta}{\alpha_2 Jw} e^{\alpha_2 t} + A_3 \frac{Qs + \alpha_3^2\theta}{\alpha_3 Jw} e^{\alpha_3 t} + A_4 \frac{Qs + \alpha_4^2\theta}{\alpha_4 Jw} e^{\alpha_4 t} + A_5 \tag{235}$$

folgt. Unter A_5 ist eine neue Integrationskonstante zu verstehen, die aber, wie beim Einsetzen in die zweite der Gleichungen (225) hervorgeht, gleich Null zu setzen ist.

Diese Gleichung gibt übrigens ganz allgemein den Ausdruck für ψ an, der zu dem für φ gehört, nicht nur für den ungebremsten, sondern auch für den gebremsten Kreisel. Für den ungebremsten Kreisel geht dagegen die Gleichung über in

$$\psi = A_1 \frac{Qs - q_1^2\theta}{iq_1 Jw} e^{iq_1 t} + A_2 \frac{Qs - q_1^2\theta}{-iq_1 Jw} e^{-iq_1 t} + \text{etc.}$$

Die ersten beiden Glieder lassen sich zusammenfassen und ebenso auch die beiden folgenden, die ich nicht angeschrieben habe. Man findet zunächst

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{Qs - q_1^2\theta}{q_1 Jw}\left(\frac{A_1}{i}\left(\cos q_1 t + i \sin q_1 t\right) - \frac{A_2}{i}\left(\cos q_1 t - i \sin q_1 t\right)\right) + \text{etc.},\\ &= \frac{Qs - q_1^2\theta}{q_1 Jw}\left(\frac{A_1 - A_2}{i} \cos q_1 t + (A_1 + A_2) \sin q_1 t\right) + \text{etc.},\\ &= \frac{Qs - q_1^2\theta}{q_1 Jw}\left(- B_2 \cos q_1 t + B_1 \sin q_1 t\right) + \text{etc.}\end{aligned} \tag{236}$$

Im letzten Ausdrucke sind die komplexen Konstanten A durch dieselben reellen Konstanten B ersetzt, die schon in Gl. (232) vorkamen.

Auch dieser Ausdruck läßt sich noch weiter so umformen, wie es mit φ in Gl. (233) geschehen war. Wir setzen also

$$\psi = K_1 \sin(q_1 t + \delta_1) + K_2 \sin(q_2 t + \delta_2), \tag{237}$$

und es handelt sich dann noch darum, die Konstanten K und δ in den für φ gültigen Konstanten C und β auszudrücken. Zunächst liefert der Vergleich der letzten Gleichung mit der vorhergehenden

$$\left.\begin{aligned} K_1 \cos\delta_1 &= B_1 \frac{Qs - q_1{}^2\theta}{q_1 J w} \\ K_1 \sin\delta_1 &= -B_2 \frac{Qs - q_1{}^2\theta}{q_1 J w} \end{aligned}\right\}. \tag{238}$$

Ebenso erhält man aus dem Vergleiche der beiden Gleichungen (233) und (232)

$$C_1 \sin\beta_1 = B_1 \quad \text{und} \quad C_1 \cos\beta_1 = B_2. \tag{239}$$

Hieraus folgt für die Winkel β_1 und δ_1

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{B_1}{B_2} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}\delta_1 = -\frac{B_2}{B_1}$$

und daher besteht zwischen β_1 und δ_1 die Beziehung

$$\operatorname{tg}\beta_1 \operatorname{tg}\delta_1 = -1.$$

Das ist aber die Bedingung dafür, daß sich die beiden Winkel um einen Rechten voneinander unterscheiden. Wir setzen also

$$\delta_1 = \beta_1 \pm \frac{\pi}{2}, \tag{240}$$

wobei das Vorzeichen des zweiten Gliedes zunächst unbestimmt bleibt.

Ferner erhalten wir aus den Gleichungen (238)

$$K_1{}^2 = (B_1{}^2 + B_2{}^2)\left(\frac{Qs - q_1{}^2\theta}{q_1 J w}\right)^2$$

und aus den Gleichungen (239)

$$C_1{}^2 = B_1{}^2 + B_2{}^2,$$

hiermit also

$$K_1 = \pm C_1 \frac{Qs - q_1{}^2\theta}{q_1 J w}. \tag{241}$$

Auch hier ist das Vorzeichen zunächst unbestimmt und zwar hängt die Wahl, die hier zu treffen ist, von der ab, die in Gl. (240) getroffen wird, denn wie aus Gl. (237) hervorgeht, ändert sich ψ nicht, wenn man das Vorzeichen von K_1 umkehrt und zugleich den Winkel δ_1 um zwei Rechte vergrößert oder verkleinert. Zur näheren Bestimmung der Vorzeichen können wir daher festsetzen, daß unter C_1 und K_1 stets positive Werte verstanden werden sollen, womit dann β_1 und δ_1 ihre nähere Bestimmung erhalten. Diese Wahl empfiehlt sich nämlich, weil C_1 und K_1 die Schwingungsamplituden angeben und die Formeln die einfachste Deutung erhalten, wenn man sie so einrichtet, daß die Amplituden darin durch positive Größen wiedergegeben werden. Wie das Vorzeichen des zweiten Gliedes in Gl. (240) zu diesem Zwecke zu wählen ist, ergibt sich durch Einsetzen der Werte von φ und ψ in die erste der Gleichungen (225). Diese wird unter der Voraussetzung, daß C_1 und K_1 beide positiv sein sollen, nur dann identisch erfüllt, wenn man

$$\delta_1 = \beta_1 - \frac{\pi}{2}$$

setzt. — Was bisher für die Konstanten K_1 und δ_1 besprochen wurde, läßt sich in der gleichen Weise auch auf die Konstanten K_2 und δ_2 übertragen. Man hat dann im ganzen die folgenden Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= \beta_1 - \frac{\pi}{2}, & \delta_2 &= \beta_2 - \frac{\pi}{2} \\ K_1 &= + C_1 \frac{Qs - q_1^2\theta}{q_1 Jw}, & K_2 &= + C_2 \frac{Qs - q_2^2\theta}{q_2 Jw} \end{aligned}\right\}. \qquad (242)$$

Hierbei ist noch zu bemerken, daß K_1 und K_2 nach diesen Formeln in der Tat unter der Voraussetzung eines positiven w stets positiv werden, wenn C_1 und C_2 positiv sind, da q_1 und q_2 positive Absolutbeträge bedeuteten und sich leicht unter Zurückgehen auf die Werte von q_1 und q_2 zeigen läßt, daß $q_1^2\theta$ und $q_2^2\theta$ stets kleiner als Qs bleiben muß. — Anders wäre freilich die Vorzeichenfestsetzung zu treffen, wenn der Kreisel im entgegengesetzten Sinne rotierte, also w negativ wäre. In-

dessen handelt es sich hierbei nur um einen ganz untergeordneten Punkt, auf den jetzt nicht weiter eingegangen zu werden braucht.

Durch die vorstehenden Formeln werden die Bewegungen des ganzen Verbandes unter der Voraussetzung, daß nach einem anfänglichen Anstoß, der sie hervorrief, weiter keine Störungen mehr darauf einwirken, für den Fall des ungebremsten Kreisels vollständig beschrieben. Es genügt, wenn ich daraus besonders hervorhebe, daß die Schwingungen ungedämpft sind, eine die ursprüngliche Bewegung herabmindernde Wirkung des Kreisels unter diesen Umständen daher nicht stattfindet. Ferner, daß der Einfluß des Kreisels sich nur darin geltend macht, daß die einfache harmonische Schwingung, die das Schiff ohne den Kreisel ausführen würde, durch zwei sich übereinander lagernde Schwingungen ersetzt wird, eine mit einer größeren Schwingungsdauer T_1, die man als die Hauptschwingung bezeichnen kann, und eine zweite schnellere Schwingung mit der Schwingungsdauer T_2, die die Nebenschwingung genannt werden soll.

Wählt man die Kreiselstärke nach Gl. (220), so erhält man für a_2 nach Gl. (227)

$$a_2 = \frac{Qs}{\theta} + \frac{pr}{\vartheta} + \frac{\varphi_0^2}{25}\frac{Qs}{\vartheta},$$

und da das Trägheitsmoment des Schiffes θ ganz bedeutend größer ist als die des Kreiselrahmens, ferner auch Qs in demselben Maße von höherer Größenordnung als pr ist, so folgt, daß das letzte Glied in a_2 trotz des kleinen Faktors $\frac{\varphi_0^2}{25}$ die beiden vorhergehenden unter gewöhnlichen Umständen noch ziemlich erheblich übertrifft. Hiernach folgt, daß auch a_2^2 erheblich größer ist als $4a_4$. Genau genug kann man daher in den Formeln (234) für die Schwingungsdauer

$$\sqrt{a_2^2 - 4a_4} = a_2 - \frac{2a_4}{a_2}$$

setzen und damit erhält man für T_1 und T_2

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{a_2}{a_4}},$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{a_2}{a_2^2 - a_4}} \sim 2\pi\sqrt{\frac{1}{a_2}}.$$

Für Überschlagsrechnungen lassen sich diese Näherungsformeln zum mindesten verwenden. Sie zeigen insbesondere, daß, je stärker der Kreisel gemacht wird, also je größer infolge davon a_2 wird, um so mehr T_1 größer und T_2 kleiner wird. Die Nebenschwingungen von der kurzen Schwingungsdauer T_2 würden natürlich eine sehr unliebsame Begleiterscheinung der Anwendung des Kreisels darstellen. Bei dem gebremsten Kreisel, der für die praktische Anwendung allein in Frage kommen kann, fallen sie jedoch fort.

Nachdem der Grenzfall $k = 0$ erledigt ist, müssen wir zu dem allgemeineren Falle des gebremsten Kreisels zurückkehren. Dessen Theorie ist zwar etwas verwickelter, aber sie kann doch ungefähr in derselben Weise dargestellt werden, wie wir es jetzt bei dem einfacheren Fall gesehen haben. Die Hauptschwierigkeit besteht nur darin, daß die charakteristische Gl. (229) als allgemeine Gleichung vierten Grades nicht durch eine allgemeine Formel aufgelöst werden kann, während doch, wie wir es schon an dem vorstehenden einfacheren Beispiele gesehen haben, der ganze Verlauf des Schwingungsvorganges in erster Linie von den Werten der Wurzeln dieser Gleichung abhängt. Wenn alle Koeffizienten zahlenmäßig gegeben sind, gelingt es natürlich leicht, die Gleichung durch Probieren oder nach einer Näherungsmethode aufzulösen. Diesen Weg müssen wir in der Tat schließlich beschreiten. Aber ehe dies geschieht, ist es wünschenswert, über die Eigenschaften der Wurzeln der Gleichung noch einige Betrachtungen anzustellen, die ihrer allgemeinen Gültigkeit wegen von besonderem Werte für die Theorie des Vorganges sind. Zu diesem Zwecke schiebe ich jetzt eine algebraische Untersuchung über die Wurzeln der Gleichung hier ein.

§ 44. Hilfsbetrachtungen über die Wurzeln der charakteristischen Gleichung.

In der Algebra ist man gewöhnt, die Unbekannte einer Gleichung mit dem Buchstaben x zu bezeichnen. Ich schreibe daher Gl. (229) jetzt in der Form:

$$x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0. \qquad (243)$$

Außerdem empfiehlt sich aber auch noch eine andere Bezeichnung der Koeffizienten. Es sei nämlich

$$a_1 = \frac{k}{\vartheta}, \quad b_1 = \frac{Qs}{\theta}, \quad b_2 = \frac{pr}{\vartheta}, \quad \frac{J^2 w^2}{\vartheta\theta} = c. \qquad (244)$$

Den Koeffizienten a_1 behalte ich also in der früheren Bedeutung bei, während die übrigen durch die Gleichungen (227) eingeführten Koeffizienten a jetzt durch b_1, b_2 und c ersetzt werden sollen. Die charakteristische Gleichung lautet dann

$$x^4 + a_1 x^3 + (b_1 + b_2 + c)x^2 + a_1 b_1 x + b_1 b_2 = 0. \qquad (245)$$

Der Koeffizient a_1 enthält den Faktor k, der die Stärke der angewandten Bremsung beschreibt. Bei einem bestimmt gegebenen Kreisel ist k immer noch als eine innerhalb weiter Grenzen beliebig veränderliche Größe zu betrachten. Die Einrichtung wird nämlich jedenfalls so getroffen werden, daß man durch Anziehen eines Bremshebels die Bremsung jederzeit nach Bedarf vergrößern oder verkleinern kann. Im Gegensatze dazu sind alle übrigen Koeffizienten b_1, b_2 und auch c durch den Entwurf des Kreisels in bestimmter Weise festgelegt, so daß sie nach der Ausführung nicht ohne weiteres verändert werden können.

Unter diesen Umständen ist es zweckmäßig, die Wurzeln der Gl. (245) als Funktionen des beliebig veränderlichen Koeffizienten a_1 aufzufassen und sich die Frage vorzulegen, in welcher Weise die Wurzeln und hiermit der ganze Bewegungsvorgang sich ändern, wenn man k oder a_1 verschiedene Werte beilegt.

Da alle Koeffizienten positiv sind, kann die Gleichung jedenfalls keine positive reelle Wurzel besitzen. Von den vier Wurzeln sind daher entweder alle vier komplex, oder zwei konjugiert komplex und die beiden anderen reell und negativ oder endlich sie sind alle vier reell und negativ.

Für den Fall $k = 0$, den wir bereits behandelt haben, werden alle vier Wurzeln rein imaginär. Man überzeugt sich zunächst leicht, daß in keinem anderen Falle eine rein imaginäre Wurzel vorkommen kann. Wollte man nämlich $x = iq$ setzen, so zerfiele Gl. (245) durch Trennen in die reellen und imaginären Bestandteile in zwei Gleichungen, die sich, wie die einfache Ausrechnung lehrt, widersprechen, wenn nicht einer von den Koeffizienten a_1, b_1 oder c gleich Null ist. Aber b_1 und c sind jedenfalls von Null verschieden, womit der Beweis erbracht ist.

Dagegen sind reelle negative Wurzeln bei geeigneter Wahl von a_1 jedenfalls möglich. Verstehen wir nämlich unter p_1 einen positiven Wert von beliebig gewählter Größe und setzen

$$x = -p_1,$$

so geht Gl. (245) über in

$$p_1^4 + (b_1 + b_2 + c)p_1^2 + b_1 b_2 - a_1(p_1^3 + b_1 p_1) = 0,$$

und diese Gleichung läßt sich immer durch einen positiven Wert von a_1, nämlich

$$a_1 = \frac{p_1^4 + (b_1 + b_2 + c)p_1^2 + b_1 b_2}{p_1^3 + b_1 p_1} = p_1 + \frac{(b_2 + c)p_1^2 + b_1 b_2}{p_1(p_1^2 + b_1)} \quad (246)$$

erfüllen. Der Koeffizient a_1 hat dieselbe Dimension, nämlich $\sec^{-1}$, wie x oder p_1. Man sieht, daß p_1 jedenfalls stets kleiner sein muß als das zugehörige a_1.

Ferner lassen sich unter der Voraussetzung, daß der Dämpfungsfaktor k der Pendelschwingungen klein ist, leicht Näherungsformeln für die vier Wurzeln angeben. Zu diesem Zwecke differentiieren wir Gl. (245) nach a_1, wobei eine Wurzel x der Gleichung als Funktion von a_1 aufzufassen ist. Für den

Differentialquotienten dieser Wurzel x nach a_1 erhalten wir dann

$$\frac{dx}{da_1} = -\frac{x^3 + b_1 x}{4x^3 + 3a_1 x^2 + 2(b_1 + b_2 + c)x + a_1 b_1}. \tag{247}$$

Wenn x komplex ist, trifft dies im allgemeinen auch von dem Differentialquotienten zu, während eine reelle Wurzel auch einen reellen Zuwachs erfährt, wenn man a_1 um da_1 vergrößert. Wenn der Nenner auf der rechten Seite zu Null und hiermit der Differentialquotient unendlich groß wird, läßt sich dies jedoch nicht mehr behaupten. In der Tat wird auch durch diese Bedingung die Übergangsstelle bezeichnet, bei der während des Anwachsens von a_1 eine vorher komplexe Wurzel in einen reellen Wert übergeht und dann weiterhin reell bleibt.

Wir wenden jetzt Gl. (247) auf den Fall $a_1 = 0$ an, für den früher schon festgestellt war, daß eine der Wurzeln, die wir jetzt x_1 nennen, gleich iq_1 ist. Wir erhalten dann

$$\left(\frac{dx_1}{da_1}\right)_{a_1=0} = -\frac{b_1 - q_1^2}{-4q_1^2 + 2(b_1 + b_2 + c)}.$$

Mit den Bezeichnungen des vorhergehenden Paragraphen hatte man aber

$$q_1^2 = \tfrac{1}{2}\left(a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4a_4}\right).$$

Ersetzen wir a_2 und a_4 durch die jetzt gebrauchten Koeffizienten, so erhalten wir nach einer einfachen algebraischen Umformung des Ausdrucks

$$q_1^2 = \tfrac{1}{2}\left(c + b_1 + b_2 - \sqrt{(c + b_2 - b_1)^2 + 4b_1 c}\right).$$

Damit findet man für den Differentialquotienten

$$\left(\frac{dx_1}{da_1}\right)_{a_1=0} = \frac{c + b_2 - b_1 - \sqrt{(c + b_2 - b_1)^2 + 4b_1 c}}{4\sqrt{(c + b_2 - b_1)^2 + 4b_1 c}}. \tag{248}$$

Dieselbe Rechnung läßt sich auch für die Wurzel $x_3 = iq_2$ durchführen, wobei die Bedeutung von q_2 aus

$$q_2^2 = \tfrac{1}{2}\left(a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4a_4}\right)$$

hervorgeht. Dies läßt sich auf die Form

$$q_2^2 = \tfrac{1}{2}\left(c + b_1 + b_2 + \sqrt{(c + b_2 - b_1)^2 + 4b_1 c}\right)$$

bringen und hiermit erhält man aus Gl. (247)

$$\left(\frac{dx_3}{da_1}\right)_{a_1=0} = -\frac{c+b_2-b_1+\sqrt{(c+b_2-b_1)^2+4b_1c}}{4\sqrt{(c+b_2-b_1)^2+4b_1c}}. \qquad (249)$$

Besonders zu beachten ist, daß für die Stelle $a_1 = 0$ die Differentialquotienten von x_1 und x_3 beide reell und negativ sind. Die vorher rein imaginäre Wurzel wird daher für ein kleines a_1 komplex und zwar so, daß der imaginäre Anteil unverändert geblieben ist. Bezeichnen wir einen kleinen Wert von a_1 mit a_1', so wird genau genug

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{a_1'}{4}\left(1-\frac{c+b_2-b_1}{W}\right)+i\sqrt{\tfrac{1}{2}(c+b_1+b_2-W)}\\
x_2 &= -\frac{a_1'}{4}\left(1-\frac{c+b_2-b_1}{W}\right)-i\sqrt{\tfrac{1}{2}(c+b_1+b_2-W)}\\
x_3 &= -\frac{a_1'}{4}\left(1+\frac{c+b_2-b_1}{W}\right)+i\sqrt{\tfrac{1}{2}(c+b_1+b_2+W)}\\
x_4 &= -\frac{a_1'}{4}\left(1+\frac{c+b_2-b_1}{W}\right)-i\sqrt{\tfrac{1}{2}(c+b_2+b_2+W)}
\end{aligned}\right\}, \qquad (250)$$

wobei der in den Gleichungen (248) und (249) vorkommende Wurzelwert mit W bezeichnet ist. Hierbei ist zu beachten, daß W jedenfalls größer ist, als $c + b_2 - b_1$ und kleiner als $c + b_1 + b_2$.

Für größere Werte von a_1 dürfen diese Formeln aber nicht mehr verwendet werden. Von einer Untersuchung darüber, bis zu welcher Grenze sie benutzt werden dürfen, mag ihrer Umständlichkeit wegen hier abgesehen werden; im einzelnen, zahlenmäßig gegebenen Falle läßt sich dies durch Probieren, also durch Einsetzen der Werte in die Gleichung leicht feststellen.

Die Algebra stellt verschiedene Verfahren zur Auflösung der allgemeinen Gleichung vierten Grades zur Verfügung. Über die Eigenschaften der Wurzeln läßt sich freilich aus diesen allgemeinen Lösungsverfahren nicht leicht etwas entnehmen, da die Beziehungen, die dabei in Frage kommen, zu verwickelt sind. Und für die wirkliche Auflösung einer Gleichung mit

gegebenen Zahlenkoeffizienten ist ein Näherungsverfahren kürzer und daher brauchbarer.

Indessen ist ein Auflösen durch Probieren nur dann bequem, wenn es sich um reelle Wurzeln handelt, während man im vorliegenden Falle vier oder mindestens zwei komplexe Wurzeln zu erwarten hat. Es wird daher nötig sein, hier ein Verfahren zu besprechen, das in diesem Falle bequem zum Ziele führt. Schreiben wir die Gleichung wieder in der einfachen Form

$$x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$$

und verstehen unter $x_1 x_2$ zwei konjugierte Wurzeln, falls x_1 und x_2 komplex sind, während die anderen mit x_3 und x_4 bezeichnet werden, so kann die Gleichung auch in die Form

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = 0$$

gebracht werden, woraus sich

$$(x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1 x_2)\,(x^2 - (x_3 + x_4)\,x + x_3 x_4) = 0$$

ergibt. Nun sind sowohl $x_1 + x_2$ als $x_1 x_2$ usf. auf jeden Fall reelle Werte, auch wenn x_1 und x_2 selbst komplex sind. Der Ausdruck vierten Grades läßt sich daher zum mindesten auf eine Art in zwei quadratische Faktoren mit reellen Koeffizienten zerlegen. Schreiben wir dafür jetzt

$$(x^2 + m_1 x + n_1)(x^2 + m_2 x + n_2) = 0\,, \tag{251}$$

so kommt die Aufgabe der Auflösung darauf hinaus, die reellen Größen m und n zu ermitteln, denn nachdem diese bekannt sind, folgen die Wurzeln der Gleichung vierten Grades sehr einfach durch Auflösen der beiden quadratischen Gleichungen, in die sie zerfällt. Multipliziert man aus und vergleicht die Gleichung mit der ursprünglichen Form, so findet man für die m und n die folgenden Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= m_1 + m_2 \\ a_2 &= n_1 + n_2 + m_1 m_2 \\ a_3 &= m_1 n_2 + m_2 n_1 \\ a_4 &= n_1 n_2 \end{aligned}\right\}. \tag{252}$$

Die zweite und dritte dieser Gleichungen, die für n_1 und n_2 von ersten Grade sind, lösen wir nach diesen beiden Unbekannten auf und setzen sie in die letzte Gleichung ein. Dadurch erhalten wir

$$\frac{(a_2 m_1 - m_1^2 m_2 - a_3)(a_3 + m_1 m_2^2 - a_2 m_2)}{(m_1 - m_2)^2} = a_4 .$$

Durch einfache Umformungen geht diese Gleichung über in

$$2a_2 m_1^2 m_2^2 + a_2 a_3 (m_1 + m_2) - a_2^2 m_1 m_2 - a_3 m_1 m_2 (m_1 + m_2) \\ - a_3^2 - m_1^3 m_2^3 = a_4 ((m_1 + m_2)^2 - 4 m_1 m_2) .$$

An Stelle von $m_1 + m_2$ können wir aber nach der ersten der Gleichungen (252) a_1 schreiben. Wird außerdem eine neue Unbekannte z eingeführt, nämlich

$$z = m_1 m_2 , \tag{253}$$

so geht die vorhergehende Gleichung über in

$$z^3 - 2a_2 z^2 + z(a_1 a_3 + a_2^2 - 4a_4) + (a_4 a_1^2 + a_3^2 - a_1 a_2 a_3) = 0. \tag{254}$$

Hiermit ist die Aufgabe auf die Auflösung dieser kubischen Gleichung zurückgeführt, von der es genügt, eine reelle Wurzel zu ermitteln, die ja sicher bestehen muß, und zwar handelt es sich dabei, wenn drei reelle Wurzeln bestehen sollten, um die kleinste von ihnen, die sicher zwischen 0 und $\frac{a_1}{2}$ liegen muß. Diese Auflösung kann nun durch Probieren erfolgen. Nachdem man z gefunden hat, ergeben sich m_1 und m_2 leicht aus der ersten der Gleichungen (252) und Gl. (253). Auch n_1 und n_2 werden hiermit nach der zweiten und dritten der Gleichungen (252) bekannt, worauf nur noch eine Lösung der beiden quadratischen Gleichungen zu folgen hat.

Für das Weitere ist es von Wichtigkeit, an die Stelle der Koeffizienten a in der vorhergehenden Gleichung die in den b ausgedrückten Werte einzusetzen, die ihnen in unserem Falle zukommen. Man hatte

$$a_2 = (b_1 + b_2 + c) .$$

Ferner wird

$$a_1 a_3 + a_2^2 - 4a_4 = a_1^2 b_1 + (b_1 + b_2 + c)^2 - 4 b_1 b_2 \\ = a_1^2 b_1 + (b_2 - b_1)^2 + 2c(b_1 + b_2) + c^2,$$

und da alle Koeffizienten a, b und c positive Werte hatten, ist dieser Ausdruck auf jeden Fall positiv.

Ebenso ermitteln wir

$$a_1^2 a_4 + a_3^2 - a_1 a_2 a_3 = a_1^2 b_1 b_2 + a_1^2 b_1^2 - a_1^2 b_1 (b_1 + b_2 + c)$$
$$= - a_1^2 b_1 c.$$

Die kubische Gl. (254) läßt sich hiernach schreiben

$$z^3 - 2(b_1 + b_2 + c) z^2$$
$$+ [a_1^2 b_1 + (b_2 - b_1)^2 + 2c(b_1 + b_2) + c^2] z - a_1^2 b_1 c = 0. \quad (255)$$

Das ist also die Gleichung, um deren Auflösung es sich eigentlich handelt. Ich sagte vorher, daß sie durch Probieren aufzulösen sei. Das ist aber eigentlich so zu verstehen: Für einen bestimmten Kreisel sind, wie ich schon vorher bemerkte, $b_1 b_2$ und c von vornherein gegebene Werte, während a_1 je nach dem Anziehen des Bremshebels ganz verschiedene Werte erlangen kann. Um die Wirkung der Vorrichtung zu untersuchen, ist es daher nötig, für sehr verschiedene Werte von a_1 die charakteristische Gleichung und hiermit zuvor Gl. (255) aufzulösen, um zu erkennen, wie sich ein verschieden starkes Anziehen der Bremse äußert, und besonders auch, um daraus den günstigsten Wert der Bremsung abzuleiten. Unter diesen Umständen bietet sich ohne weiteres ein sehr einfaches, mit verhältnismäßig sehr geringen Rechnungen durchführbares Verfahren dar. Man wird nämlich für z zunächst eine größere Zahl beliebig gewählter Werte annehmen und hierauf aus Gl. (255) die zugehörigen Werte von a_1 berechnen, was sehr schnell möglich ist, da in dieser Gleichung a_1 nur in der Form a_1^2 vorkommt. Auf diese Weise habe ich seinerzeit die Zahlenbeispiele durchgerechnet, mit denen ich das Verhalten eines Kreiselschiffes erläuterte.

Außerdem kann man aus Gl. (255) noch einen anderen sehr wichtigen Schluß ziehen. Diese Gleichung kann nämlich keine negative reelle Lösung besitzen. Denn wollte man z negativ annehmen, so würde nach dem, was vorher über die Vorzeichen der Koeffizienten bemerkt wurde, jedes Glied in

der Gleichung negativ ausfallen und ihre Summe könnte daher nicht Null ergeben. Hierauf ist schon bei dem vorher geschilderten probeweisen Auflösen der Gleichung Rücksicht zu nehmen. Außerdem folgt aber daraus auch, daß m_1 und m_2 beide positiv ausfallen müssen, da ihre Summe den positiven Wert a_1 und ihr Produkt den ebenfalls positiven Wert s ergibt. Löst man nun die Gleichung

$$x^2 + m_1 x + n_1 = 0$$

nach x auf, so hat man

$$x = -\frac{m_1}{2} \pm \sqrt{\frac{m_1^2}{4} - n_1}$$

und wenn die Lösung komplex ausfällt, so ist auf jeden Fall der reelle Anteil der Wurzel negativ.

Hiermit ist bewiesen, daß die charakteristische Gleichung nur solche komplexe Wurzeln haben kann, deren reeller Anteil negativ ist. Dieses Ergebnis ist für die Theorie des Schwingungsvorganges sehr wichtig, weil daraus hervorgeht, daß nur gedämpfte Schwingungen und keine solchen vorkommen können, die mit der Zeit immer mehr anwachsen. Daß auch reelle Wurzeln, wenn sie überhaupt vorkommen, ebenfalls nur negativ sein können, war schon früher auf einfachere Weise erkannt worden.

Wünschenswert wäre es ohne Zweifel, wenn über die Eigenschaften der Wurzeln noch mehr festgestellt werden könnte. Für unsere Zwecke genügt aber auch schon das, was hier besprochen wurde.

§ 45. Lösung für den gebremsten Kreisel.

Ich nehme jetzt an, daß die charakteristische Gleichung bereits gelöst sei. Für den Fall, daß sie vier komplexe Wurzeln besitzt, schreibe ich diese unter Ersetzuug des Buchstabens x durch α

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -p_1 + iq_1\\ \alpha_2 &= -p_1 - iq_1\\ \alpha_3 &= -p_2 + iq_2\\ \alpha_4 &= -p_2 - iq_2,\end{aligned}$$

so daß also nach dem, was vorher ermittelt war, unter den p und q positive Werte zu verstehen sind, die weiterhin als bereits bekannt betrachtet werden können. Die schon in Gl. (230) aufgestellte allgemeine Lösung

$$\varphi = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + A_3 e^{\alpha_3 t} + A_4 e^{\alpha_4 t}$$

geht hiermit über in

$$\varphi = e^{-p_1 t}(A_1 e^{i q_1 t} + A_2 e^{-i q_1 t}) + e^{-p_2 t}(A_3 e^{i q_2 t} + A_4 e^{-i q_2 t}).$$

Sollten jedoch zwei Wurzeln, etwa α_3 und α_4, reell gefunden sein, so sind die beiden letzten Glieder in der ursprünglichen Form stehen zu lassen. Sie geben dann einen aperiodischen Bewegungsanteil an, der mit der Zeit abklingt. Wir wollen weiterhin dahin gestellt sein lassen, ob der eine oder andere Fall vorliegt, und uns nur mit den ersten Gliedern beschäftigen, wobei wir voraussetzen, daß α_1 und α_2 sicher komplex seien. Was darauf noch folgt, deuten wir nur durch Punkte an, die im einen Falle, nämlich bei komplexen Werten von α_3 und α_4, Glieder von derselben Form wie die vorhergehenden, im anderen Falle die ursprünglichen Experimentalfunktionen bedeuten.

Durch dieselbe Umformung, die uns früher schon von Gl. (231) zu den Gleichungen (232) und (233) geführt hatte, erhalten wir jetzt für φ

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= e^{-p_1 t}(B_1 \cos q_1 t + B_2 \sin q_1 t) + \cdots \\ &= e^{-p_1 t} C_1 \sin(q_1 t + \beta_1) + \cdots \end{aligned}\right\}. \tag{256}$$

Wegen des Exponentialfaktors ist die Schwingungsbewegung jetzt gedämpft und die Größe der Dämpfung hängt von p_1 ab. Unter q_1 ist hier natürlich ein anderer Wert zu verstehen, als für den in § 43 untersuchten Fall des ungebremsten Kreisels. Zwischen den Konstanten in den verschiedenen Ausdrücken für φ besteht der Zusammenhang

$$\left.\begin{aligned} A_1 + A_2 = B_1, \quad & i(A_1 - A_2) = B_2 \\ B_1 = C_1 \sin\beta_1, \quad & B_2 = C_1 \cos\beta_1 \end{aligned}\right\}, \tag{257}$$

womit man von der einen Form leicht auf eine andere übergehen kann.

In Gl. (235) war bereits der zu einer bestimmten Lösung für φ gehörige Ausdruck von ψ allgemein aufgestellt worden, nämlich, wenn wir auch jetzt wieder die beiden letzten Glieder (außer A_5, das gleich Null war) durch Punkte andeuten

$$\psi = A_1 \frac{Qs + \alpha_1{}^2\theta}{\alpha_1 Jw} e^{\alpha_1 t} + A_2 \frac{Qs + \alpha_2{}^2\theta}{\alpha_2 Jw} e^{\alpha_2 t} + \ldots.$$

Setzen wir die hier angenommenen Werte von α_1 und α_2 ein, so geht dies nach einfacher Umrechnung über in

$$\begin{aligned}\psi = e^{-p_1 t} \cos q_1 t \Big\{ &- \frac{Qs}{Jw(p_1{}^2 + q_1{}^2)} (p_1 B_1 + q_1 B_2) \\ &+ \frac{\theta}{Jw} (-p_1 B_1 + q_1 B_2) \Big\} \\ + e^{-p_1 t} \sin q_1 t \Big\{ &- \frac{Qs}{Jw(p_1{}^2 + q_1{}^2)} (p_1 B_2 - q_1 B_1) \\ &+ \frac{\theta}{Jw} (-p_1 B_2 - q_1 B_1) \Big\} + \cdots\end{aligned}$$

Hiermit ist ψ in reeller Form dargestellt; die in den geschweiften Klammern enthaltenen Ausdrücke bilden konstante Koeffizienten, die sich aus den in der Lösung für φ vorkommenden willkürlichen Konstanten B berechnen lassen. Jedenfalls läßt sich aber ψ auch in die Form

$$\psi = e^{-p_1 t} K_1 \sin (q_1 t + \delta_1) + \ldots. \tag{258}$$

bringen und es bleibt uns jetzt nur noch die etwas mühsame Aufgabe, den Zusammenhang zwischen den Konstanten K_1 und δ_1 einerseits und den in φ vorkommenden Konstanten C_1 und β_1 andererseits klarzulegen.

Zunächst hat man

$$\left.\begin{aligned}K_1 \sin \delta_1 &= - \frac{Qs}{Jw(p_1{}^2 + q_1{}^2)} \left(p_1 B_1 + q_1 B_2\right) \\ &\qquad + \frac{\theta}{Jw} \left(- p_1 B_1 + q_1 B_2\right), \\ K_1 \cos \delta_1 &= - \frac{Qs}{Jw(p_1{}^2 + q_1{}^2)} \left(p_1 B_2 - q_1 B_1\right) \\ &\qquad - \frac{\theta}{Jw} \left(p_1 B_2 + q_1 B_1\right)\end{aligned}\right\}, \tag{259}$$

oder wenn man für B_1 und B_2 ihre Werte einsetzt,

$$\left.\begin{aligned} K_1 \sin \delta_1 &= C_1 \left\{-\frac{Qs}{Jw(p_1^2+q_1^2)} \cdot \left(p_1 \sin \beta_1 + q_1 \cos \beta_1\right) + \frac{\theta}{Jw}\left(-p_1 \sin \beta_1 + q_1 \cos \beta_1\right)\right\}, \\ K_1 \cos \delta_1 &= -C_1 \left\{\frac{Qs}{Jw(p_1^2+q_1^2)} \cdot \left(p_1 \cos \beta_1 - q_1 \sin \beta_1\right) + \frac{\theta}{Jw}\left(p_1 \cos \beta_1 + q_1 \sin \beta_1\right)\right\} \end{aligned}\right\} . \quad (260)$$

Wir entnehmen daraus $\operatorname{tg} \delta_1$ und erhalten dafür

$$\operatorname{tg} \delta_1 = -\frac{-Qs(p_1 \sin \beta_1 + q_1 \cos \beta_1) + \theta(p_1^2+q_1^2)(-p_1 \sin \beta_1 + q_1 \cos \beta_1)}{Qs(p_1 \cos \beta_1 - q_1 \sin \beta_1) + \theta(p_1^2+q_1^2)(p_1 \cos \beta_1 + q_1 \sin \beta_1)},$$

oder, wenn wir nach $\sin \beta_1$ und $\cos \beta_1$ ordnen,

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{\sin \beta_1 (Qsp_1 + p_1 \theta(p_1^2+q_1^2)) + \cos \beta_1 (Qsq_1 - q_1 \theta(p_1^2+q_1^2))}{\cos \beta_1 (Qsp_1 + p_1 \theta(p_1^2+q_1^2)) - \sin \beta_1 (Qsq_1 - q_1 \theta(p_1^2+q_1^2))}.$$

Zur Vereinfachung dieser Formel führen wir einen Winkel γ_1 ein, so daß

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{q_1 (Qs - \theta(p_1^2+q_1^2))}{p_1 (Qs + \theta(p_1^2+q_1^2))} \quad (261)$$

ist. Dividieren wir außerdem noch in der vorhergehenden Gleichung Zähler und Nenner mit $\cos \beta_1 p_1 (Qs + \theta(p_1^2 + q_1^2))$, so geht sie über in

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{\operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \gamma_1}{1 - \operatorname{tg} \beta_1 \operatorname{tg} \gamma_1}. \quad (262)$$

Nach der Formel für die Tangente einer Winkelsumme folgt aber daraus

$$\delta_1 = \beta_1 + \gamma_1 \quad (263)$$

und hiermit ist der Zusammenhang zwischen δ_1 und β_1 in der einfachsten Weise dargestellt. Der Winkel γ_1 gibt den Phasenunterschied zwischen den Schiffsschwingungen φ und den Kreiselrahmenschwingungen ψ an. Wenn die Wurzeln der charakteristischen Gleichung bekannt sind, kann er nach Gl. (261) leicht berechnet werden.

Setzt man an Stelle des Zeigers 1 den Zeiger 2, so gelten alle diese Formeln auch für den zweiten Bewegungsanteil, der

in den Gleichungen für φ und ψ durch Punkte angedeutet war, unter der Voraussetzung, daß die Wurzeln α_3 und α_4 ebenfalls komplex sind.

Es bleibt noch übrig, die Konstante K_1 zu berechnen, die die Amplitude der Kreiselrahmenschwingung zur Zeit $t = 0$ angibt. Wir quadrieren dazu die Gleichungen (260) und addieren sie zueinander. Nach Durchführung der Ausrechnung, bei der sich viele Glieder teils zusammenziehen, teils gegeneinander wegheben lassen, finden wir

$$K_1^2 = \frac{C_1^2}{J^2 w^2}\left\{\frac{Q^2 s^2}{p_1^2 + q_1^2} + \theta^2 (p_1^2 + q_1^2) + \frac{2\,Q s \theta}{p_1^2 + q_1^2}\left(p_1^2 - q_1^2\right)\right\}; \quad (264)$$

K_1 selbst erhalten wir daraus durch Ausziehen der Quadratwurzel. Es fragt sich aber noch, ob dieser Wurzel das positive oder negative Vorzeichen beizulegen ist. Dies hängt damit zusammen, welchen Wert wir dem Winkel γ_1 geben. Von γ_1 ist durch Gl. (261) nur die Tangente eindeutig bestimmt. Diese ändert sich aber nicht, wenn man den Winkel γ_1 um zwei Rechte vermehrt oder vermindert. Setzt man dagegen in Gl. (258) den um zwei Rechte vergrößerten oder verkleinerten Winkel ein, so kehrt sich das Vorzeichen des Gliedes um. Es steht uns daher frei, entweder über das Vorzeichen von K_1 eine beliebige Festsetzung zu machen und den Winkel γ_1 dem entsprechend zu wählen oder umgekehrt zu verfahren. Es verhält sich damit genau so wie bei der in § 43 für den ungebremsten Kreisel durchgeführten Vorzeichenbestimmung.

Wie damals werden wir auch hier zunächst voraussetzen, daß w positiv ist, der Kreisel also von oben gesehen im Uhrzeigersinne umläuft, und dann verlangen, daß K_1 einen positiven Wert erhalte. Die nähere Bestimmung des Winkels γ_1 oder δ_1 ergibt sich hierauf durch Einsetzen der Werte von φ und ψ aus den Gleichungen (256) und (258) in die erste der Bewegungsgleichungen (225). Dies gestattet zugleich eine willkommene Probe für die Richtigkeit der vorhergehenden Rechnungen. Schreibt man hierbei an Stelle von $\sin(q_1 t + \delta_1)$ nach Gl. (263) $\sin(q_1 t + \beta_1 + \gamma_1)$ und entwickelt dies als Sinus der Summe

der Winkel $(q_1 t + \beta_1)$ und γ_1, so zerfällt nach Einsetzen der Werte Gl. (225) in zwei Gleichungen, die man nach $\sin\gamma_1$ und $\cos\gamma_1$ auflösen kann. Dadurch erhält man

$$\left.\begin{aligned}\sin\gamma_1 &= -\frac{C_1 q_1}{J w K_1 (p_1^2 + q_1^2)}\left(Qs - \theta(p_1^2 + q_1^2)\right)\\ \cos\gamma_1 &= -\frac{C_1 p_1}{J w K_1 (p_1^2 + q_1^2)}\left(Qs + \theta(p_1^2 + q_1^2)\right)\end{aligned}\right\} \qquad (265)$$

in Übereinstimmung mit Gl. (261). Es kommt hiernach auf das Vorzeichen des Ausdrucks $(Qs - \theta(p_1^2 + q_1^2))$ oder mit anderen Worten auf das Vorzeichen von $\operatorname{tg}\gamma_1$ an, denn $\cos\gamma_1$ ist auf jeden Fall negativ. Wenn $\operatorname{tg}\gamma_1$ positiv und hiermit $\sin\gamma_1$ negativ wird, ist γ_1, wenn es positiv sein soll, ein Winkel im dritten Quadranten. Es ist aber zweckmäßiger, bei der Angabe eines Phasenunterschieds nur Winkel zu verwenden, die kleiner als zwei Rechte sind. Wenn wir uns diesem Brauche anschließen, haben wir daher γ_1 in diesem Falle als einen negativen stumpfen Winkel zu betrachten.

Im entgegengesetzten Falle, wenn also $\operatorname{tg}\gamma_1$ negativ wird, ist $\sin\gamma_1$ positiv und γ_1 wird ein positiver stumpfer Winkel. Im Grenzfalle, also wenn $\operatorname{tg}\gamma_1$ zu Null wird, ist es gleichgültig, ob man γ_1 gleich plus oder minus zwei Rechten setzt.

Ich habe diese Vorzeichenbestimmung hier vollständig durchgeführt, obschon praktisch daran nichts weiter gelegen ist.

Schließlich bemerke ich noch, daß auch diese Formeln nach Vertauschung des Zeigers 1 mit dem Zeiger 2 ohne weiteres auch auf den zweiten Schwingungsanteil, also die „Nebenschwingung“ angewendet werden dürfen, falls die Dämpfung nicht groß genug ist, um diese Bewegung aperiodisch zu machen.

§ 46. Die günstigste Aufhängung des Kreisels.

Die vorausgehenden Rechnungen gestatten schon einen ziemlich weitgehenden Überblick über die Wirkung, die man sich von einem Schiffskreisel versprechen darf, und auf die näheren Umstände, die darauf Einfluß nehmen. Denn grundlegend für die Beurteilung dieser Wirkung wird ja vor allem

das Verhalten der Vorrichtung sein müssen, für den Fall, daß das Schiff durch eine vorübergehende größere Welle einen Anstoß erfahren hat und hierauf kurze Zeit in vergleichsweise ruhigerem Wasser sich selbst überlassen wird.

Wir können aber jetzt auf die von solchen besonderen Voraussetzungen ganz unabhängigen allgemeinen Betrachtungen in § 41 zurückkommen, die zur Festsetzung der für ein gegebenes Schiff erforderlichen Kreiselstärke geführt hatten. Bei diesen Betrachtungen war ausdrücklich vorausgesetzt worden, daß eine Einrichtung getroffen werden könne, die eine möglichst günstige Ausnützung des Kreisels herbeiführe. Der Kreisel wird aber am günstigsten ausgenutzt, wenn er stets in solcher Richtung schwingt, daß sich das von ihm auf das Schiff übertragene Kräftepaar der Schwingungsbewegung des Schiffes fortwährend widersetzt. Kehrt also das Schiff nach Vollendung eines Schwingungswegs die Richtung seiner Drehbewegung um, so muß zur gleichen Zeit auch der Kreiselrahmen seine Bewegungsrichtung umkehren, so daß auch auf dem folgenden Schwingungswege der Kreisel abermals hemmend auf die Schiffsbewegung einwirken kann. Hat man dies erreicht, so wirkt der Kreisel auf das Schiff genau so, als wenn die Schiffsschwingungen selbst fortwährend abgebremst würden.

Nun haben wir im vorhergehenden Paragraphen den Phasenunterschied γ berechnet, der zwischen den Schwingungen des Schiffes und des Kreiselrahmens eintritt, wenn das Schiff bei beliebig gegebenem Anfangszustande weiterhin in ruhigem Wasser sich selbst überlassen wird. Wenn der Kreisel nicht gebremst wird, ist der Phasenverschiebungswinkel γ ein Rechter, was schon in § 43 erkannt wurde und auch aus den allgemeineren Formeln von § 45 folgt. Das ist für die Ausnutzung des Kreisels besonders ungünstig. Denn es trifft sich dabei so, daß der Kreiselrahmen die Bewegungsrichtung umkehrt, wenn das Schiff gerade durch die Mittellage hindurchgeht, so daß für beide Hälften des Schwingungswegs die Drehrichtung des vom Kreisel ausgeübten Kräftepaars entgegengesetzt gerichtet ist, also für die eine Hälfte im günstigen oder

der Bewegung des Schiffes entgegengesetzten, für die andere Hälfte dagegen im ungünstigen Sinne geht. Die Folge ist daher auch, wie uns schon die Rechnungen über den ungebremsten Kreisel lehrten, daß die Schiffsschwingungen überhaupt nicht gedämpft, sondern nur etwas verzögert werden, so daß die Schwingungsdauer dadurch vergrößert wird.

Ganz anders ist es beim gebremsten Kreisel und zwar können wir hier leicht den günstigsten Zustand erreichen, bei dem Kreiselrahmen und Schiff in gleicher Phase schwingen, so daß beide gleichzeitig die Bewegungsrichtung umkehren und auch gleichzeitig durch die Mittellage hindurchgehen. Wir brauchen nur dafür zu sorgen, daß $\operatorname{tg} \gamma_1$ in Gl. (261) oder $\sin \gamma_1$ in Gl. (265) zu Null wird.

Ich sagte, daß das Schiff dann in gleicher Phase mit dem Kreiselrahmen schwinge, und halte dies auch für die beste Ausdrucksweise. Ich darf aber nicht unterlassen, hinzuzufügen, daß unter der Voraussetzung eines positiven w der Winkel γ_1 nach den Betrachtungen des vorhergehenden Paragraphen gleich zwei Rechten wird. Wer dies zugleich mit hervorheben will, wird daher vorziehen, zu sagen, daß der Kreiselrahmen bei seinen Schwingungen gegen die des Schiffes um 180^0 in der Phase zurückbleibe. Aber man muß bedenken, daß diese Aussage nur so lange richtig ist, als w einen positiven Wert behält. Wenn der Kreisel im entgegengesetzten Sinne umläuft, ist der Winkel γ_1 vielmehr gleich Null zu setzen. Ich ziehe daher vor, schon immer dann zu sagen, der Kreisel sei in gleicher Phase mit dem Schiffe, wenn beide nur überhaupt zur gleichen Zeit die Bewegungsrichtung umkehren und hiermit auch zur gleichen Zeit durch die Mittellage gehen. Allerdings kann dies auf zwei verschiedene Arten geschehen, entweder so, daß der Kreisel die Schiffsschwingung fortwährend schwächt, oder so, daß er sie fortwährend verstärkt. Aber der letzte Fall kann, wie sofort aus dem Satze von der lebendigen Kraft hervorgeht, niemals von selbst eintreten; es müßte vielmehr eine arbeitsleistende äußere Kraft an dem Kreiselrahmen angebracht werden, die ihn zu solchen Schwingungen zwingt.

Eine bremsende Kraft, zu deren Überwindung Arbeit verbraucht wird, kann dagegen nur solche Schwingungen zur Folge haben, die zu einer Verminderung der lebendigen Kraft des schwingenden Schiffes führen.

Die Bedingung für die günstigste Wirkung des Kreisels wird also einfach durch die Gleichung

$$p_1^2 + q_1^2 = \frac{Qs}{\theta} \tag{266}$$

ausgesprochen. Um zu erkennen, was sich aus dieser Gleichung weiter schließen läßt, gehe ich auf die Betrachtungen in § 44 über die Wurzeln der charakteristischen Gleichung zurück. Der eine der beiden quadratischen Faktoren, in die sich diese zerlegen ließ, kann jetzt

$$(x + p_1 - iq_1)(x + p_1 + iq_1)$$

geschrieben werden, woraus durch Ausmultiplizieren

$$(x^2 + 2p_1 x + p_1^2 + q_1^2)$$

folgt. Die in Gl. (251) mit m_1 und n_1 bezeichneten Koeffizienten sind daher hier

$$m_1 = 2p_1, \quad n_1 = p_1^2 + q_1^2. \tag{267}$$

Auch die beiden anderen Wurzeln der charakteristischen Gleichung lassen sich in der Form

$$x_3 = -p_2 + iq_2, \quad x_4 = -p_2 - iq_2$$

darstellen und zwar auch dann, wenn beide Wurzeln reell sein sollten. Man muß sich zu diesem Zwecke nur vorbehalten, daß q_2 nicht notwendig reell sein soll, sondern auch einen rein imaginären Wert darstellen kann. Dann hat man für die in Gl. (251) vorkommenden Koeffizienten m_2 und n_2 hier

$$m_2 = 2p_2, \quad n_2 = p_2^2 + q_2^2 \tag{268}$$

zu setzen. Auf jeden Fall ist dann auch n_2 reell. Für die m und n bestehen die Gleichungen (252), die hier unter Ersatz der Koeffizienten a durch die b und c nochmals zusammengestellt werden sollen. Man hat

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= m_1 + m_2 \\ b_1 + b_2 + c &= n_1 + n_2 + m_1 m_2 \\ a_1 b_1 &= m_1 n_2 + m_2 n_1 \\ b_1 b_2 &= n_1 n_2 \end{aligned}\right\}. \tag{269}$$

Zu diesen tritt jetzt neu hinzu die durch Gl. (266) ausgesprochene Bedingung, wofür man auch kürzer

$$n_1 = b_1 \tag{270}$$

schreiben kann. Damit folgt aber aus der letzten der Gleichungen (269)

$$n_2 = b_2 \tag{271}$$

und weiter aus der zweiten der Gleichungen (269)

$$m_1 m_2 = c. \tag{272}$$

Die erste und dritte dieser Gleichungen lauten hiermit

$$a_1 = m_1 + m_2,$$
$$a_1 b_1 = m_1 b_2 + m_2 b_1$$

und damit beide zugleich erfüllt seien, müßte entweder $m_1 = 0$ sein, was aber wegen der Gleichung $m_1 m_2 = c$ nicht zutreffen kann, oder es muß

$$b_1 = b_2 \tag{273}$$

sein. **Das ist also die Bedingung, die wir bei der Konstruktion des Kreisels erfüllen müssen, um ihm die günstigste Wirkung zu sichern.** Erinnert man sich der durch die Gleichungen (244) ausgesprochenen Bedeutung der Koeffizienten b_1 und b_2, so lautet die vorhergehende Gleichung

$$\frac{Qs}{\Theta} = \frac{pr}{\vartheta}. \tag{274}$$

Durch geeignete Wahl von r, also des Abstandes zwischen Kreiselschwerpunkt und Aufhängeachse, kann dieser Gleichung stets leicht genügt werden.

Man kann dieser Gleichung noch einen anderen sehr anschaulichen Ausdruck geben. Die Schwingungsdauer T_0 für das Schiff ohne Kreisel (oder mit festgestelltem Kreisel) ist nämlich

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{Qs}}$$

und eine Gleichung von derselben Form gilt auch für die Schwingungsdauer des Kreisels für den Fall, daß das Schiff festgehalten ist oder daß der Kreisel nicht rotiert. Die vorhergehende Gleichung sagt daher aus, daß der Kreisel, um ihm seine günstigste Wirkung zu sichern, jedenfalls so aufgehängt werden muß, daß beide Schwingungsdauern einander gleich werden.

Nachdem dies bekannt ist, wird man bei weiteren Ausführungen des Schiffskreisels dieser Forderung voraussichtlich stets genügen. Abgesehen von der ersten Ausführung auf dem „Seebär", bei der dieses Ergebnis der Theorie noch nicht vorlag, hat man in der Tat auch bisher schon die theoretisch günstigste Aufhängung angewendet. Für die weitere Ausarbeitung der Theorie kann ich mich daher von hier ab darauf beschränken, die Erfüllung dieser Bedingung vorauszusetzen.

Hierdurch werden die Rechnungen erheblich erleichtert, denn für diesen besonderen Fall läßt sich die charakteristische Gleichung in sehr einfacher Weise auflösen. Aus

$$m_1 + m_2 = a_1 \quad \text{und} \quad m_1 m_2 = c$$

folgt nämlich

$$m_1 = \tfrac{1}{2}\left(a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4c}\right), \quad m_2 = \tfrac{1}{2}\left(a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4c}\right).$$

Daraus erkennen wir zunächst, daß die Bedingung $b_1 = b_2$, wofür in der Folge kürzer b geschrieben werden kann, für sich allein noch nicht ausreicht, um das gewünschte Verhalten des Kreisels herbeizuführen. Dazu gehört vielmehr außerdem noch, daß a_1 mindestens so groß gewählt werden muß, daß m_1 und m_2 nach den vorstehenden Formeln reell ausfallen. Die Bremsung muß also mindestens so stark gewählt werden, daß

$$a_1^2 \geqq 4c \tag{275}$$

wird. Wir setzen weiterhin voraus, daß auch diese notwendige Bedingung für die günstigste Ausnützung der Vorrichtung erfüllt sei. Erinnert man sich der aus den Gleichungen (244) hervorgehenden Bedeutung von a_1 und c, so lautet die Bedingung

$$k \geqq 2Jw\sqrt{\frac{\vartheta}{\theta}}. \tag{276}$$

Für p_1 und p_2 haben wir nunmehr

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \tfrac{1}{2}\left(a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4c}\right) \\ p_2 &= \tfrac{1}{2}\left(a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4c}\right) \end{aligned}\right\}. \tag{277}$$

Nachdem p_1 und p_2 bekannt sind, folgen auch q_1 und q_2 aus den Gleichungen (267) und (268), nämlich

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \sqrt{b - \tfrac{1}{2}\left(a_1^2 - 2c - a_1\sqrt{a_1^2 - 4c}\right)} \\ q_2 &= \sqrt{b - \tfrac{1}{2}\left(a_1^2 - 2c + a_1\sqrt{a_1^2 - 4c}\right)} \end{aligned}\right\}. \tag{278}$$

Wegen der Bedingung (275) sind q_1 und q_2 entweder reell oder rein imaginär. Wir wollen zunächst voraussetzen, daß sie beide reell seien. Dann bestehen die beiden durch die Zeiger 1 und 2 unterschiedenen Bewegungsanteile aus Schwingungen und für die Schwingungsdauern T_1 und T_2 erhält man

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{2\pi}{q_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{b - \tfrac{1}{2}\left(a_1^2 - 2c - a_1\sqrt{a_1^2 - 4c}\right)}} \\ T_2 &= \frac{2\pi}{q_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{b - \tfrac{1}{2}\left(a_1^2 - 2c + a_1\sqrt{a_1^2 - 4c}\right)}} \end{aligned}\right\}. \tag{279}$$

Bemerkenswert ist, daß hiernach die Schwingungsdauer T_2 auf jeden Fall größer ausfällt als die Schwingungsdauer T_1 der „Hauptschwingung". Das kommt von der sich bei dem zweiten Bewegungsanteile stärker aussprechenden großen Dämpfung her, die wir bei der Ableitung der Formeln gemäß der Bedingung (275) vorausgesetzt haben. Hierdurch werden die „Nebenschwingungen" von vornherein unschädlich gemacht. Wenn a_1 groß genug ist, wird aber überdies q_2 imaginär, womit die Nebenschwingung als solche vollständig wegfällt, indem sie durch einen stark gedämpften aperiodischen Bewegungsanteil ersetzt wird. — Daß übrigens der mit dem Zeiger 1 versehene Bewegungsanteil mit Recht als die „Hauptschwingung", der mit 2 versehene als die „Nebenschwingung" bezeichnet wurde, wird sich aus dem Folgenden noch ergeben.

Wann q_2 imaginär wird, erkennt man leicht, indem man beachtet, daß a_1^2 mindestens gleich $4c$ sein muß. Setzen wir nun diesen kleinst-zulässigen Wert von a_1^2 ein, so geht q_2 über in

$$q_2 = \sqrt{b - \frac{c}{4}}$$

und schon dieser Wert wird imaginär, wenn

$$c > 4b$$

ist. Mit Rücksicht auf die Bedeutung von b und c läßt sich dafür schreiben:

$$\frac{J^2 w^2}{\vartheta \theta} > 4 \frac{Qs}{\theta} \quad \text{oder auch} \quad Jw > 2\sqrt{Qs\vartheta}.$$

Nun wird man aber die Kreiselstärke Jw nach Gl. (220) gewählt haben, nämlich

$$Jw = \frac{\varphi_0}{5}\sqrt{Qs\theta} = \frac{\varphi_0}{5} \cdot \sqrt{\frac{\theta}{\vartheta}}\ \sqrt{Qs\vartheta}.$$

Setzen wir diesen Wert in die vorhergehende Ungleichung ein, so geht sie über in

$$\frac{\varphi_0}{5}\sqrt{\frac{\theta}{\vartheta}} > 2.$$

Das Trägheitsmoment θ des Schiffes dürfte aber in der Regel zum mindesten etwa tausendmal größer sein als das Trägheitsmoment ϑ des Kreiselrahmens. Voraussichtlich wird daher die Bedingung erfüllt und hiernach q_2 bei dem schon aus andern Gründen geforderten kleinst-zulässigen Werte von a_1 imaginär sein, zum mindesten aber ist man von der Grenze, an der die Bedingung erfüllt wird, nicht weit entfernt. Für eine wesentlich stärkere Bremsung wird aber q_2 jedenfalls imaginär. Wir brauchen uns daher um die Nebenschwingung nicht weiter zu kümmern.

Dagegen kann q_1 bei größeren Werten von a_1 nicht imaginär werden, sondern nur bei kleinen. Um uns davon zu überzeugen, differentiieren wir die aus Gleichung (278) hervorgehende Gleichung

$$q_1^2 = b - \frac{1}{8}\left(a_1^2 - 2c - \sqrt{(a_1^2 - 2c)^2 - 4c^2}\right)$$

nach a_1, wodurch wir

$$\frac{dq_1^2}{da_1} = -\frac{1}{8}\,2a_1\left(1 - \frac{a_1^2 - 2c}{\sqrt{(a_1^2 - 2c)^2 - 4c^2}}\right)$$

erhalten. Nun ist der Bruch in der Klammer, da der Nenner kleiner ist als der Zähler, sicher größer als Eins und hieraus folgt, daß der Differentialquotient bei jedem Wert von a_1 positiv ist. Für den kleinst-zulässigen Wert von a_1^2 ist freilich

$$q_1^2 = b - \frac{c}{4}$$

d. h. q_1 fällt dann mit q_2 zusammen und kann daher unter diesen Umständen sehr wohl imaginär sein. Trifft dies zu, so entfällt auch die erste Hauptschwingung und wir haben nur noch zwei aperiodische Bewegungsanteile. Sobald aber die Bremsung verstärkt wird, erhalten wir positive Werte von q_1^2, die dann bei weiter wachsendem a_1 immer größer werden. Die Schwingungsdauer der Hauptschwingung nimmt daher immer mehr ab, je mehr wir, von dem kleinstzulässigen Werte ab gerechnet, die Bremsung verstärken.

Lassen wir schließlich a_1 so groß werden, daß es in der Grenze als unendlich groß angesehen werden kann, so wird

$$a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4c} = \frac{2c}{a_1} = 0$$

und hiermit erhalten wir $p_1 = 0$, während q_1^2 übergeht in b. Die Hauptschwingung ist dann nicht mehr gedämpft und die Schwingungsdauer T_1 stimmt überein mit der des Schiffes ohne Kreisel. Bei allzustarker Bremsung wird also der Kreisel, wie auch von vornherein zu erwarten war, ganz wirkungslos.

Diese Betrachtung liefert übrigens zugleich den Nachweis dafür, daß in der Tat der mit dem Zeiger 1 versehene Bewegungsanteil als die „Hauptschwingung“ anzusehen ist gegenüber dem mit 2 bezeichneten.

Wir untersuchen weiter, in welcher Weise die Dämpfung der Hauptschwingung von der Stärke der Bremsung, also von a_1 abhängt. Zu diesem Zwecke differentiieren wir p_1 in Gl. (277) nach a_1 und erhalten

$$\frac{dp_1}{da_1} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 - 4c}}\right).$$

Das zweite Glied in der Klammer ist aber jedenfalls ein unechter Bruch und daher folgt, daß der Differentialquotient stets negativ ist. Je stärker wir die Bremse über das früher als mindestens erforderlich nachgewiesene Maß hinaus anziehen, desto mehr nimmt daher die Dämpfung der Hauptschwingung ab.

Diese Betrachtungen führen übereinstimmend zu dem Schlusse, als günstigste Bremsstärke den Wert

$$k = 2Jw\sqrt{\frac{\vartheta}{\theta}} \qquad (280)$$

anzusehen. Dabei ist aber auf einen sehr wichtigen Umstand noch nicht geachtet, auf den wir jetzt den Blick richten müssen, nämlich auf das Verhältnis zwischen den Schwingungsweiten des Kreiselpendels und des Schiffes.

In Gleichung (264) hatten wir bereits die Amplitude K_1 der Hauptschwingung des Kreiselrahmens berechnet, die zu einer gegebenen Amplitude C_1 der Schiffsschwingung gehört, beide auf den Anfang der Bewegung zur Zeit $t = 0$ bezogen. Wir übernehmen diese Gleichung und beachten dabei, daß jetzt

$$p_1^2 + q_1^2 = b = \frac{Qs}{\theta}$$

zu setzen ist. Dann geht sie zunächst über in

$$K_1^2 = \frac{C_1^2}{J^2w^2}\left\{\frac{Q^2s^2}{b} + \theta^2 b + \frac{2Qs\theta}{b}(2p_1^2 - b)\right\}$$

und wenn man den Wert von b einsetzt, vereinfacht sie sich zu

$$K_1 = \frac{C_1}{Jw} 2\theta p_1 \qquad (281)$$

oder wenn man p_1 aus Gleichung (277) entnimmt

$$K_1 = \frac{C_1}{Jw}\frac{\theta}{2}\left(a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4c}\right). \qquad (282)$$

Wählt man die Bremsstärke so, wie es Gl. (280) entspricht, also so daß $a_1^2 = 4c$ wird, so geht die Gleichung über in

$$K_1 = C_1 \frac{\theta a_1}{2Jw} = C_1 \frac{\theta \sqrt{c}}{Jw}$$

oder bei Einsetzen des Wertes von c aus den Gleichungen (244)

$$K_1 = C_1 \sqrt{\frac{\theta}{\vartheta}}.$$

Hieraus erkennt man, daß K_1 bedeutend größer wird als C_1. Nehmen wir schätzungsweise $\theta = 1000\,\vartheta$ an, so ist der Ausschlag des Kreiselrahmens unter den hier betrachteten Umständen mehr als 30mal so groß als der Ausschlag der Schiffsschwingungen. Die besonders starke Wirkung des Kreisels auf das Schiff für den durch Gleichung (280) angegebenen Wert der Bremsung erklärt sich demnach daraus, daß die Bremsung einerseits groß genug ist, um ein Schwingen des Kreiselrahmens in gleicher Phase mit dem Schiffe herbeizuführen, und andererseits doch noch klein genug, um starke Ausschläge des Kreisels nicht zu verhindern.

Aber zugleich ergibt sich, daß man mit diesem verhältnismäßig kleinen Werte von k bei stärker bewegter See nicht auskommen kann. Die Ausschläge des Kreiselrahmens würden schon bald größer werden, als es zulässig erscheint. Man muß daher, um sie in den zulässigen Grenzen zu halten, die Bremse stärker anziehen, als es Gl. (280) entspricht. Damit sinkt freilich der Wert p_1, von dem die Dämpfung der Schiffsschwingungen abhängt, und zugleich wird auch die Schwingungsdauer verkleinert. Das Verhältnis von K_1 und C_1 ist, wie aus Gl. (281) hervorgeht, proportional mit p_1 und wenn K_1 nicht allzuviel größer werden soll als C_1, muß man sich auch mit einem kleineren Werte von p_1 zufriedengeben.

Wenn a_1^2 bedeutend größer ist als $4c$, erhält man durch Entwickeln in eine Reihe

$$\sqrt{a_1^2 - 4c} = a_1 - \frac{2c}{a_1} - \frac{2c^2}{a_1^3} - \cdots$$

und hiernach, wenn man die weiteren Glieder vernachlässigt,

$$p_1 = \frac{c}{2a_1}\left(1 + \frac{c}{a_1^2}\right),$$

womit

$$\frac{K_1}{C_1} = \frac{\theta}{Jw}\frac{c}{a_1}\left(1 + \frac{c}{a_1^2}\right)$$

gefunden wird. Setzt man für a_1 und c ihre Werte ein, so geht dies über in

$$p_1 = \frac{J^2 w^2}{2k\theta}\left(1 + \frac{J^2 w^2 \vartheta}{k^2\theta}\right),$$

$$\frac{K_1}{C_1} = \frac{Jw}{k}\left(1 + \frac{J^2 w^2 \vartheta}{k^2\theta}\right).$$

Die letzten Glieder in den Klammern können für den Zweck einer Überschlagsrechnung vernachlässigt werden.

Meiner Schätzung nach wird es für den Betrieb des Kreisels bei starkbewegter See gewöhnlich ausreichen, die Bremse so stark anzuziehen, daß K_1 noch 10mal so groß wie C_1 ist, d. h.

$$k = 0{,}1\,Jw \tag{284}$$

zu wählen. Dann wird das zugehörige p_1

$$p_1 = 5\,\frac{Jw}{\theta}.$$

Hat man die Kreiselstärke nach Gleichung (220), nämlich

$$Jw = \frac{\varphi_0}{5}\sqrt{Qs\theta}$$

gewählt, so geht p_1 für diesen Fall über in

$$p_1 = \varphi_0\sqrt{\frac{Qs}{\theta}}$$

oder, wenn man die Schwingungsdauer T_0 des Schiffes bei festgestelltem Kreisel einführt,

$$p_1 = \frac{2\pi}{T_0}\,\varphi_0.$$

In den Formeln (256) und (258) für φ und ψ kam der Exponentialfaktor $e^{-p_1 t}$ vor und wir wollen uns jetzt überlegen, welchen Wert er annimmt nach einer Zeit T_0, während

deren das kreisellose Schiff eine volle Schwingung auszuführen vermag. Man hat dafür

$$e^{-p_1 T_0} = e^{-2\pi\varphi_0}.$$

Hatte man z. B. bei der Berechnung der Kreiselstärke $\varphi_0 = 18^0$ gewählt, so ist $\pi\varphi_0$ rund gleich Eins und man erhält

$$e^{-p_1 T_0} = e^{-2} = 0,135.$$

Die Dämpfung der Schiffsschwingungen ist daher immer noch so stark, daß die Amplitude während der Zeit T_0 auf weniger als ein Siebentel des ursprünglichen Betrages abnimmt. Die Notwendigkeit, die Bremse stärker anzuziehen, als es der sonst günstigsten Arbeitsweise entspricht, um die Ausschläge des Kreiselrahmens in den zulässigen Grenzen zu halten, schließt daher nicht aus, daß doch noch eine sehr ausgiebige Dämpfung bestehen bleibt.

§ 47. Schlußfolgerungen für die praktische Ausführung.

Die vorhergehenden Rechnungen liefern zwar viele wertvolle Fingerzeige für den Entwurf eines Schiffskreisels. Aber man darf andererseits die praktische Bedeutung der Einzelergebnisse auch nicht überschätzen. — Gewiß darf man von einer Theorie verlangen und erwarten, daß sie richtig durchgeführt sei, und man wird sich in dieser Erwartung im vorliegenden Falle auch nicht enttäuscht finden. Das bezieht sich aber nur auf die folgerichtige Durchführung der Betrachtung auf Grund der gewählten Voraussetzungen. Eine ganz andere Frage ist es, ob diese Voraussetzungen selbst geschickt genug gewählt sind, so daß sie die wesentlichsten Züge des ganzen Vorgangs richtig wiedergeben, und ob nichts dabei außer acht gelassen wurde, was von erheblichem Einflusse auf den Erfolg sein könnte.

Darüber kann endgültig nur die Erfahrung entscheiden. Soweit Erfahrungen mit dem Schiffskreisel bisher vorliegen, oder soweit wenigstens als ich davon Kenntnis erhalten habe, darf man in ihnen wohl eine Bestätigung für die von mir getroffenen Voraussetzungen erblicken. Immerhin sind die bis jetzt gemachten Erfahrungen noch nicht so ausgedehnt, daß

sich schon sicher entscheiden ließe, ob die von mir aufgestellte Theorie sehon umfassend genug ist, oder ob sie noch einer weiteren Ergänzung bedarf.

Unter diesen Umständen halte ich es für nötig, ausdrücklich zu betonen, daß ich selbst den Gegenstand mit den eingehenden Berechnungen der vorhergehenden Paragraphen noch nicht als vollkommen erledigt ansehe. Ich füge hinzu, daß ich mir aus dem gleichen Grunde auch von einer Fortführung der Rechnung auf der gleichen Grundlage, die etwa für den Fall der erzwungenen Schwingungen des Schiffes unter dem Einflusse eines periodisch wechselnden Momentes äußerer Kräfte leicht erfolgen könnte, einstweilen nicht viel zu versprechen vermag.[1])

Als ausschlaggebend für praktische Zwecke müssen vielmehr meiner Ansicht nach solche Erwägungen von allgemeinerer Art betrachtet werden, wie ich sie in § 41 begonnen habe. Später hat sich gezeigt, daß sich der in § 41 vorangestellten Voraussetzung, daß es möglich sein würde, den Schiffskreisel in der günstigsten Weise auszunützen, zum mindesten unter den einfachen Bedingungen, für die die Rechnung durchgeführt wurde, stets genügen läßt. Um dieses Ziel auch unter verwickelteren Umständen zu erreichen, wird es freilich nötig sein, daß die Bedienung des Kreisels einem besonderen Steuermann anvertraut wird, der schon eine gewisse Übung darin erlangt

---

[1]) Hierbei erwähne ich, daß Herr R. Malmström eine Abhandlung über die Theorie des Schiffskreisels in den Acta Societatis scientiarum Fennicae, Bd. 35, Helsingfors, 1907, veröffentlicht hat, worin er den Fall behandelt, daß das Schiff seitwärts von regelmäßig wiederkehrenden Wellen getroffen wird. In dem Hauptteile dieser Arbeit wird freilich angenommen, daß der Kreisel nicht gebremst sei. Am Schlusse wird indessen auch der gebremste Kreisel kurz behandelt. Auf die Eigenschwingungen wird dabei nicht eingegangen, sondern nur auf die erzwungenen Schwingungen, die zu diesen hinzutreten. Ich habe mich nicht davon überzeugen können, daß in dieser Arbeit ein für die Praxis bedeutsamer Fortschritt gegenüber der von mir früher gegebenen Theorie zu erblicken sei, glaube vielmehr an meiner Behandlung in dem ihr hier gegebenen Umfange festhalten zu sollen, solange nicht durch die Erfahrungen eine Änderung nahegelegt wird.

hat, durch rechtzeitiges Anziehen und Nachlassen der Bremse am Kreiselrahmen dafür zu sorgen, daß der Kreisel stets möglichst in gleicher Phase mit dem Schiff schwingt und dabei nicht zu kleine Ausschläge macht. Dann wird der Kreisel gut ausgenützt und der Erfolg in der Bekämpfung der Rollbewegungen kann nicht ausbleiben.

Diese Betrachtung überragt an praktischer Bedeutung alle Rechnungen, die man über das Verhalten des Kreisels unter besonderen Umständen anstellen kann, wenn auch natürlich Anhaltspunkte, die aus diesen Rechnungen für die günstigste Aufhängung des Kreisels, ferner auch für die voraussichtlich im Durchschnitt nötige Bremsstärke gewonnen wurden, sehr erwünscht sind und vorteilhaft für den Entwurf eines Kreisels verwendet werden können.

Hier seien noch die wichtigsten Bedenken, die man gegen die von mir aufgestellte Theorie erheben kann, zusammengestellt. In erster Linie steht hier meines Erachtens der Umstand, daß man den Kreisel stets so verwenden wird, daß er ziemlich große Ausschläge macht (bei einer Ausführung in England ist man bis zu 75^0 Ausschlag nach jeder Seite gegangen), während die Rechnungen auf der Voraussetzung unendlich kleiner Schwingungen aufgebaut sind. Es kann keinem Zweifel unterliegen, daß hierdurch schon recht erhebliche Abweichungen zwischen Theorie und wirklichem Verhalten herbeigeführt werden können. Mehr als ungefähre Schätzungen, die einer Bestätigung durch die Erfahrung bedürfen, sind schon aus diesem Grunde die theoretischen Ergebnisse nicht.

Dazu kommt die sehr unregelmäßig auftretende Wirkung der Wellen bei stark bewegter See. Ich hielt es aus diesem Grunde für das Beste, mich bei der genaueren Ausrechnung auf die einfachste Annahme, die man machen kann, zu beschränken. Inwieweit dies zulässig ist, vermag, wie ich schon ausführte, nur die Erfahrung zu lehren. Bei jeder anderen Annahme, die man etwa machen wollte, wäre dies genau ebenso.

Ferner ist auch auf die Rückwirkung zwischen Stampfbewegungen und Rollbewegungen, die durch die Vermittelung

des Kreisels herbeigeführt wird, bei meiner Theorie nicht geachtet worden. Diese Rückwirkung ist auch nur gering und meiner Ansicht nach praktisch ganz bedeutungslos. Ich bin daher auch jetzt nicht weiter darauf eingegangen, obschon von anderer Seite diesem Umstande größere Bedeutung beigemessen wurde. Wenn dies richtig wäre, hätte sich schon bei den bisherigen Versuchen ein merklicher Einfluß dieser Art zeigen müssen; soweit ich darüber unterrichtet bin, war dies aber nicht der Fall.

Man könnte natürlich eine störende Beeinflussung von Roll- und Stampfbewegungen, falls sie sich lästig bemerklich machen sollte, durch die Aufstellung von zwei Kreiseln, die im entgegengesetzten Sinne umlaufen, ohne weiteres ausschalten. Herrn Prof. Skutsch ist sogar auf diese naheliegende Anordnung ein besonderes Patent erteilt worden. Meiner Meinung nach wird es sich nur dann empfehlen, zwei Kreisel einzubauen, wenn es sich um ein besonders großes Schiff handelt, bei dem eine solche Teilung schon aus Gründen der Raumersparnis im Mittelschiff angezeigt erscheinen kann. Entschließt man sich zu einer Teilung, so ist es freilich beinahe selbstverständlich, daß man die Kreisel im entgegengesetzten Sinne umlaufen läßt. Mit Rücksicht auf die größeren Herstellungskosten und manche Umständlichkeiten, die damit verbunden sind, würde ich aber unter gewöhnlichen Umständen die Aufstellung von zwei Kreiseln nicht für angebracht halten können, da der Vorteil, der damit erreicht werden soll, meiner Schätzung nach viel zu gering ist, als daß er ernstlich in Betracht kommen könnte.

Schließlich möchte ich noch darauf hinweisen, daß sich der Schlicksche Schiffskreisel mit demselben Erfolg, wenn auch in weniger zweckmäßiger Anordnung in der folgenden abweichenden Art ausführen ließe. Man stelle im Schiff zwei Schwungräder auf, die im entgegengesetzten Sinne rotieren, aber so, daß die Schwungradebenen in der Mittellage mit der Symmetrieebene des Schiffes zusammenfallen (oder parallel dazu sind). Die Schwungradachsen gehen also in diesem Falle wagrecht. Sie sind in Rahmen gelagert, die sich um eine lot-

rechte Achse drehen können. Beide Rahmen seien zwangläufig so in Verbindung miteinander gebracht, daß die Drehung des einen im einen Sinne eine gleich große Drehung des anderen im entgegengesetzten Sinne bedingt. Außerdem sei durch eine Vorrichtung, die sich leicht in verschiedener Weise ausführen läßt, etwa mit Hilfe eines Gewichtes dafür gesorgt, daß einer Drehung beider ein Moment entgegenwirkt, das ungefähr proportional mit dem Drehungswinkel anwächst. Dazu gehört dann noch eine Bremse, durch die die Schwingungen der Kreiselrahmen gedämpft werden können.

Eine Einrichtung von dieser Art würde in allen wesentlichen Beziehungen genau so wirken, wie der gewöhnliche Schlicksche Schiffskreisel, und auch die früher abgeleiteten Formeln ließen sich darauf, abgesehen von geringfügigen Änderungen, sofort übertragen. Ich habe diese Anordnung schon vor langer Zeit mit Herrn Schlick durchgesprochen. Er ist aber der Ansicht gewesen, daß die jetzt bekannte Form aus praktischen Gründen den Vorzug verdient, und ich glaube auch selbst, daß er hierin ganz im Rechte ist. Damit diese Anordnung nicht etwa in einiger Zeit als neue Erfindung auftauche, halte ich es jedoch für nützlich, sie hier wenigstens zu erwähnen.

Anmerkung. Eng verwandt mit dem Schlickschen Schiffskreisel ist offenbar auch die sogenannte „Einschienenbahn" von Bryan, über die öfters in den Zeitungen geschrieben wurde, die aber bisher in einigermaßen großem Maßstabe noch nicht ausgeführt worden zu sein scheint. In englischen Fachblättern fand ich einige etwas eingehendere Berichte darüber; aber über die Hauptsache, nämlich über die Anordnung des Kreisels, war darin nichts gesagt. Mit einer Bremse kommt man in diesem Falle für die richtige Steuerung des Kreisels jedenfalls nicht aus. Es muß vielmehr eine Einrichtung vorhanden sein, die den Kreisel, der vermutlich auch in einem drehbaren Rahmen gelagert sein wird, in einer für den Erfolg der Stabilisierung des sonst im labilen Gleichgewichte stehenden Fahrzeuges geeigneten Weise steuert, d. h. den Kreiselrahmen durch Eingriff einer äußeren Kraft so dreht, daß er das Fahrzeug jedesmal, wenn es nach der einen Seite hin ausgewichen ist, wieder in die Mittellage zurückführt. Es scheint mir ganz wohl möglich, daß ein geschickter Steuermann dies durch bloße Handhabung eines Steuerungshebels, der eine Drehung des Kreiselrahmens beherrscht, ohne weitere

Einrichtungen herbeizuführen vermöchte. Es wäre aber natürlich ein sehr gewagtes Unternehmen, einen in dieser Weise bloß von Hand gesteuerten Wagen in den Betrieb zu nehmen. Bei dem Schiff, das an sich schon stabil ist und bei dem man sicher sein kann, daß die Bremsung immer im Sinne einer Abschwächung der vorhandenen Schwingungsbewegung wirken muß, ist die Aufgabe viel einfacher, und wenn der am Bremshebel stehende Steuermann ungeschickt ist, kann dies nur den Erfolg haben, daß der Kreisel ungünstiger ausgenützt wird, nicht aber, daß er schädlich wirkt. Bei dem unstabilen Fahrzeuge der Einschienenbahn ist dies aber ganz anders. Vermutlich hat Bryan eine geeignete maschinelle Steuerung des Kreisels ausgedacht, die ihrem Zwecke entspricht; vielleicht sucht er auch erst danach. Ich habe mich nicht damit bemüht, den Versuch zu machen, die etwa schon vorhandene und geheim gehaltene Vorrichtung nachzuerfinden, möchte aber nicht unterlassen, hier zu erwähnen, daß ich eine einwandfreie Lösung der Aufgabe der Kreiselsteuerung bei der Bryanschen Einschienenbahn für sehr wohl möglich halte.[1])

§ 48. Kreiselversuch zur Messung der Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde.

Unter der Drehung der Erde ist hier die Drehung gegen einen Raum zu verstehen, für den das Trägheitsgesetz erfüllt ist, also in dem Sinne, der im ersten Abschnitte dieses Bandes ausführlich besprochen wurde. Schon Foucault hatte, um diese Drehung auf Grund der Beobachtung irdischer Bewegungserscheinungen möglichst genau nachzuweisen, außer dem nach ihm benannten Pendel auch ein Gyroskop, also einen Kreisel benutzt. Mit dieser Versuchseinrichtung hatte er aber nicht viel Glück, was wohl in erster Linie darauf zurückzuführen ist, daß zu seiner Zeit noch kein Elektromotor zur Verfügung stand, mit dem man den Kreisel in Betrieb setzen und längere Zeit darin erhalten kann, ohne in störender Weise von außen her auf ihn einwirken zu müssen.

Diesem Fortschritte in den zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln hatte ich es zu verdanken, daß ein von mir angestellter

---

1) Seit ich dies schrieb, hat Scherl sein Projekt einer Einschienenbahn veröffentlicht, das in den Tageblättern viel besprochen wurde. Ob es Scherl wirklich gelungen ist, eine einwandfreie Kreiselsteuerung zu erfinden, läßt sich aber aus den Veröffentlichungen nicht entnehmen.

Kreiselversuch, über den ich zwar früher schon berichtet habe, dessen Theorie hier aber ebenfalls wiedergegeben werden soll, mit einem weit besseren Erfolge abschloß. Er führte, wie ich hier gleich vorausschicken will, zu dem Ergebnisse, daß die aus dem Kreiselversuch abgeleitete Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde innerhalb einer Fehlergrenze, die auf etwa 2 Prozent des Wertes zu schätzen ist, mit der aus den astronomischen Beobachtungen bekannten Winkelgeschwindigkeit übereinstimmt.

Man betrachte zunächst irgendein Schwungrad, dessen Welle in einem festen Gestell gelagert ist. Wenn sich die astronomisch festgestellte Drehung der Erde auch bei den irdischen Bewegungserscheinungen bemerklich machen soll, müssen wir schließen, daß auf das Schwungrad durch die Vermittelung der Lager und der Welle ein Kräftepaar übertragen werden muß, das die der Erddrehung entsprechende Drehung der Schwungradebene erzwingt. Schon in Band IV, § 37 der 3. Aufl. habe ich auseinandergesetzt, wie man die Größe und die Richtung des Momentenvektors dieses Kräftepaars auf Grund des Flächensatzes bestimmen kann, denn zwischen dem Schwungrad, von dem dort vorausgesetzt war, daß es auf einem bewegten Fahrzeuge, etwa auf einer Lokomotive gelagert sei, und dem auf der sich drehenden Erde gelagerten Schwungrad besteht unter der Voraussetzung, daß die Drehung der Erde von Einfluß auf die irdischen Bewegungsvorgänge ist, kein wesentlicher Unterschied. Es kommt also nur darauf an, eine Einrichtung zu treffen, die es gestattet, das Bestehen dieses Kräftepaars nachzuweisen und seine Größe zu messen, um daraus einen Rückschluß auf die Größe der Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung gegen einen Raum, für den das Trägheitsgesetz gültig ist, ziehen zu können.

Nun ist freilich die Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung unter der Annahme, daß sie mit der astronomisch beobachteten übereinstimme, sehr klein, da sich die Erde hiernach in einem Tage nur einmal umdreht. Hiernach ist auch das Kräftepaar, das gemessen werden soll, sehr klein. Man hat daher kein

Mittel, um es an einem Schwungrad zu messen, das in einem festen Gestell gelagert ist. Dem läßt sich aber leicht abhelfen, indem man das Schwungrad so lagert, daß sich die Welle unter Überwindung eines kleinen und dabei hinreichend genau meßbaren Widerstandes von elastischer Art gegen die Gleichgewichtslage, die sie einnimmt, wenn das Schwungrad nicht rotiert, etwas zu drehen vermag. Zeigt sich dann, daß das rotierende Schwungrad eine andere Gleichgewichtslage einnimmt als das ruhende, so läßt sich aus der Größe des Widerstandes der Aufhängevorrichtung leicht ableiten, wie groß das Kräftepaar ist, das auf das Schwungrad übertragen werden muß, um es in der neuen Gleichgewichtslage gegen die Erde festzuhalten, und hiermit auch, falls alle übrigen Bedingungen ungeändert geblieben sind, die Größe des Kräftepaars, das die Drehung der Schwungradebene, die es mit der Erde zusammen ausführt, zu erzwingen vermag.

Um eine dieser Überlegung entsprechende brauchbare Versuchseinrichtung zu erhalten, muß man also das Schwungrad so lagern, daß es sich in einem bestimmten Sinne unter Überwindung eines geringen Widerstandes leicht zu drehen vermag, während alle anderen Bewegungsmöglichkeiten der Schwungradlager, soweit als es angeht, auszuschließen sind. Das drehbar gelagerte Schwungradgestell soll also nur einen Freiheitsgrad der Bewegung haben und das auf diese Drehachse bezogene Moment der von der Erde her auf das Schwungradgestell übertragenen Kräfte muß, wenn es auch nur ganz klein ist, mit genügender Genauigkeit gemessen werden können.

Ich habe diesen Forderungen dadurch entsprochen, daß ich das Schwungradgestell an drei langen, dünnen Stahldrähten aufgehängt habe. Diese Drähte waren über 6 m lang, oben an der Decke des Versuchsraumes befestigt und so angeordnet, daß sie im Grundriß ein gleichseitiges Dreieck von 6 cm Seitenlänge miteinander bildeten. Ein Körper, der an diesen drei Drähten aufgehängt ist, hat ja allerdings noch drei Freiheitsgrade der Bewegung: außer der Drehung um eine lotrechte Achse, die absichtlich zugelassen war, vermag er sich

auch noch in jeder horizontalen Richtung zu verschieben. Diesen Verschiebungen entsprechen zwei weitere unerwünschte Freiheitsgrade, die sich in der Tat wegen der unvermeidlichen Erschütterungen während des Betriebes, die durch kleine Unregelmäßigkeiten hervorgerufen werden, manchmal ziemlich lästig machten. Aber diese Schwierigkeiten ließen sich überwinden, da bei einem hinreichend erschütterungsfreien, also möglichst wenig durch Unregelmäßigkeiten gestörten Betrieb der Vorrichtung keine merklichen Verschiebungen des Schwungradgestells in horizontaler Richtung auftreten. Die Vorrichtung kann daher als ein brauchbarer Ersatz einer Aufhängung mit nur einem Freiheitsgrade angesehen werden.

Das Moment des Kräftepaars, das bei einer Drehung des aufgehängten Körpers um die lotrechte Achse auftritt, bleibt auch bei einem Drehungswinkel von einigen Graden noch ziemlich klein, ist dem Drehungswinkel proportional und kann durch einen einfachen Belastungsversuch leicht gemessen werden.

An Stelle eines Schwungrades habe ich, um zu einer symmetrischen Anordnung zu gelangen, zwei angewendet, jedes von 50 cm äußerem Durchmesser und 30 kg Gewicht, die beide auf derselben horizontal gelagerten Schwungradwelle aufgekeilt wurden. Dazwischen saß ein kleiner Elektromotor auf derselben Welle, den man mit Winkelgeschwindigkeiten bis zu etwas über 2000 Umdrehungen in der Minute umlaufen lassen konnte. Die Stromzuführungsdrähte hingen von der Decke des Versuchsraumes lose herab.

Es handelte sich nun darum, andere äußere Kräfte als das Gewicht und die von den Aufhängedrähten übertragenen Kräfte von der ganzen Vorrichtung fernzuhalten, und dazu erwies sich als nötig, die Vorrichtung in eine sie völlig umschließende Blechhülle einzukapseln, um den Einfluß der durch die schnelle Rotation der Schwungräder hervorgerufenen Luftströmungen auszuschalten. Alle innerhalb der Blechhülse auftretenden Winddruckkräfte sind dadurch zu inneren Kräften der ganzen, an den Drähten aufgehängten Vorrichtung geworden, so daß sie sich gegenseitig aufheben.

Ferner war es noch nötig, zur Dämpfung der aus verschiedenen Ursachen auftretenden Schwingungen eine Flüssigkeitsbremse anzubringen, die einfach darin bestand, daß an geeigneten Stellen des Gehäuses angebrachte Blechtafeln in Töpfe reichten, die mit einem zähen Öle gefüllt waren. Dadurch kamen freilich äußere Kräfte herein, die aber keinen Einfluß auf die Gleichgewichtsstellung hatten, die man beobachten wollte, sondern nur eine Dämpfung der unerwünschten Schwingungen um diese Gleichgewichtslage herbeiführten.

Der Versuch wurde damit begonnen, die Gleichgewichtslage des aufgehängten Körpers, der im ganzen ein Gewicht von über 100 kg hatte, an einem daran angebrachten Zeiger, der über einer Gradteilung spielte, festzustellen, wobei man sich davon überzeugte, daß der Zeiger nach einigen gedämpften Schwingungen immer wieder in dieselbe Nullstellung zurückkehrte, wenn man absichtlich eine Verschiebung aus der Gleichgewichtslage vorgenommen hatte. Dann ließ man durch Einschalten des Stromes den Elektromotor anlaufen, bis er die gewünschte Geschwindigkeit erreicht hatte, was sich an den Meßinstrumenten des Schaltbrettes in einfacher und hier nicht weiter zu beschreibender Weise leicht feststellen ließ. Diese Geschwindigkeit wurde dann für längere Zeit (eine viertel bis eine halbe Stunde) unverändert aufrecht erhalten. Von der Anlaufzeit her hatte der Apparat eine Schwingungsbewegung um die lotrechte Drehachse erhalten, die sehr langsam verlief (Dauer einer vollen Schwingung zwischen etwa 5 und 8 Minuten) und daher auch nur langsam gedämpft wurde. Man konnte nicht abwarten, bis diese Schwingung ganz erloschen war, da sich sonst der Elektromotor während dieser Zeit zu stark erwärmt haben würde; dagegen ließ sich durch fortgesetzte Beobachtung der Zeigerstellung leicht mit genügender Genauigkeit feststellen, um welche neue Gleichgewichtslage der aufgehängte Körper jetzt pendelte.

Es wäre natürlich auch möglich gewesen, den Versuch so auszuführen, daß man die obere Aufhängung der Drähte drehbar eingerichtet und durch Zurückdrehen den Apparat wieder in

die vorige Gleichgewichtslage bei ruhendem Schwungrade gebracht hätte. Dann hätte die trifilare Aufhängung nur einfach die Rolle einer empfindlichen Meßvorrichtung für das auf das rotierende Schwungrad infolge der Erddrehung ausgeübte Kräftepaar gespielt. Aber da auch bei der größten Umlaufsgeschwindigkeit des Kreisels die Drehung aus der früheren Gleichgewichtslage nur etwas über 8^0 betrug, konnte auf diese umständlichere Versuchseinrichtung verzichtet werden.

Der Drall des Kreisels geht in der Richtung der Umdrehungsachse und der Pfeil je nach dem Umlaufssinn (der bei den Versuchen nach Belieben gewechselt werden konnte) in der einen oder anderen Richtung, jedenfalls aber horizontal. Das Kräftepaar, das auf den Kreisel ausgeübt werden muß, um ihn zu zwingen, an der Erdumdrehung teilzunehmen, hängt zunächst von dem Winkel ab, den der Drall mit der Richtung der Erdachse bildet. Wären beide Richtungen parallel (gleich oder entgegengesetzt), so käme überhaupt kein Kräftepaar zustande. Bezeichnet man die Winkelgeschwindigkeit der Erde, als Vektor aufgefaßt, mit $\mathfrak{u}$ und den Kreiseldrall mit $\mathfrak{B}$, so ist das Kräftepaar $\mathfrak{K}$ nach dem Flächensatze

$$\mathfrak{K} = \frac{d\mathfrak{B}}{dt} = V\mathfrak{B}\mathfrak{u}.$$

Der Momentenvektor $\mathfrak{K}$ steht also jedenfalls senkrecht auf der durch die Schwungradachse und eine Parallele zur Erdachse gelegten Ebene. Er läßt sich in eine horizontale und in eine vertikale Komponente, die mit K' bezeichnet sei, zerlegen. Auf das Kräftepaar mit horizontalem Momentenvektor kommt es weiterhin nicht an, da die Aufhängevorrichtung einer Drehung um eine horizontale Achse einen sehr großen Widerstand entgegensetzt. Die vertikale Komponente K' dagegen wird durch den Drehungswinkel um die lotrechte Achse gemessen.

Unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{u}$ mit der astronomisch definierten Erddrehung übeinstimme, läßt sich die Größe von K' leicht berechnen. Liegt zunächst $\mathfrak{B}$ in der Richtung des Meridians, so ist die durch $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{u}$ gelegte Ebene die Meridianebene des Beobachtungsortes und eine Senkrechte zu ihr geht

in horizontaler Richtung. Die Komponente K' des Kräftepaars wird daher zu Null. Bei dieser Aufstellung des Apparates darf also nach der Theorie keine Ablenkung der Zeigerstellung nach der Ingangsetzung des Elektromotors eintreten. Das haben die Versuche auch bestätigt.

Fällt dagegen die Schwungradebene mit der Meridianebene zusammen, so daß $\mathfrak{B}$ in der Ost-Westrichtung oder umgekehrt verläuft, so bildet die durch $\mathfrak{B}$ und die Parallele zur Erdachse gelegte Ebene einen Winkel mit der Horizontalebene, der gleich der geographischen Breite φ des Beobachtungsortes ist. Denselben Winkel bilden auch die Normalen beider Ebenen, also $\mathfrak{K}$ und die Lotlinie miteinander. Man erhält daher K' aus $\mathfrak{K}$ durch Multiplikation mit $\cos\varphi$. Da hier $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{u}$ senkrecht zueinander stehen, ist der Absolutbetrag von $\mathfrak{K}$ gleich dem Produkte der Absolutbeträge von beiden. Man hat daher für K'

$$K' = \theta w u \cos\varphi \quad (\text{für } \mathfrak{B} \perp \mathfrak{u}).$$

Hierbei ist für den Drall das Produkt aus dem Trägheitsmomente θ des Kreisels für die Umdrehungsachse und der Winkelgeschwindigkeit w, mit der der Kreisel umläuft, eingesetzt.

Hat endlich der Drall $\mathfrak{B}$ eine beliebige Richtung in der Horizontalebene, die mit der Ost-Westrichtung einen Winkel ψ einschließt, so zerlegen wir $\mathfrak{B}$ zunächst in zwei Komponenten, eine in der Ost-Westrichtung von der Größe $w\theta\cos\psi$ und eine in der Richtung des Meridians. Wir wissen schon, daß diese Komponente zu K' nichts beiträgt. Aus der ersten Komponente folgt dagegen

$$K' = \theta w u \cos\varphi \cos\psi. \tag{285}$$

Um auch noch das Vorzeichen von K' festzustellen, beachte man, daß $\mathfrak{u}$ nach den astronomischen Beobachtungen (d. h. hier nach der Feststellung, daß die Sonne im Osten auf- und im Westen untergeht) bei den von uns gebrauchten Richtungsfestsetzungen ein Vektor ist, der vom Nordpole der Erde nach dem Südpole hin geht. Ist nun z. B. der Drall $\mathfrak{B}$ nach Osten gerichtet, so geht der Pfeil des äußeren Pro-

dukts nach den dafür gültigen Richtungsbestimmungen nach unten hin ins Erdinnere hinein. K' ist daher negativ zu setzen, wenn wir die nach oben hin gehende Richtung als positiv ansehen.

Nun ist aber K' das Moment, das von der trifilaren Aufhängung auf den Apparat übertragen werden muß, um ihn in der neuen Gleichgewichtslage festzuhalten.

Dieses Moment dreht, von oben gesehen, dem negativen Vorzeichen von K' entsprechend, entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne. Damit die trifilare Aufhängung ein Moment von diesem Richtungssinne übertragen kann, muß sie selbst eine Drehung im Uhrzeigersinne erfahren haben. Wir schließen daraus, daß bei dem nach Osten gekehrten Pfeile von $\mathfrak{B}$ die neue Gleichgewichtslage gegenüber der dem nicht rotierenden Schwungrade entsprechenden Gleichgewichtslage eine Drehung erfahren hat, die von oben gesehen mit der Drehung des Uhrzeigers übereinstimmt. Umgekehrt ist es natürlich, wenn der Pfeil von $\mathfrak{B}$ nach Westen geht, oder auch wenn $\mathfrak{B}$ eine nach Westen gekehrte Komponente besitzt.

Ich habe schon erwähnt, daß die Versuche, die in meiner Veröffentlichung in den Sitzungsberichten der K. bayr. Akad. d. Wiss., math. physik. Klasse 34, 1904, S, 5 (abgedruckt auch in der Physik. Zeitschr. 5, 1904, S. 416) näher beschrieben sind, gelehrt haben, daß das unmittelbar gemessene Kräftepaar K' mit dem nach Gl. (285) berechneten innerhalb der Grenzen der Versuchsfehler, d. h. bis auf etwa 2% übereinstimmt. Hiermit ist also mit demselben Grade der Genauigkeit auch der Nachweis erbracht, daß die aus der Beobachtung irdischer Bewegungsvorgänge abzuleitende Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde mit der astronomisch beobachteten übereinstimmt.

Von nebensächlicher Bedeutung für den Zweck des Versuchs, aber theoretisch immerhin bemerkenswert ist eine Theorie der Schwingungen, die der Apparat bei der Ausführung des Versuchs um die Gleichgewichtslage herum ausführt. Wenn die Aufhängedrähte nicht elastisch wären, müßten diese Schwingungen bei einer beliebigen Umdrehungsgeschwindigkeit des

Schwungrads genau so erfolgen, als wenn das Schwungrad in Ruhe wäre. In Wirklichkeit lehrt aber die Beobachtung, daß die Schwingungen um so langsamer erfolgen, je schneller das Schwungrad rotiert. Das hängt mit der elastischen Nachgiebigkeit der Aufhängevorrichtung zusammen, und zwar in ganz ähnlicher Weise, wie dies für einen verwandten Fall in § 40 besprochen war.

Bei diesen Schwingungen bewegt sich nämlich die Kreiselachse nahezu (oder bei starren Aufhängedrähten genau) in einer horizontalen Ebene. Auch die Änderungsgeschwindigkeit des Kreiseldralls ist daher mit demselben Grade der Annäherung horizontal und zwar in jeder Stellung winkelrecht zur Kreiselachse gerichtet. Daher muß nach dem Flächensatze während der Schwingung von den Aufhängedrähten außer den durch das Gewicht des Kreiselapparats hervorgerufenen Spannungen auch noch ein Kräftepaar von horizontal gerichtetem Momentenvektor auf den Kreisel übertragen werden, das gleich der Änderungsgeschwindigkeit des Dralls ist. Dieses Kräftepaar ist weit größer als das mit dem Buchstaben K' bezeichnete, das mit der Torsion der Aufhängevorrichtung zusammenhängt und dessen Momentenvektor lotrecht gerichtet ist. Es verhält sich nämlich zu K' wie die Winkelgeschwindigkeit der Präzessionsschwingungen in einem gegebenen Augenblicke zur betreffenden Winkelgeschwindigkeitskomponente der Erddrehung. Dieses bei den gegebenen Versuchsbedingungen verhältnismäßig große und mit der Zeit veränderliche Kräftepaar wird durch die Aufhängedrähte dadurch auf den Kreisel übertragen, daß die drei Drähte verschieden stark gespannt sind. Wegen der Veränderlichkeit der Spannungen erfahren die Aufhängedrähte auch elastische Längenänderungen und hieraus folgt, daß die Kreiselachse während der Schwingungen außer den freilich viel größeren Drehungen um die lotrechte Achse auch noch sehr kleine Drehungen um eine zu ihr selbst jederzeit senkrecht stehende horizontale Achse ausführen muß. So klein diese Drehungen aber auch sind, so wichtig sind sie für den zeitlichen Verlauf der Schwingungen.

Bezeichnet man den sehr kleinen Winkel, den die Kreiselachse zur Zeit t mit der Horizontalebene bildet, mit ϱ und den Winkel, den die durch die Kreiselachse gelegte lotrechte Ebene mit der Gleichgewichtslage bei rotierendem Kreisel einschließt, mit χ, so folgen aus den vorhergehenden Erwägungen ohne weiteres die Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \theta w \frac{d\varrho}{dt} &= + c\chi \\ \theta w \frac{d\chi}{dt} &= - C\varrho \end{aligned}\right\}. \tag{286}$$

Hierbei bedeutet $c\chi$ das von den Aufhängedrähten infolge der Drehung χ um die lotrechte Achse auf den Kreisel übertragene Kräftepaar mit lotrecht gerichtetem Momentenvektor, c selbst also die auf einen Torsionswinkel $\chi = 1$ bezogene Größe dieses Kräftepaars. Ebenso gibt C das auf einen Drehungswinkel $\varrho = 1$ bezogene Kräftepaar mit wagerecht gerichtetem Momentenvektor an. Natürlich ist C weit größer als c; bei dem von mir benutzten Apparate wurde $c = 2{,}12$ cmkg und $C = 2985$ cmkg gefunden, d. h. C war mehr als tausendmal größer als c.

Nun ist freilich zu bemerken, daß beim Anschreiben der Gleichungen (286) zwei Umstände von geringer Bedeutung außer acht geblieben sind, die zwar bei meinen Versuchen ohne weiteres vernachlässigt werden durften, die aber unter anderen Umständen mehr ins Gesicht fallen können, so daß es wünschenswert ist, die Gleichungen noch zu vervollständigen.

Am meisten kommt hierbei in Betracht die Dämpfung der Schwingungen, die durch das zuvor beschriebene Ölbad herbeigeführt wird. Um diese Dämpfung zu berücksichtigen, braucht man nur in der ersten der Gleichungen (286) neben $c\chi$ noch ein Glied $k\frac{d\chi}{dt}$ mit dem gleichen Vorzeichen anzufügen. Unter k ist dann der Dämpfungsfaktor für die Schwingungen um die lotrechte Achse zu verstehen, dessen Wert experimentell leicht ermittelt werden kann. Die Dämpfung für die Schwingungen ϱ kann dagegen wegen der viel kleineren Ausschläge

und dementsprechend kleineren Winkelgeschwindigkeiten auch bei einer genaueren Berechnung immer noch vernachlässigt werden.

Ein zweiter Umstand, der für eine genauere Berechnung namentlich dann beachtet werden muß, wenn die Winkelgeschwindigkeit w des Kreisels verhältnismäßig klein ist, besteht darin, daß dem Versuchsapparat außer dem Drall θw, der durch die Rotation des Schwungrades bedingt ist, auch noch ein Drall $\theta^1 \frac{d\chi}{dt}$ von lotrechter Richtung zukommt, wegen der freililich sehr viel kleineren Winkelgeschwindigkeit, mit der sich der Apparat während der Schwingungen um die lotrechte Achse dreht. Hierbei bedeutet θ^1 das Trägheitsmoment des ganzen an den Drähten aufgehängten Apparates für die lotrechte Schwingungsachse. Die Änderungsgeschwindigkeit dieses Drallanteils ist in der ersten der Gleichungen (286) als Summand zu dem Gliede $\theta w \frac{d\varrho}{dt}$ hinzuzufügen. — Über die Vorzeichen, die den einzelnen Gliedern beizulegen sind, gibt man sich am besten mit Hilfe einer axonometrischen Skizze Rechenschaft, in die man die Richtungen, in denen ϱ und χ als positiv gerechnet werden sollen, willkürlich einträgt. Man muß hierbei nur beachten, daß die Änderungsgeschwindigkeit des Dralls jedenfalls in gleicher Richtung mit dem Momentenvektor des Kräftepaars geht, das diese Änderungsgeschwindigkeit herbeiführt. Rechnet man ϱ oder χ nach der entgegengesetzten Richtung hin, die man zuerst dafür angenommen hatte, positiv, so kehren sich in beiden Gleichungen die Vorzeichen der mit ϱ bzw. χ behafteten Glieder um. Auf das Schlußergebnis ist dies aber ohne Einfluß.

Durch Einführung der genannten Verbesserungen gehen die Gleichungen (286) über in

$$\left.\begin{aligned} \theta w \frac{d\varrho}{dt} - \theta' \frac{d^2\chi}{dt^2} &= c\chi + k\frac{d\chi}{dt} \\ \theta w \frac{d\chi}{dt} &= -C\varrho \end{aligned}\right\}. \qquad (287)$$

Setzt man ϱ aus der zweiten Gleichung in die erste Gleichung ein, so erhält man

$$\left(\frac{\theta^2 w^2}{C} + \theta'\right)\frac{d^2\chi}{dt^2} + k\frac{d\chi}{dt} + c\chi = 0. \qquad (288)$$

Das ist die Differentialgleichung einer gedämpften harmonischen Schwingung. Nach Gl. (40) von Band IV, S. 49 der 3. Aufl. kann die Schwingungsdauer T sofort angegeben werden, nämlich

$$T = \frac{4\pi\left(\frac{\theta^2 w^2}{C} + \theta'\right)}{\sqrt{4c\left(\frac{\theta^2 w^2}{C} + \theta'\right) - k^2}}. \tag{289}$$

Bei meinen Versuchen durfte ich, wie eine einfache Überschlagsrechnung lehrte, ohne weiteres θ' gegenüber dem einige hundert mal größeren Summanden $\frac{\theta^2 w^2}{C}$ vernachlässigen. Außerdem genügte es, um zu einer ungefähren Abschätzung zu gelangen, auf die es mir zunächst allein ankam, auch k zu vernachlässigen, obschon dieser Fehler mehr ins Gewicht fiel als der andere. Tut man dies, so vereinfacht sich Gl. (289) zu

$$T = 2\pi \frac{\theta w}{\sqrt{Cc}}, \tag{290}$$

was sich auch in guter Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen erwies.

Anmerkung. Bald nach der ersten Veröffentlichung meiner hier beschriebenen Versuche kam mir eine Abhandlung über den Kreiselkompaß zu Gesicht, bei dessen Theorie Erwägungen von ganz ähnlicher Art anzustellen sind. In dieser Abhandlung stellte es der Verfasser als einen Fehler hin, daß ich das mit θ' behaftete Glied in den vorhergehenden Gleichungen vernachlässigt hatte. Der Verfasser berichtigte daher meine Gleichung, strich aber später, als er zu Zahlenrechnungen überging, das Glied mit θ' ebenfalls als ganz bedeutungslos. Mein Fehler hatte einfach darin bestanden, daß ich dieses Glied schon von vornherein als geringfügig erkannt und es daher überhaupt nicht angesetzt hatte. Das Beispiel ist lehrreich genug, um mich zu veranlassen, es hier zu erwähnen. Vernachlässigungen minder wichtiger Umstände sind bei allen Anwendungen der Mechanik auf Vorgänge der technischen Praxis notwendig und das Verdienst einer guten Theorie besteht gerade darin, die ausschlaggebenden Umstände zu erkennen und hervorzuheben und die bedeutungslosen außer acht zu lassen. Einwendungen der bezeichneten Art, die mit dem Anspruche von Berichtigungen auftreten, sind daher nur als ein Zeichen mangelnder Einsicht aufzufassen. Etwas anderes wäre es natürlich gewesen, wenn

der Verfasser darauf hingewiesen hätte, daß die von mir ausdrücklich als „Annäherungsrechnung" bezeichnete Theorie auf solche Fälle, bei denen w verhältnismäßig klein ist, nicht angewendet werden dürfte. Aber von einem solchen Falle ist bei dem Kreiselkompaß durchaus nicht die Rede, so wenig oder noch weniger als bei den von mir angestellten Versuchen.

§ 49. Andere Anwendungen des Kreisels.

Die Zahl der in der Praxis stehenden Ingenieure, die mit der Theorie des Kreisels hinreichend vertraut sind, um selbständig Gebrauch davon machen zu können, ist auch heute ohne Zweifel noch ziemlich klein, wenn auch ein gewisses Verständnis für die wichtigsten Eigenschaften der Kreiselbewegung jetzt viel häufiger anzutreffen ist, als noch vor wenigen Jahren. Je mehr sich diese Kenntnis vertieft und zugleich weiter ausbreitet, um so mehr werden sich voraussichtlich die Fälle häufen, in denen eine nützliche Anwendung des Kreisels in der Maschinentechnik gemacht wird. An manchen Ansätzen dazu fehlt es, wie ich aus einigen Zuschriften an mich entnommen habe, schon jetzt nicht und ich vermute daher, daß ich in einer etwaigen späteren Auflage des Bandes an dieser Stelle über verschiedene neue Verwendungen werde berichten können.

Bisher allerdings ist der Kreis dieser Anwendungen noch ziemlich beschränkt. Einige, die es schon zu gewissen Erfolgen gebracht haben, lassen sich aber jetzt schon anführen. Freilich muß ich mich hierbei nur mit einer ganz flüchtigen Besprechung begnügen und zwar schon deshalb, weil ich mit den Einzelheiten dieser in der Literatur noch wenig behandelten und zum Teil wohl auch absichtlich geheim gehaltenen Konstruktionen zu wenig bekannt bin, als daß ich mir ein Urteil darüber zu bilden vermöchte, auf welche Umstände es für die Aufstellung einer brauchbaren Theorie hauptsächlich ankommt.

In erster Linie ist hier der vorher schon erwähnte Kreiselkompaß zu nennen. Das wichtigste und einfachste Hilfsmittel zum Steuern der Schiffe beim Fehlen einer äußeren Orientierung ist bekanntlich der Magnetkompaß. Dieser wird aber

unter Umständen recht unzuverlässig. Bei den schwer gepanzerten Kriegsschiffen stellt sich oft nach dem Abfeuern der großen Geschütze durch die mit der starken Erschütterung verbundene Änderung des magnetischen Feldes der ausgedehnten Eisenmassen des Schiffes eine starke Abweichung des Kompaßstandes ein, die zu einer falschen Steuerung und hiermit zu Unfällen führen kann. Man war daher seit langem auf eine Abhilfe bedacht und das beste Mittel dazu scheint der Kreiselkompaß zu sein. Verschiedene Erfinder, insbesondere Dr. Anschütz in Kiel, haben sich um die Ausgestaltung des Kreiselkompasses bemüht und dabei auch schon, wie es scheint, ganz brauchbare Ergebnisse erhalten.

Der Kreiselkompaß besteht wie der im vorhergehenden Paragraphen besprochene Apparat zur Messung der Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde aus einem oder zwei Schwungrädern mit Antrieb durch einen damit verbundenen Elektromotor. An die Stelle der trifilaren Aufhängung tritt hier eine Lagerung ohne ein in eine Gleichgewichtslage zurücktreibendes Moment, gewöhnlich eine schwimmende Lagerung in einem mit Flüssigkeit (etwa mit Quecksilber) gefüllten Gefäße. Man will damit erreichen, daß die Kreiselachse in der anfänglichen Richtung dauernd verharrt. Für eine beschränkte Zeit wird dies mit genügender Genauigkeit ohne weiteres möglich sein: die Schwierigkeiten beginnen erst, wenn man verlangt, daß sich die Richtung der Kreiselachse auch innerhalb längerer Zeiträume nicht ändern soll. Hierzu wird es nötig, in eine genaue Untersuchung aller Kräfte einzutreten, die auf den Kreisel wirken. Die Roll- und Stampfbewegungen des Schiffes dürften auf die Richtung der Kreiselachse im ganzen genommen ohne Einfluß bleiben, da sie in Pendelungen um eine und dieselbe Gleichgewichtslage des Schiffes bestehen und der Einfluß einer Drehung im einen Sinne bald darauf durch eine Bewegung in der entgegengesetzten Richtung wieder ausgeglichen wird. Etwas anders wäre es schon, wenn das Schiff fortwährend in derselben Richtung im Kreise herum gesteuert würde. Durch die Flüssigkeitsreibung müßte dann ein gewisses kleines Kräftepaar auf

den Kreiselkompaß übertragen werden, das dauernd in der gleichen Richtung wirkt. Die Folge wäre zunächst eine geringe Drehung der Kreiselachse um eine horizontale Achse, also eine geringe Schiefstellung der vorher etwa in horizontaler Richtung gehenden Kreiselachse. Mit dieser Schiefstellung des schwimmenden Kreiselkompasses würde aber genau wie bei einem Schiffe, das etwas aus der aufrechten Lage gedreht ist, ein Kräftepaar aus Auftrieb und Gewicht hervorgerufen werden, dessen Momentenvektor horizontal gerichtet ist und nun seinerseits eine Drehung der Kreiselachse um die lotrechte Achse herbeiführt. Wenn das Schiff lange genug im Kreise in der gleichen Richtung herumführe, müßte daher mit der Zeit eine merkliche Ablenkung der Kreiselachse eintreten und die Vorrichtung würde daher unter diesen Umständen unbrauchbar werden. Fortdauernde Kursänderungen, die stets im gleichen Sinne erfolgten, sind aber im praktischen Betrieb nicht zu erwarten und für Kursänderungen in dem Maße, wie sie tatsächlich vorgenommen werden, wird sich der Fehler in der Richtungsanzeige des Kompasses so gering machen lassen, daß er ohne Bedeutung bleibt.

Dagegen kommt der Einfluß der Erddrehung auf die Stellung der Kreiselachse, wenn er nicht durch eine besondere Anordnung ausgeschaltet wird, deutlich zur Geltung. Manche Erfinder haben ihn dadurch beseitigt, daß sie die Kreiselachse von vornherein nicht horizontal, sondern parallel zur Erdachse einstellten. Andere ziehen es vor, die horizontale Lage der Kreiselachse beizubehalten, dafür aber durch Anbringen eines kleinen Zusatzgewichtes ein Kräftepaar an dem Kreisel hervorzurufen, dessen Wirkung den Einfluß der Erddrehung gerade aufhebt. Auch die Ortsänderung des stets in der gleichen Richtung weiter fahrenden Schiffes auf der Erdoberfläche hat eine geringe Drehung des Schiffes gegen das außerhalb der Erde festgelegte Inertialsystem oder mit anderen Worten gegen den Fixsternhimmel zur Folge, und an dieser Drehung muß der Kreiselkompaß ebenfalls teilnehmen, was wiederum zu einer Verschiebung der Richtungsanzeige des Kompasses führen kann.

Aber auch der hieraus entspringende Fehler läßt sich durch geeignete Mittel unschädlich machen.

Mit diesen Bemerkungen muß ich mich in Ermangelung der genaueren Unterlagen hier begnügen.

Eine andere Anwendung findet der Kreisel zur Steuerung der Torpedos. Er hat hier den Zweck, den Kurs eines auf ein bestimmtes Ziel abgefeuerten Torpedos dauernd aufrecht zu erhalten. Man versteht leicht, wie dies im allgemeinen möglich ist. Wenn der Kurs durch zufällige äußere Umstände, etwa durch Unregelmäßigkeiten in der Wasserbewegung, abgelenkt wird, macht der im Innern des Torpedos untergebrachte Kreisel einen Ausschlag, der zur Stellung eines Steuers verwendet werden kann, durch das der Torpedo wieder in den früheren Kurs zurückgebracht wird. Über die Einzelheiten, die von den Marineverwaltungen anscheinend sehr ängstlich geheimgehalten werden, ist aber in diesem Falle noch viel weniger bekannt als beim Kreiselkompaß.

Endlich erwähne ich noch, daß man neuerdings öfters davon gesprochen hat, die Kreiselerscheinungen zur Stabilisierung der Flugmaschinen zu verwenden.

Das ist offenbar in verschiedener Weise möglich, entweder so wie bei der Steuerung des Torpedos, indem man einen Kreisel zur Stellung eines Steuers benutzt, oder in ähnlicher Art wie bei dem Schiffskreisel, so daß die unmittelbare Wirkung des Kreisels ein Aufrichten des in eine geneigte Lage gebrachten Fahrzeuges herbeiführt. Im zweiten Falle müßte der Kreisel natürlich erheblich stärker sein als im ersten Falle. Auch der Gedanke, die ohnehin schon vorhandenen schnell umlaufenden Massen der Luftschrauben zugleich als Kreisel in dem angedeuteten Sinne zu verwenden, liegt sehr nahe. Bisher hat man freilich umgekehrt die Kreiselwirkung der Luftschrauben dadurch ausgeschaltet, daß man sie paarweise anordnete und im entgegengesetzten Sinne umlaufen ließ. Es scheint aber nicht aussichtslos, hierin eine Änderung eintreten zu lassen und eine Anordnung zu ersinnen, durch die die Kreiselwirkung im günstigen Sinne zur Geltung kommt.

Ob nach einer der hier angegebenen Richtungen über ganz unbestimmt gehaltene Vorschläge hinaus schon etwas praktisch Brauchbares in Angriff genommen ist, vermag ich nicht zu sagen. Ein Erfolg wird auch nur dann zu erwarten sein, wenn sich ein Erfinder damit beschäftigt, der nicht nur mit den Gesetzen der Kreiselbewegung wohl vertraut ist, sondern auch über alle anderen Fragen, die mit der Stabilisierung der Flugmaschinen zusammenhängen, genau unterrichtet ist. Die zweite Forderung ist dabei ohne Zweifel die wichtigere und die schwieriger zu erfüllende, da die Stabilität der zunächst ohne Kreisel ausgeführten Flugmaschinen von sehr verwickelten und vorläufig noch schwer übersehbaren Bedingungen abhängt.

Anmerkung. Den Leser, der sich mit der Theorie des Kreisels noch weiter beschäftigen möchte, erlaube ich mir auf das umfassende Werk von Klein und Sommerfeld aufmerksam zu machen, von dem, wie ich höre, demnächst die Schlußlieferung gedruckt werden soll, die sich insbesondere mit den praktischen Anwendungen des Kreisels beschäftigen wird. Das Werk ist ebenfalls im Teubnerschen Verlage erschienen.

Vierter Abschnitt.

Verschiedene Anwendungen.

§ 50. Die Schwingungen eines Zentrifugalregulators.

Eine Dampfmaschine, die mit einem Zentrifugalregulator ausgerüstet ist, bildet einen Verband mit zwei Freiheitsgraden Dem einen Freiheitsgrade entspricht die Bewegung des Kurbelmechanismus und der mit ihm zwangläufig verbundenen Teile. Als zugehörige allgemeine Koordinate kann der Winkel angesehen werden, um den sich die Kurbelwelle seit einem zum Ausgangspunkt der Betrachtung gewählten Augenblicke weiter gedreht hat. Der zweite Freiheitsgrad bezieht sich auf die von der vorigen unabhängige Bewegung des Regulators, durch die der Hub des Regulators geändert wird. Entweder dieser Hub selbst oder an seiner Stelle der Winkel, den die Stangen des Regulators mit der Umdrehungsachse bilden, liefert die diesem zweiten Freiheitsgrade entsprechende allgemeine Koordinate.

Unter gewöhnlichen Umständen bleibt der Regulator in seiner Stellung, solange die Dampfmaschine unter gleichmäßigen Bedingungen weiterläuft. Der zweite von den beiden Freiheitsgraden wird unter diesen Umständen nicht ausgenutzt. Zwar kommen auch in diesem Falle während jedes Umlaufs der Maschine periodische Geschwindigkeitsschwankungen der Kurbelwelle und der mit ihr zwangläufig verbundenen Regulatorspindel vor; sie werden jedoch durch das Schwungrad, über dessen Berechnung schon im ersten Bande nähere Angaben gemacht wurden, in engen Grenzen gehalten. Diese geringen periodischen Geschwindigkeitsschwankungen vermögen aber an der Regulatorstellung wegen der Bewegungswiderstände, die sich dem wider-

setzen, in der Regel nichts zu ändern. Erst wenn die Belastung der Maschine durch Ausschaltung oder Einschaltung von Arbeitsmaschinen, die von ihr angetrieben werden, beträchtlich geändert und hierdurch auch nach kurzer Zeit eine größere Geschwindigkeitsänderung der Kurbelwelle herbeigeführt wird, kommt der zweite Freiheitsgrad des Regulators zur Geltung. Der Regulator hebt oder senkt sich, wirkt auf die Steuerung der Maschine, ändert damit den Dampfzutritt und führt schließlich, wenn er richtig konstruiert ist, einen den abgeänderten Belastungsverhältnissen entsprechenden gleichmäßigen Gang von neuem herbei.

Zunächst verlangt man, daß die Umdrehungszahlen, die zu verschiedenen Belastungen gehören, nicht viel voneinander abweichen. Um die Erfüllung dieser Forderung zu prüfen, genügt es, den gleichmäßigen Gang der Maschine unter der Annahme verschiedener konstanter Regulatorstellungen zu untersuchen und die Geschwindigkeiten, die diesen Stellungen entsprechen, miteinander zu vergleichen. Bei dieser Betrachtung ist jedesmal nur auf einen Freiheitsgrad des ganzen Verbandes zu achten. Das ist verhältnismäßig einfach, und da es hier nicht meine Aufgabe bilden kann, eine vollständige Theorie der Regulatoren vorzuführen, gehe ich darauf nicht weiter ein. Für uns soll es hier nur auf eine zweite Forderung ankommen, die man außerdem noch an den Regulator zu stellen hat. Sie besteht darin, daß der Regulator nach einer Veränderung in der Belastung der Dampfmaschine in die dieser entsprechende neue Stellung ohne große Schwankungen übergehen soll.

Von vornherein ist klar, daß diese Forderung keineswegs mit der vorhergehenden zusammenfällt. Wenn sich der Regulator bei einer Verminderung der Belastung der Maschine hebt, wird man nicht erwarten dürfen, daß er sich gerade nur um das erforderliche Maß hebt und hierauf stehen bleibt. Man muß vielmehr erwarten, daß er zunächst Schwingungen um die den neuen Belastungsverhältnissen entsprechende Gleichgewichtslage ausführt. Es kommt nun darauf an, ob diese Schwingungen hinreichend gedämpft sind und bald abklingen, so daß sie un-

schädlich bleiben, oder ob sie zu großen Geschwindigkeitsschwankungen der Maschine führen.

Für die Untersuchung der hiermit bezeichneten Schwingungen kommen demnach beide Freiheitsgrade des ganzen Verbandes in Betracht. Wer mit der Benutzung der Gleichungen von Lagrange gut vertraut ist, wird zunächst an dieses Verfahren zur Ableitung der Bewegungsgleichungen denken. Meistens zieht man aber eine andere Betrachtungsweise vor, die sich auf das Prinzip von d'Alembert stützt, und dieser will ich mich hier ebenfalls anschließen.

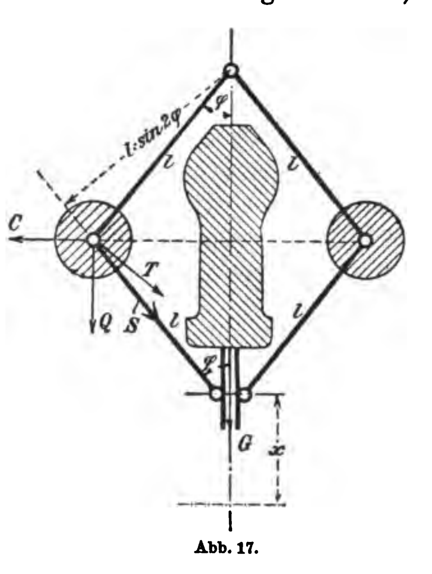


Abb. 17.

Ehe man zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen schreiten kann, muß man sich zunächst danach umsehen, welche Umstände auf den Schwingungsvorgang von mehr oder minder wesentlichem Einflusse sein können. Dabei kommt zunächst die besondere konstruktive Ausbildung des Regulators und die Art, wie er den Dampfzutritt ändert, in Betracht. Zum Zwecke der Auseinandersetzung des Verfahrens genügt es, wenn ich mich hier auf die Behandlung eines bestimmten einfachen und häufig vorkommenden Beispieles beschränke, nämlich auf die in Abb. 17 angegebene Anordnung des Regulators. Außerdem sei einstweilen wenigstens vorausgesetzt, daß der Regulator eine Drosselklappe verstellt, so daß der Dampfzutritt nur durch diese verändert wird. Das ist die einfachste Annahme, die man zunächst machen kann; sie ist indessen nicht sehr wesentlich, da sich das Verfahren auf andere Fälle meist mit geringen Änderungen übertragen läßt. Freilich kommt auch selbst in diesem einfachsten Falle noch

ein besonderer Umstand in Betracht, der zum mindesten einmal erwähnt werden muß. Eine Kurbeldampfmaschine ist stets mit einer Expansionssteuerung versehen, durch die der Dampfzutritt bei einer gewissen Kolbenstellung abgesperrt wird. Gewöhnlich wird die Anordnung des Regulators so getroffen, daß er das Expansionsverhältnis ändert. Aber auch wenn wir ein festes Expansionsverhältnis voraussetzen und uns die Regulierung durch die Drosselklappe bewirkt denken, ist zu beachten, daß die Drosselklappe während der Zeit, in der der Zutritt des Dampfes in den Zylindern abgesperrt ist, ohne Einfluß auf die Dampfspannung im Zylinder ist, sondern erst später, wenn der Dampfzutritt wieder geöffnet ist, von neuem darauf einwirken kann. Wir haben es daher genau genommen nicht mit einer stetigen, sondern mit einer oft unterbrochenen oder absatzweisen Wirkung des Regulators auf die Arbeitsleistung der Maschine zu tun. Für bestimmte Zwecke kann es nötig werden, auf den Einfluß dieses Umstandes zu achten. Das muß aber eine spätere Sorge bleiben; um die Betrachtung nicht von vornherein durch die Berücksichtigung von Nebenumständen, die in der Regel nur von untergeordneter Bedeutung sind, zu überlasten, müssen wir davon und von manchen anderen Umständen absehen.

Insbesondere soll auch, um einfache und klar zu übersehende Verhältnisse zu schaffen, von der Veränderung, die das Tangentialdruckdiagramm während einer Umdrehung der Kurbel erleidet, abgesehen werden. Bei einer mehrzylindrigen Maschine wird dies mit mehr Recht zulässig sein, als bei einer Maschine mit nur einem Zylinder, und bei einer Dampfturbine trifft die damit gleichbedeutende Voraussetzung, daß das auf die Kurbelwelle übertragene treibende Moment unabhängig von der Stellung der Kurbelwelle ist, überhaupt genau zu. Wir drücken diese Voraussetzungen in der Gleichung

$$M = F(\varphi) \tag{291}$$

aus, in der M das Drehmoment, φ der die Regulatorstellung beschreibende aus Abb. 17 zu entnehmende Winkel und F eine Funktion bedeutet, die bei konstantem φ von der Zeit un-

abhängig ist. Hierbei dürfen wir ferner annehmen, daß die Form der Funktion φ, die von der besonderen Anordnung des Regulators und seiner Einwirkung auf die Dampfzuführung abhängt, für eine bestimmte Maschine, deren Verhalten wir untersuchen wollen, durch vorausgehende Betrachtungen, mit denen wir es hier nicht zu tun haben, bereits ermittelt ist.

Ferner kommt es auf die Bewegungswiderstände an, die sich einer Änderung des Regulatorhubs entgegenstellen und die sich aus den Reibungen an den verschiedenen Gelenken, an der Drosselklappe sowie einer Ölbremse, die zur Dämpfung der Schwingungen gewöhnlich angebracht ist, zusammensetzen. Wir können uns alle diese Widerstände zu einer nach der gewöhnlichen Vorschrift auf den Regulatorhub reduzierten Kraft, die wir weiterhin kurzweg als die Regulatorreibung bezeichnen, zusammengesetzt denken. Diese Kraft wird teilweise von der Geschwindigkeit abhängen, mit der sich der Regulatorhub ändert, und von diesem Teile wird man genau genug annehmen können, daß er wie eine gewöhnliche Schwingungsdämpfung der Geschwindigkeit proportional ist. Ein zweiter Teil, die „konstante Reibung“, wird aber auch bestehen bleiben, wenn die Geschwindigkeit gleich Null ist. Einstweilen wollen wir aber die Betrachtung unter der Voraussetzung durchführen, daß die konstante Reibung so klein sei, daß sie genau genug vernachlässigt werden kann.

Endlich soll zur Vereinfachung der Rechnung noch vorausgesetzt werden, daß die Massen der Regulatorstangen so gering gegenüber den Schwungkugelmassen sind, daß sie außer Betracht bleiben können, obschon natürlich nichts im Wege stehen würde, die Formeln durch Zufügung weiterer Glieder so zu verallgemeinern, daß die Massen und Gewichte der Stangen ebenfalls berücksichtigt wären.

Wir bringen nun an den Massen des Regulators die Trägheitskräfte an und betrachten das Gleichgewicht aller Kräfte an dem in seiner augenblicklichen Stellung in Ruhe verharrenden Regulator. Den Regulatorhub, von der untersten Stellung an gerechnet, bezeichnen wir mit x; dann folgt zu-

nächst mit Benutzung der in Abb. 17 eingeschriebenen Bezeichnungen

$$x = 2l(1 - \cos\varphi),$$

woraus man durch Differentiieren

$$\frac{dx}{dt} = 2l \sin\varphi \frac{d\varphi}{dt},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2l\left(\sin\varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \cos\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right)$$

erhält. Das Gewicht der Regulatorhülse samt dem daran angebrachten Körper bezeichnen wir mit G. Dazu kommt eine Trägheitskraft von der Größe

$$\frac{G}{g}\frac{d^2x}{dt^2},$$

die ebenfalls nach abwärts geht, wenn der Differentialquotient positiv ist, die Beschleunigung von G also nach oben hin gerichtet ist. In der gleichen Richtung wie G geht bei einem positiven Werte von $\frac{dx}{dt}$ auch die damit proportionale Reibung, die wir unter Einführung eines „Dämpfungsfaktors“ k gleich

$$k\frac{dx}{dt}$$

zu setzen haben. An den unteren Stangenenden lastet daher eine Kraft G', die sich aus den vorhergehenden drei Gliedern zusammensetzt und

$$G' = G + \frac{G}{g}\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt}$$

geschrieben werden kann. Diese Kraft zerlegt sich nach den Richtungen der beiden unteren Stangen, und wenn wir die in einer dieser Stangen auftretende Zugspannung mit S bezeichnen, erhalten wir dafür

$$S = \frac{G'}{2\cos\varphi}.$$

Nun kommen wir zu den Kräften, die an einer Schwungkugel angreifen. Eine davon ist die bereits berechnete Kraft S. Dazu kommen zunächst das Gewicht Q der Kugel, ferner die daran anzubringenden Trägheitskräfte und endlich die von der

oberen Stange übertragene Kraft. Die Beschleunigung des Kugelschwerpunktes, in dem wir uns mit ausreichender Genauigkeit die ganze Kugelmasse vereinigt denken können, läßt sich als geometrische Summe aus drei Komponenten auffassen. Die erste Komponente wird gebildet von der Zentrifugalbeschleunigung, die zu der kreisförmigen Bewegung gehört, die der Kugelschwerpunkt infolge der Spindeldrehung mit der Winkelgeschwindigkeit u ausführt. Ihr entspricht als Trägheitskraft die Zentrifugalkraft C, nämlich

$$C = \frac{Q}{g} u^2 l \sin \varphi.$$

Die zweite Komponente der Beschleunigung entspricht der Schwingung relativ zum rotierenden Raum. Wir können sie und die dazu gehörige Trägheitskraft noch weiter in zwei Anteile zerlegen, von denen der eine in die Richtung der oberen Stange fällt und der andere senkrecht dazu steht. Auf den ersten Anteil, der ebenfalls als eine Zentrifugalkraft zu bezeichnen ist, kommt es weiterhin nicht an, da er aus der Momentengleichung, die wir nachher als Gleichgewichtsbedingung aufstellen wollen, herausfällt. Der zweite Anteil sei mit T bezeichnet. Er hat unter der Voraussetzung, daß die Winkelbeschleunigung $\frac{d^2 \varphi}{dt^2}$ positiv ist, den in die Abbildung eingetragenen nach rechts unten hin gerichteten Pfeil und die Größe

$$T = \frac{Q}{g} l \frac{d^2 \varphi}{dt^2}.$$

Hierzu kommt endlich noch eine Beschleunigung, die senkrecht zur Stangenebene, also zur Zeichenebene von Abb. 17 steht, nämlich die Coriolisbeschleunigung samt der einer etwaigen Veränderung in der Winkelgeschwindigkeit u entsprechenden Beschleunigung, die ebenfalls senkrecht zur Stangenebene steht. Die zugehörige Zusatzkraft ist aber ohne Einfluß auf das Gleichgewicht, da sie nur eine geringe Verbiegung der Stangen hervorzubringen vermag, die bei den hier in Frage kommenden Geschwindigkeiten ganz bedeutungslos ist.

Wir schreiben jetzt die Momentengleichung für den oberen Stangendrehpunkt als Momentenpunkt an und erhalten damit die Gleichgewichtsbedingung

$$Tl + Sl\sin 2\varphi + Ql\sin\varphi - Cl\cos\varphi = 0. \tag{292}$$

Setzen wir die früher aufgestellten Werte ein, so geht die Gleichung über in

$$\begin{gathered}\frac{d^2\varphi}{dt^2}\left(\frac{Q}{g}l + \frac{G}{g}2l\sin^2\varphi\right) + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\frac{G}{g}l\sin 2\varphi + \frac{d\varphi}{dt}k\,2l\sin^2\varphi \\ + G\sin\varphi + Q\sin\varphi - \frac{Q}{g}u^2 l\sin\varphi\cos\varphi = 0.\end{gathered} \tag{293}$$

Hiermit haben wir die für die Koordinate φ gültige Bewegungsgleichung bereits gefunden. Um sie zu vereinfachen, setzen wir weiterhin voraus, daß zwar nicht der Winkel φ selbst, wohl aber die Änderungen, die er im Verlaufe der Schwingung erfährt, als klein betrachtet werden dürfen, d. h. wir setzen, wie es schon in früheren Fällen öfters geschehen ist,

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon, \tag{294}$$

so daß φ_0 irgendeinen mittleren, während der Schwingung konstanten Wert des Ausschlages und ε eine mit der Zeit veränderliche kleine Größe bedeutet. Die Differentialquotienten von φ gehen hiermit in die von ε über. Auch diese Differentialquotienten sind als klein von derselben Ordnung wie ε selbst zu betrachten, da die Schwingungen, wie uns von vornherein bekannt ist, nicht so schnell erfolgen, daß die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen von anderer Größenordnung als die Wege werden könnten. Die Produkte aus ε und seinen Differentialquotienten können daher gegen die nur von der ersten Ordnung kleinen Glieder vernachlässigt werden. Hiermit erhält man als Bewegungsgleichung für ε die lineare Differentialgleichung

$$\begin{gathered}\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}\left(\frac{Q}{g}l + \frac{G}{g}2l\sin^2\varphi_0\right) + \frac{d\varepsilon}{dt}k\,2l\sin^2\varphi_0 \\ + \varepsilon\left((G+Q)\cos\varphi_0 - \frac{Q}{g}u^2 l\cos 2\varphi_0\right) + (G+Q)\sin\varphi_0 \\ - \frac{Q}{g}u^2 l\sin\varphi_0\cos\varphi_0 = 0,\end{gathered} \tag{295}$$

Hierin kommt außer ε und konstanten Größen noch die während des Regulierungsvorganges veränderliche, aber jedenfalls nur innerhalb enger Grenzen schwankende Winkelgeschwindigkeit u der Regulatorspindel vor. Wir setzen daher

$$u = u_0 + \eta, \tag{296}$$

indem wir unter u_0 jenen konstanten Wert verstehen, der beim Fehlen von Schwingungen, also für $\varepsilon = 0$ zu dem konstanten Regulatorausschlage φ_0 gehört, während η eine Größe ist, die wir als klein von derselben Ordnung wie ε zu betrachten haben. Setzen wir dies ein und vernachlässigen wiederum die von höherer Ordnung kleinen Größen, wobei wir noch von den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{Q}{g}\, l + \frac{G}{g}\, 2l \sin^2 \varphi_0 \\ a_2 &= k 2l \sin^2 \varphi_0 \end{aligned}\right\} \tag{297}$$

Gebrauch machen, so geht die Differentialgleichung über in

$$\begin{aligned} a_1 \frac{d^2 s}{dt^2} + a_2 \frac{ds}{dt} &+ \varepsilon\left((G + Q)\cos\varphi_0 - \frac{Q}{g}\, u_0^2 l \cos 2\varphi_0\right) \\ &- \eta\, \frac{Q}{g}\, u_0 l \sin 2\varphi_0 + (G + Q)\sin\varphi_0 \\ &- \frac{Q}{g}\, u_0^2 l \sin\varphi_0 \cos\varphi_0 = 0. \end{aligned} \tag{298}$$

Eine Lösung dieser Gleichung muß jedenfalls auch $\varepsilon = 0$ und $\eta = 0$ sein; sie entspricht dem stationären Zustande, in dem überhaupt keine Schwingungen vorkommen. Hieraus folgt, daß sich die von ε und η freien Glieder, die überdies endliche Werte haben, gegeneinander wegheben müssen. Man hat daher zwischen φ_0 und u_0 die Beziehung

$$(G + Q)\sin\varphi_0 - \frac{Q}{g}\, u_0^2 l \sin\varphi_0 \cos\varphi_0 = 0, \tag{299}$$

die sich natürlich auch auf einfachere Weise unmittelbar hätte ableiten lassen. Berücksichtigt man dies und macht davon zugleich zur Vereinfachung des Koeffizienten von ε Gebrauch, so erhält man

$$a_1 \frac{d^2 s}{dt^2} + a_2 \frac{ds}{dt} + \varepsilon\, \frac{Q}{g}\, u_0^2 l \sin^2\varphi_0 - \eta\, \frac{Q}{g}\, u_0 l \sin 2\varphi_0 = 0. \tag{300}$$

Für die hierin vorkommenden Konstanten führen wir noch die ferneren Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} a_3 &= \frac{Q}{g}\, u_0^2 l \sin^2 \varphi_0 \\ a_4 &= \frac{Q}{g}\, u_0 l \sin 2\varphi_0 \end{aligned}\right\} \qquad (301)$$

ein, womit die Bewegungsgleichung ihre endgültige Form

$$a_1 \frac{d^2 \varepsilon}{d t^2} + a_2 \frac{d\varepsilon}{dt} + a_3 \varepsilon - a_4 \eta = 0 \qquad (302)$$

erhält. Hierbei ist zu beachten, daß die Koeffizienten a stets positive Werte bedeuten, die sich für eine gegebene Maschine und für eine bestimmte Wahl des mittleren Regulatorausschlags φ_0, um den herum die Schwingungen untersucht werden sollen, ohne weiteres angeben lassen. Nur die Bestimmung des Dämpfungsfaktors k, der in a_2 vorkommt, kann dabei Schwierigkeiten machen. Wenn man in den Stand gesetzt werden soll, den Verlauf des Schwingungsvorganges vorauszusagen, muß man aber den Wert von k jedenfalls kennen, also, wenn keine genaueren Unterlagen zu seiner Ermittelung bekannt sind, ihn vorher schätzungsweise angenommen haben.

Zu Gl. (302) tritt noch eine zweite Gleichung, die sich auf den anderen Freiheitsgrad des ganzen Verbandes bezieht. Sie lautet

$$\Theta \frac{du_1}{dt} = M - M_0, \qquad (303)$$

wenn unter Θ das Trägheitsmoment des Schwungrades, unter M das zur Zeit t wirkende, treibende Moment und unter M_0 dessen Wert für die Regulatorstellung $\varphi = \varphi_0$ verstanden wird, wobei zu beachten ist, daß M_0 zugleich den Wert des sich der Drehung der Maschine widersetzenden Momentes der äußeren Kräfte angibt, die die Belastung der Maschine bilden. Hierbei ist zu erwähnen, daß das beschleunigende Moment $M - M_0$ allerdings nicht ausschließlich zur Beschleunigung des Schwungrades, sondern ein kleiner Teil davon auch zur Beschleunigung der Regulatorbewegung dient. Dieser Teil ist aber so un-

bedeutend gegenüber dem anderen, daß er ohne weiteres vernachlässigt werden durfte.

Mit u_1 ist die Winkelgeschwindigkeit der Schwungradwelle bezeichnet. Diese steht in einem durch Räderübersetzungen festgelegten Verhältnisse zur Winkelgeschwindigkeit u der Regulatorspindel, die in den vorhergehenden Gleichungen vorkam. Wir bezeichnen das Übersetzungsverhältnis mit n, indem wir

$$u_1 = nu = n(u_0 + \eta)$$

setzen, womit die vorhergehende Gleichung übergeht in

$$n\theta \frac{d\eta}{dt} = M - M_0.$$

Da nur kleine Abweichungen der Regulatorstellung aus der mittleren Lage φ_0 während des Schwingungsvorganges in Aussicht zu nehmen sind, können wir nach Gl. (291)

$$M = M_0 + \varepsilon \left(\frac{dF}{d\varphi}\right)_0 \tag{304}$$

setzen. Hiermit erhalten wir

$$n\theta \frac{d\eta}{dt} = \varepsilon \left(\frac{dF}{d\varphi}\right)_0.$$

Der Differentialquotient $\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)_0$ ist jedenfalls negativ, da die Leistung der Maschine abnimmt, wenn der Regulator in die Höhe geht. Der Absolutbetrag des Differentialquotienten ist für ein gegebenes φ_0 eine konstante Größe, die von der Einrichtung der Steuerung abhängt und, wenn diese bekannt ist, ohne Schwierigkeit ermittelt werden kann. Zur Abkürzung setzen wir

$$K = -\frac{\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)_0}{n\theta}, \tag{305}$$

so daß also K eine positive gegebene Konstante bedeutet. Die zweite Bewegungsgleichung geht hiermit über in

$$\frac{d\eta}{dt} = -K\varepsilon. \tag{306}$$

Aus den Gleichungen (302) und (306) läßt sich nun leicht eine der Variabeln η oder ε eliminieren. Differentiiert man

Gl. (302) nach t und setzt den Wert aus Gl. (306) ein, so findet man

$$a_1 \frac{d^3 \varepsilon}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + a_3 \frac{d\varepsilon}{dt} + a_4 K \varepsilon = 0. \tag{307}$$

Drückt man umgekehrt ε mit Hilfe von Gl. (306) in η aus, so geht Gl. (302) über in

$$a_1 \frac{d^3 \eta}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 \eta}{dt^2} + a_3 \frac{d\eta}{dt} + a_4 K \eta = 0, \tag{308}$$

d. h. ε und η müssen derselben Differentialgleichung genügen. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist von der Form

$$\varepsilon = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + A_3 e^{\alpha_3 t}, \tag{309}$$

in der die Koeffizienten A die willkürlichen Integrationskonstanten sind, während die Konstanten α die drei Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$a_1 \alpha^3 + a_2 \alpha^2 + a_3 \alpha + a_4 K = 0 \tag{310}$$

bedeuten. Der Schwingungsverlauf hängt von den Werten dieser Wurzeln ab. Eine der Wurzeln ist jedenfalls reell. Eine reelle Wurzel der Gleichung muß aber notwendig negativ sein, da die Koeffizienten der Gleichung sämtlich positive Werte haben. Ein Glied mit einem negativen Exponenten in Gl. (309) stellt für sich genommen eine aperiodisch gedämpfte Bewegung dar, die mit der Zeit erlischt. Wenn alle drei Wurzeln reell wären, hätten wir daher überhaupt keine Schwingung des Regulators nach einer Belastungsänderung der Maschine zu erwarten, sondern einen aperiodischen Übergang in die der neuen Belastung entsprechende Gleichgewichtslage.

Die kubische Gleichung kann aber und wird auch in der Regel zwei komplexe Wurzeln besitzen, die miteinander konjugiert sind. Es kommt dann darauf an, ob der reelle Anteil dieser Wurzeln positiv oder negativ ist. Ist er positiv, so wachsen die Schwingungsausschläge mit der Zeit immer mehr an; der Gang der Maschine schwankt dann in weiten Grenzen und die

Regulierung ist unbrauchbar. Dagegen nehmen die Schwingungen immer mehr ab und die Regulierung ist brauchbar, wenn der reelle Anteil der Wurzeln negativ ist.

Hierüber entscheidet ein einfacher Satz aus der Lehre von den Gleichungen. Hat man nämlich eine kubische Gleichung mit positiven Koeffizienten

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

so kann sie keine komplexen Wurzeln mit positiven reellen Anteilen besitzen, wenn zwischen den Koeffizienten die Bedingung

$$ab > c$$

erfüllt ist. Schreibt man nämlich die Gleichung

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0,$$

so bestehen, wie die Ausrechnung lehrt, zwischen den Wurzeln $x_1 x_2 x_3$ und den Koeffizienten abc die Beziehungen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -a \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 &= b \\ x_1 x_2 x_3 &= -c. \end{aligned}$$

Ist nun x_1 die notwendig negative reelle Lösung und sind x_2 und x_3 die komplexen Wurzeln und schreiben wir dafür

$$x_1 = -r; \quad x_2 = p + iq; \quad x_3 = p - iq,$$

so gehen die vorhergehenden Gleichungen über in

$$\begin{aligned} r - 2p &= a \\ p^2 + q^2 - 2pr &= b \\ r(p^2 + q^2) &= c. \end{aligned}$$

Multipliziert man die beiden ersten Gleichungen miteinander und subtrahiert davon die dritte, so erhält man nach einfacher Umformung

$$ab - c = -2p(r^2 + p^2 + q^2 - 2pr) = -2p(r^2 + b).$$

Da b positiv ist, hat demnach p das entgegengesetzte Vorzeichen von $(ab - c)$ und wenn ab größer ist als c, muß daher p notwendig negativ sein, womit der Satz bewiesen ist.

Wenden wir den Satz auf Gl. (310) an, so folgt als Bedingung für den stabilen Gang, daß

$$a_2 a_3 > a_1 a_4 K \tag{311}$$

sein muß. Setzt man für die Koeffizienten a ihre Werte aus den Gleichungen (297) und (301) ein, so lautet die Bedingung

$$u_0 k \sin^2 \varphi_0 > \frac{K \cos \varphi_0}{g} (Q + 2 G \sin^2 \varphi_0), \tag{312}$$

wobei noch zu beachten ist, daß zwischen u_0 und φ_0 die durch Gleichung (299) ausgesprochene Beziehung besteht.

Die Erfüllung der Ungleichung (312) hängt insbesondere von dem Werte des Dämpfungsfaktors k ab. Wenn man $k = 0$ setzt, also einen vollständig reibungsfreien Gang des Regulators annimmt, wird die Bedingung nicht erfüllt und die Regulierung daher unbrauchbar.

§ 51. Fortsetzung; konstante Reibung.

Wir haben soeben erkannt, wie wichtig die Rolle ist, die der Reibung des Regulators bei dem Regulierungsvorgange zukommt. Hierdurch werden wir zu der Frage gedrängt, wie sich die Bedingungen für eine brauchbare Regulierung gestalten, wenn man auch noch die konstante Reibung in den Rechnungsansatz aufnimmt. Bisher hatten wir die konstante Reibung vernachlässigt, aber es ist von vornherein klar, daß sie unter Umständen größer und daher auch von größerem Einflusse auf die Regulatorschwingungen sein kann, als die mit der Geschwindigkeit proportionale Reibung. Es läßt sich auch voraussehen, daß, wenn diese so klein ist, daß sie vernachlässigt und $k = 0$ gesetzt werden kann, die daneben weiter bestehende konstante Reibung den instabilen Gang der Maschine, der sonst für $k = 0$ eintreten würde, unter geeigneten Umständen zu verhindern vermag.

Die Berücksichtigung der konstanten Reibung erschwert freilich die Rechnung ganz bedeutend. Und zwar rührt die Erschwerung davon her, daß für die Regulatorbewegung nicht

mehr eine einzige Gleichung für beide Bewegungsrichtungen gilt, sondern daß man zwei Gleichungen zu benutzen hat, von denen sich die eine auf den im Steigen begriffenen und die andere auf den niedersinkenden Regulator bezieht. Es verhält sich damit ähnlich, wie bei den schon im 4. Bande behandelten Schwingungen eines materiellen Punktes, die durch eine konstante Reibung gedämpft sind (§ 7, S. 52 der 3. Aufl.), wenn auch der Zusammenhang hier erheblich verwickelter ist.

Die Erschwerung, die hierdurch herbeigeführt wird, geht so weit, daß sie eine allgemeine Untersuchung der Bedingungen für den stabilen Gang bei Beachtung der konstanten Reibung überhaupt nicht vollständig zu Ende zu führen gestattet, weil die Formeln, die dazu nötig wären, zu umständlich würden. Dagegen steht gar nichts im Wege, ein Verfahren anzugeben, nach dem man in jedem einzelnen zahlenmäßig gegebenen Falle entscheiden kann, ob die Bewegung instabil ist oder nicht.

Als ausreichend für den Zweck dieser Betrachtungen wird es schon anzusehen sein, wenn man sich über den Einfluß der konstanten Reibung unter der Voraussetzung Rechenschaft zu geben vermag, daß sie allein auftritt, k also gleich Null ist. Die hier anzustellenden Betrachtungen werden aber durch diese Voraussetzung nicht wesentlich vereinfacht und es mag daher vorläufig angenommen werden, daß die konstante und die der Geschwindigkeit proportionale Reibung zugleich nebeneinander auftreten.

Konstante, also von der Geschwindigkeit unabhängige Reibungen können an verschiedenen Stellen des Regulators vorkommen. Sie lassen sich aber jedenfalls für die Aufstellung der Bewegungsgleichung durch eine einzige Kraft F ersetzen. Darunter ist die auf die Koordinate x reduzierte Kraft zu verstehen. Sie widersetzt sich jederzeit der Bewegung. Wenn sich der Regulator hebt, solange also x, φ und ε im Wachsen begriffen sind, wirkt F nach abwärts. Solange dies geschieht, befindet sich der Regulator unter denselben Bedingungen, als wenn das Gewicht G unter Beiseitelassung der Reibung um den Betrag F erhöht wäre. Während der Regulator sinkt,

geht dagegen F nach aufwärts und für diesen Teil des ganzen Vorgangs ist daher $G - F$ an Stelle von G in die nach dem Muster des vorigen Paragraphen aufzustellende Bewegungsgleichung einzusetzen.

Hierbei mag sofort darauf hingewiesen werden, daß in einem praktisch vorliegenden Falle F jedenfalls nur einen kleinen Bruchteil von G ausmachen wird. Wir werden uns auch bald davon überzeugen, daß F sogar als unendlich klein gegenüber G angesehen werden muß, wenn trotz des Auftretens von F Schwingungen ε möglich sein sollen, die sich ebenfalls und zwar von der gleichen Ordnung als unendlich klein ansehen lassen sollen.

Zur Aufstellung der Bewegungsgleichung für den steigenden Regulator greifen wir auf die Betrachtungen zurück, die zu Gl. (298) geführt haben, wobei jetzt nur G um F zu vermehren ist. Der damals mit a_1 bezeichnete Koeffizient ist daher zu ersetzen durch

$$a^1{}_1 = \frac{Q}{g} l + \frac{G+F}{g} 2 l \sin^2 \varphi_0,$$

während a_2 von der Änderung nicht berührt wird. An Stelle von Gl. (298) erhalten wir daher jetzt

$$\begin{aligned} a_1{}^1 \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + a_2 \frac{d\varepsilon}{dt} + \varepsilon \left((G+F+Q)\cos\varphi_0 - \frac{Q}{g} u_0{}^2 l \cos 2\varphi_0\right) \\ - \eta \frac{Q}{g} u_0 l \sin 2\varphi_0 + (G+F+Q)\sin\varphi_0 \qquad (313) \\ - \frac{Q}{g} u^2{}_0 l \sin\varphi_0 \cos\varphi_0 = 0\,. \end{aligned}$$

In dieser Gleichung beziehen sich wie früher u_0 und φ_0 auf den stationären Gang ohne Regulatorschwingungen und zwar sind darunter jene zusammengehörenden Werte der Winkelgeschwindigkeit und der Regulatorstellung zu verstehen, die auch ohne Inanspruchnahme der Reibung miteinander verträglich sind. Wir haben also dafür die schon früher in Gl. (299) festgestellte Beziehung

$$G + Q - \frac{Q}{g} u_0{}^2 l \cos\varphi_0 = 0$$

anzunehmen, in der, wie ausdrücklich betont werden muß, G nicht um F zu vermehren ist. Beachtet man diese Beziehung, so geht Gl. (313) über in

$$a_1^1 \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + a_2 \frac{d\varepsilon}{dt} + \varepsilon \left(\frac{Q}{g} u_0^2 l \sin^2 \varphi_0 + F \cos \varphi_0\right) - \eta \frac{Q}{g} u_0 l \sin 2\varphi_0 + F \sin \varphi_0 = 0 .$$

Voraussetzung für die Gültigkeit dieser Gleichung ist es, daß ε und seine Differentialquotienten sowie η als kleine Größen betrachtet werden können. Das ist aber, wie aus der Gleichung hervorgeht, nur dann möglich, wenn $F \sin \varphi_0$ und daher auch F selbst von derselben Ordnung klein ist gegenüber den Koeffizienten der übrigen Glieder, d. h. F darf nur einen kleinen Bruchteil von G ausmachen. Wir vernachlässigen daher nur Glieder, die von der zweiten Ordnung klein sind oder von der Ordnung derjenigen, die früher schon außer Berücksichtigung blieben, wenn wir F in allen Koeffizienten gegenüber G streichen. Dann ist a_1^1 wieder durch a_1 zu ersetzen und die Gleichung geht mit Benützung der schon in Gl. (302) gebrauchten Abkürzungen über in

$$a_1 \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + a_2 \frac{d\varepsilon}{dt} + a_3 \varepsilon - a_4 \eta + F \sin \varphi_0 = 0 . \tag{314}$$

Diese Gleichung gilt, solange der Regulator im Steigen begriffen ist. Für den sinkenden Regulator erhält man die Bewegungsgleichung in derselben Weise, nämlich

$$a_1 \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + a_2 \frac{d\varepsilon}{dt} + a_3 \varepsilon - a_4 \eta - F \sin \varphi_0 = 0 \tag{315}$$

die sich von der vorigen nur durch das Vorzeichen von F im letzten Gliede unterscheidet.

Dazu kommt die andere Bewegungsgleichung, die sich auf die Winkelbeschleunigung des Schwungrades bezieht. Diese ist unabhängig von der Regulatorreibung und sie kann daher sowohl für den Aufwärts- als den Niedergang des Regulators in der ihr schon früher in Gl. (306) gegebenen Form

$$\frac{d\eta}{dt} = -K\varepsilon$$

übernommen werden.

Wenn wir in derselben Weise, wie es früher geschehen war, die Variable η aus der letzten Gleichung und einer der Gleichungen (314) oder (315) eliminieren, so erhalten wir, da das konstante Glied $F \sin \varphi_0$ hierbei wegfällt, die mit Gl. (307) übereinstimmende und für beide Bewegungsrichtungen des Regulators geltende Differentialgleichung

$$a_1 \frac{d^3 \varepsilon}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + a_3 \frac{d \varepsilon}{dt} + a_4 K \varepsilon = 0. \qquad (316)$$

Anders wäre es freilich mit der Differentialgleichung für η, die man durch Elimination von ε erhält und in der das von F abhängige und daher mit der Bewegungsrichtung das Vorzeichen wechselnde Glied stehen bleibt. Diese Gleichung ist aber für die weitere Ausrechnung nicht nötig.

Wir wissen schon, daß die allgemeine Lösung von Gl. (316) in der ihr bereits in Gl. (309) gegebenen Form

$$\varepsilon = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t} + Ce^{\alpha_3 t} \qquad (317)$$

dargestellt werden kann. Der einzige, freilich sehr wesentliche Unterschied gegen früher besteht darin, daß die Integrationskonstanten ABC nach jeder Bewegungsumkehr neue Werte erhalten, da an den Umkehrstellen eine Stetigkeitsunterbrechung stattfindet. In der Tat drückt sich der Einfluß der konstanten Reibung nur in diesen sprungweisen Änderungen der die Schwingungsamplituden bestimmenden Koeffizienten ABC aus, da im übrigen die Lösung in Gl. (317) mit der früheren Lösung in Gl. (309) vollständig übereinstimmt. Das Bewegungsgesetz für jeden zwischen zwei Umkehrpunkten liegenden Regulatorhub ist daher genau dasselbe, als wenn die konstante Reibung fehlte.

Unter α_1 sei, wie schon früher, die reelle — und notwendig negative — Lösung der charakteristischen Gl. (310) verstanden, während α_2 und α_3 die konjugiert komplexen Wurzeln dieser Gleichung bedeuten. Auch die Koeffizienten B und C müssen dann, damit Gl. (317) einen reellen Wert für ε liefert,

konjugiert komplexe Größen sein. Will man das Auftreten komplexer Größen in der Lösung vermeiden, so setze man

$$\alpha_2 = p + iq, \quad \alpha_3 = p - iq,$$

womit Gl. (317) übergeht in

$$\varepsilon = Ae^{\alpha_1 t} + e^{pt}(D \sin qt + E \cos qt). \qquad (318)$$

Die darin auftretenden rellen Konstanten D und E stehen mit den vorher gebrauchten komplexen Konstanten B und C in dem Zusammenhange

$$D = i(B - C), \quad E = B + C. \qquad (319)$$

Für die weitere Ausrechnung ist es aber am bequemsten, die Lösung in der Form (317) zunächst beizubehalten.

Es handelt sich jetzt nur noch um die Ermittelung der Integrationskonstanten für eine Reihe aufeinander folgender Hübe des Regulators aus den zur Verfügung stehenden Grenzbedingungen. Hierzu betrachten wir insbesondere die Schwingungen, die eintreten, wenn die Maschine eine plötzliche Entlastung erfährt. Vor der Entlastung soll die Maschine im stationären Gange und der Regulator in jener Stellung gewesen sein, die der zugehörigen Belastung der Maschine nach Gl. (299) entspricht.

Nachdem die Entlastung eingetreten ist, erfährt das Schwungrad eine Beschleunigung und nach kurzer Zeit beginnt infolge der größeren Winkelgeschwindigkeit der Regulator sich zu heben. Wir rechnen die Zeiten von diesem Augenblicke an und haben zunächst für $t = 0$ die Grenzbedingung $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$. Ferner läßt sich auch der Wert von ε für diesen Augenblick angeben. Der neuen Belastung der Maschine entspricht nämlich ein neuer mittlerer Stand des Regulators, bei dem so viel Dampf in die Maschine geführt wird, daß dessen Arbeitsleistung gerade ausreicht, um die jetzt bestehenden Bewegungswiderstände zu überwinden. Welche Stellung dies ist, muß schon vorher bei dem Entwurfe der Maschine festgestellt sein und bei der Untersuchung, mit der wir uns jetzt beschäftigen,

dürfen wir diese Frage als bereits gelöst ansehen. Wir können auch sagen, daß die neue mittlere Regulatorstellung aus der Auflösung von Gl. (291) nach φ gefunden wird. Der Unterschied zwischen dem jetzt zutreffenden und dem vor der Entlastung bestehenden Werte von φ_0 liefert den Wert von ε zu Zeit $t = 0$ und zwar ist ε für den Fall einer Entlastung zu dieser Zeit negativ.

Endlich kann auch der Wert von η für $t = 0$ aus bekannten Angaben ermittelt werden. Dem neuen Werte von φ_0 entspricht nämlich ein neuer Wert u_0 der Winkelgeschwindigkeit für den Beharrungszustand bei der neuen Belastung, der aus Gl. (299) berechnet werden kann. Unter η zur Zeit $t = 0$ ist der Unterschied zwischen der jetzt gerade bestehenden Winkelgeschwindigkeit und dem hiernach berechneten Werte von u_0 zu verstehen. Die zur Zeit $t = 0$ bestehende Winkelgeschwindigkeit stimmt freilich nicht ganz mit der Winkelgeschwindigkeit im Beharrungszustande vor der Entlastung überein, da die Winkelgeschwindigkeit schon etwas anwachsen muß, bis der Regulator entgegen der konstanten Reibung sich zu heben beginnen kann. Aber die in diesem Augenblicke zutreffende Winkelgeschwindigkeit kann ebenfalls aus Gl. (299) ermittelt werden, indem man darin G durch $G + F$ ersetzt und unter φ_0 den dem früheren Beharrungszustande entsprechenden Wert versteht.

Bezeichnen wir jetzt die in dieser Weise für $t = 0$ berechneten Werte von ε und η mit ε_0 und η_0, so folgen die Integrationskonstanten $A_1 B_1 C_1$ für den sich nach $t = 0$ anschließenden ersten Regulatorhub aus den folgenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_0 &= A_1 + B_1 + C_1, \\ 0 &= A_1\alpha_1 + B_1\alpha_2 + C_1\alpha_3, \\ a_4\eta_0 &= a_1(A_1\alpha_1^2 + B_1\alpha_2^2 + C_1\alpha_3^2) + a_3\varepsilon_0 + F\sin\varphi_0 \end{aligned}\right\} . \quad (320)$$

Die letzte dieser Gleichungen geht aus Gl. (314) hervor. Alle in den Gleichungen vorkommenden Größen außer $A_1 B_1 C_1$ sind auf Grund der Vorarbeiten als bereits bekannt anzusehen

und die Auflösung nach den Unbekannten $A_1\, B_1\, C_1$ kann daher keine Schwierigkeiten verursachen.

Nun muß die Zeit T berechnet werden, die bis zur Beendigung des ersten Regulatorhubs verstreicht. Wir finden sie durch Auflösung der transzendenten Gleichung

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = A_1 \alpha_1 e^{\alpha_1 t} + B_1 \alpha_2 e^{\alpha_2 t} + C_1 \alpha_3 e^{\alpha_3 t} = 0 \tag{321}$$

nach t und zwar ist unter T die auf Null folgende erste posisive Wurzel dieser Gleichung zu verstehen. Die Auflösung kann durch Probieren erfolgen, nachdem man die darin vorkommenden komplexen Ausdrücke zuvor in der schon bekannten Weise in reelle Formen gebracht hat.

Nachdem dies geschehen ist, können wir zunächst die Bewegung innerhalb der Zeit des ersten Regulatorhubs als vollständig bekannt betrachten und insbesondere auch zahlenmäßig angeben, welche Werte ε und η am Schlusse des ersten Hubes erlangt haben. Bezeichnen wir diese Werte mit ε_1 und η_1, so ist

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= A_1 e^{\alpha_1 T} + B_1 e^{\alpha_2 T} + C_1 e^{\alpha_3 T}, \\ a_4 \eta_1 &= a_1 (A_1 \alpha_1^2 e^{\alpha_1 T} + B_1 \alpha_2^2 e^{\alpha T} + C_1 \alpha_3^2 e^{\alpha_3 T}) \\ &\qquad\qquad + a_3 \varepsilon_1 + F \sin \varphi_0 \end{aligned}\right\}. \tag{322}$$

An den ersten Hub schließt sich jetzt der zweite an, für den die mit $A_2\, B_2\, C_2$ zu bezeichnenden Konstanten von neuem zu ermitteln sind. Das geschieht im wesentlichen wie zuvor, nämlich durch Auflösen der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= A_2 + B_2 + C_2, \\ 0 &= A_2 \alpha_1 + B_2 \alpha_2 + C_2 \alpha_3, \\ a_4 \eta_1 &= a_1 (A_2 \alpha_1^2 + B_2 \alpha_2^2 + C_2 \alpha_3^2) + a_3 \varepsilon_1 - F \sin \varphi_0 \end{aligned}\right\} \tag{323}$$

nach $A_2\, B_2\, C_2$. Beim Anschreiben dieser Gleichungen wurde nämlich vorausgesetzt, daß in dem Ausdrucke für ε während des zweiten Regulatorhubs die Zeit t vom Beginne dieses Hubs an gerechnet wird, was für die Rechnung am bequemsten und jedenfalls zulässig ist, da ε für jeden neuen Hub ohnehin durch eine von den früheren unabhängige neue Gleichung darzustellen ist.

Man sieht nun schon, daß die Rechnung in derselben Weise beliebig weitergeführt werden kann. Nachdem $A_2 B_2 C_2$ gefunden sind, erhält man die Werte von ε_2 und η_2 am Ende des zweiten Hubs, worauf die Gleichungen (320) mit diesen Werten an Stelle von ε_0 und η_0 von neuem aufzulösen sind, nachdem darin $A_1 B_1 C_1$ durch $A_2 B_2 C_2$ ersetzt wurden.

Die Auflösung der Gleichungen (320) liefert übrigens

$$A_1 = \frac{\varepsilon_0 \alpha_2 \alpha_3 + N}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)},$$

$$B_1 = -\frac{\varepsilon_0 \alpha_1 \alpha_3 + N}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_3)},$$

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \alpha_1 \alpha_2 + N}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_3)},$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

$$N = \frac{a_4}{a_1} \eta_0 - \frac{a_3}{a_1} \varepsilon_0 - \frac{F \sin \varphi_0}{a_1}$$

und dieselben Formeln geben auch die Auflösung der Gleichungen (323) an, wenn in N das Vorzeichen des mit F behafteten Gliedes umgekehrt und die Bezeichnungen im übrigen entsprechend vertauscht werden.

Die Ausführung der Rechnung für ein bestimmtes Zahlenbeispiel ist zwar mühsam, aber nach der gegebenen Anweisung stets ohne Schwierigkeit durchführbar. Freilich läßt sich eine allgemeine Formel für den Mindestwert, den F haben muß, um ein fortgesetztes Anwachsen der Schwingungsausschläge zu verhüten, nicht daraus entnehmen. Man ist vielmehr genötigt, die Rechnung von Fall zu Fall von neuem zu wiederholen.

Man bemerkt indessen von vornherein, daß es bei einem gegebenen Werte von F insbesondere auch noch auf die Größe der anfänglichen Ausschläge, also auf ε_0 und η_0 oder auf das Maß des vorgenommenen Belastungswechsels der Maschine ankommt, ob der Regulator nachher bald wieder zur Ruhe kommt oder ob die Regulierung instabil ist und daher versagt. Falls nämlich die mit der Geschwindigkeit proportionale Reibung gleich Null ist oder für sich genommen nicht ausreicht, um eine stabile Regulierung herbeizuführen, werden die reellen Anteile von

α_2 und α_3 positiv und im Verlauf eines Hubes wachsen alsdann die Koeffizienten B und C auf $Be^{\alpha_2 T}$ und $Ce^{\alpha_3 T}$ an, d. h. sie vergrößern sich proportional mit ihren ursprünglichen Werten. Hingegen ist die Verminderung, die die Koeffizienten hierauf bei der Umkehrung der Bewegungsrichtung erfahren, wegen des in N vorkommenden, mit F behafteten konstanten Gliedes den ursprünglichen Werten nicht proportional, sondern bei kleineren Ausschlägen verhältnismäßig größer als bei großen. Je stärker die Schwingungen von Anfang an sind, oder je größer der Belastungswechsel war, der zu den Schwingungen führte, desto mehr besteht demnach die Gefahr, daß die Schwingungen weiterhin immer mehr anwachsen, während Schwingungen mit kleineren Ausschlägen leichter und auch schon früher wieder erlöschen.

§ 52. **Der Rückdruck der Steuerung.**

Zur Vereinfachung der Betrachtungen war zunächst vorausgesetzt worden, daß die Regulierung der Maschine durch Verstellen einer Drosselklappe bewirkt werde. Diese Voraussetzung war jedoch nur insofern von Bedeutung, als durch sie ein Fall vorläufig ausgeschlossen werden sollte, auf den wir jetzt noch etwas näher eingehen wollen. Wir nehmen nämlich jetzt an, daß der Regulator in Verbindung mit einem zur Steuerung der Maschine gehörigen Maschinenteile steht, der selbst irgendeine etwa durch Exzenter hervorgerufene schwingende Bewegung ausführt. Wenn sich der Regulator hebt, verstellt er diesen Teil und damit das ganze Gestänge der Steuerung, so daß dadurch der Dampfzutritt in den Zylinder, insbesondere das Expansionsverhältnis eine Änderung erfährt.

Um die Verstellung vorzunehmen, muß der Regulator auf den bewegten Maschinenteil, mit dem er verbunden ist, eine Kraft ausüben, die teils auf Reibungen zurückzuführen und insoweit wie früher zu behandeln ist, andernteils aber zur Beschleunigung nicht nur des betreffenden Maschinenteils selbst, sondern auch der übrigen damit verbundenen bewegten Teile

der ganzen Steuerung dient. Dieser Teil der Verstellungskraft ist abhängig von der wechselnden Lage der Steuerungsteile und von den Geschwindigkeiten, die diesen Teilen abgesehen von der Regulatorbewegung bereits zukommen. Die Reaktion dieser Kraft auf den Regulator wird als der Rückdruck der Steuerung bezeichnet. Bei den Betrachtungen der vorigen Paragraphen war vorausgesetzt worden, daß ein solcher Rückdruck nicht bestehe. Man kann aber die früheren Betrachtungen entsprechend ergänzen, sobald man den Rückdruck kennt, indem man zu dem Gewichte G der Regulatorhülse noch ein mit der Zeit veränderliches Glied hinzufügt, das den Rückdruck darstellt. Ich werde mich daher hier nur damit beschäftigen, eine Formel für den Rückdruck aufzustellen. Dieses Vorgehen empfiehlt sich schon deshalb, weil es in vielen Fällen zulässig sein wird, den Rückdruck entweder ganz zu vernachlässigen oder ihn in anderer Weise durch Einrechnung in die übrigen Kräfte angenähert zu berücksichtigen, nachdem man sich zuerst ein Urteil über die Größe des Rückdrucks verschafft hat. Auf ein besonderes Beispiel soll übrigens hier nicht hingewiesen, sondern die Betrachtung ganz allgemein durchgeführt werden.

Die Maschine samt Regulator bildet, wie schon früher bemerkt wurde, einen Verband mit zwei Freiheitsgraden. Als allgemeine Koordinaten zur Beschreibung der augenblicklichen Stellung kann man etwa den von einer bestimmten Normalstellung aus gezählten Kurbelwinkel ψ und den früher bereits mit x bezeichneten Hub des Regulators wählen.

Zur Aufstellung der Differentialgleichung für die Bewegung des Regulators wollen wir uns des Prinzips von d'Alembert bedienen. Die Geschwindigkeit eines Massenteilchens m, das zu irgendeinem der bewegten Teile des ganzen Verbandes gehören kann, läßt sich als geometrische Summe aus zwei Gliedern auffassen, so daß das erste Glied von der Bewegung der Maschine bei konstantem x herrührt, wozu dann noch eine von dem Hube des Regulators abhängige und der Geschwindigkeit $\dot{x}$ proportionale Geschwindigkeit hinzutritt. Das zweite Glied kommt nur bei den zum Regulator und zur Steuerung

gehörigen Massenteilen vor, während die Bewegung des Schwungrades und der zum Kurbelmechanismus gehörigen Teile durch das erste Glied schon vollständig dargestellt wird. Wir setzen indessen allgemein

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + \mathfrak{p}\dot{x},$$

womit die beiden Komponenten von $\mathfrak{v}$ ihre Bezeichnung erhalten haben. Der Koeffizient $\mathfrak{p}$ von $\dot{x}$ ist eine gerichtete Größe, die für jedes Massenteilchen einen anderen Wert hat und zugleich für dasselbe Massenteilchen eine Funktion der die augenblickliche Stellung des ganzen Verbandes beschreibenden Koordinaten ψ und x ist. Für die nicht zum Regulator oder zur Steuerung gehörigen Teile ist $\mathfrak{p}$ jederzeit gleich Null.

Für die Beschleunigung von m erhalten wir den Ausdruck

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{d\mathfrak{v}_0}{dt} + \mathfrak{p}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d\mathfrak{p}}{dt}\frac{dx}{dt}$$

und die Multiplikation mit m liefert nach einem Vorzeichenwechsel die an m anzubringende Trägheitskraft. Wir können nun das Gleichgewicht der Trägheitskräfte mit den für den ganzen Verband als äußere zu betrachtenden Kräften untersuchen und wenden dazu das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten für eine virtuelle Verschiebung δx bei konstantem ψ an. Als äußere Kräfte, die hierbei eine Arbeit leisten, kommen in Betracht die Gewichte aller zum Regulator und zum Steuerungsgestänge gehörigen Teile, ferner auch bei einem Regulator mit Federbelastung die von der Feder ausgeübte Kraft, sowie die Reibungen, die sich der Änderung des Regulatorhubs widersetzen. Dagegen kommen, wie noch ausdrücklich betont werden soll, die Zentrifugalkräfte am Regulator nicht unter den äußeren Kräften vor, da diese schon in dem allgemeinen Ausdrucke für die Trägheitskräfte mit eingerechnet sind. Alle diese äußeren Kräfte denken wir uns in der gewöhnlichen, insbesondere bei dem Verfahren von Lagrange ausführlich besprochenen Weise auf die Koordinate x reduziert. Wir wollen uns jedoch, um sonst leicht mögliche Verwechselungen des Vorzeichens zu vermeiden, die reduzierte Kraft X positiv gerechnet denken,

wenn sie, wie es in der Regel zu erwarten ist, nach abwärts geht, d. h. wenn sie einer Vermehrung δx des Regulatorhubs entgegenwirkt. Die Arbeit der äußeren Kräfte stellt sich dann in der Form

$$-X\delta x$$

dar. — Die Verschiebung, die das Massenteilchen m erfährt, ergibt sich aus dem für $\mathfrak{v}$ gebildeten Ausdruck zu

$$\mathfrak{p}\,\delta x$$

und die Arbeit der an m angebrachten Trägheitskraft daher zu

$$-m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\mathfrak{p}\,\delta x.$$

Setzt man die Summe aller Arbeiten gleich Null, so erhält man nach Streichen des allen Gliedern gemeinsamen Faktors δx die Bewegungsgleichung für den Regulator

$$X+\sum m\frac{d\mathfrak{v}_0}{dt}\,\mathfrak{p}+\frac{d^2x}{dt^2}\sum m\mathfrak{p}^2+\frac{dx}{dt}\sum m\mathfrak{p}\frac{d\mathfrak{p}}{dt}=0.$$

Die Summen sind wegen des in allen vorkommenden Faktors $\mathfrak{p}$ nur auf die zum Regulator und zum Steuerungsgestänge gehörigen Massen zu erstrecken. Da wir die Gleichung nur zur Ermittelung des Steuerungsrückdruckes gebrauchen wollen, spalten wir jede Summe in zwei Teile, von denen sich der erste über die zum Regulator und der zweite über die zum Steuerungsgestänge gehörigen Massen erstreckt. Wenn der Regulator, so wie wir es früher vorausgesetzt hatten, auf eine Drosselklappe einwirkte, deren Masse vernachlässigt werden kann, so kämen in der Bewegungsgleichung nur die ersten Teile der Summen vor und die Gleichung würde sich dann auf die von früher her bekannte Form bringen lassen. Neu hinzu kommen jetzt gegen früher nur die vom zweiten Teil herrührenden Glieder, und diese lassen sich daher zu einem als Summanden von X auftretenden Werte zusammenfassen, der den Rückdruck der Steuerung angibt. Bezeichnen wir diesen Rückdruck mit R und deuten wir durch Anhängen eines Zeigers 2 an, daß sich in der folgenden Gleichung die Summen

nur über die zum Steuerungsgestänge gehörigen Massen zu erstrecken haben, so erhalten wir

$$R = \sum_2 m \frac{d\mathfrak{v}_0}{dt}\mathfrak{p} + \frac{d^2x}{dt^2}\sum_2 m\mathfrak{p}^2 + \frac{dx}{dt}\sum_2 m\mathfrak{p}\frac{d\mathfrak{p}}{dt}. \quad (324)$$

Den einzelnen Gliedern dieses Ausdrucks können wir noch eine anschaulichere Deutung geben. Das erste Glied können wir als die nach der gewöhnlichen Vorschrift auf die Koordinate x reduzierte und nach abwärts als positiv gerechnete Kraft bezeichnen, die von den Trägheitskräften an der Steuerung beim stationären Gange der Maschine (also bei konstantem x) herrührt. Für die im zweiten Gliede vorkommende Summe setzen wir den Buchstaben M und bezeichnen sie als die auf die Koordinate x reduzierte Masse der Maschine. Dann läßt sich R schreiben

$$R = \sum_2 m \frac{d\mathfrak{v}_0}{dt}\mathfrak{p} + M\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{dM}{dt}\frac{dx}{dt}. \quad (325)$$

Bei der Anwendung der Formel muß man beachten, daß M, ebenso wie jeder Vektor $\mathfrak{p}$, nicht konstant ist, sondern für jede Stellung des Verbandes einen anderen Wert annimmt. Um eine bestimmte Steuerung auf die Größe des von ihr auf den Regulator ausgeübten Rückdruckes zu untersuchen, bleibt nichts übrig, als für eine Reihe von Stellungen die in dem Ausdrucke von R vorkommenden Summen nacheinander zu berechnen.

Das ist freilich eine mühsame Arbeit. Ich erwähne noch, daß sie von Herrn Hans Götz in seiner von der hiesigen Hochschule angenommenen Doktorarbeit für die Steuerung der Bonjour-Lachaussée-Dampfmaschine vollständig durchgeführt wurde. Das Ergebnis lief darauf hinaus, daß es für die Untersuchung der Regulatorschwingungen in dem betrachteten Falle genügt, die variable Größe M durch einen konstanten Mittelwert zu ersetzen. Dieser wirkt dann so, als wenn die Masse der Regulatorhülse um den entsprechenden Betrag erhöht wäre. Das erste Glied in dem Ausdrucke für R bildet dagegen eine periodisch veränderliche Kraft, die zu erzwungenen Schwingungen

des Regulators führt, falls sie so große Werte annimmt, daß sie die konstante Reibung, die sich der Regulatorbewegung widersetzt, zu überwinden vermag.

§ 53. Regulatorschwingungen von parallel geschalteten Maschinen mit elastischer Kuppelung.

Ich betrachte jetzt zwei gleiche Kraftmaschinen, die auf dieselbe Welle arbeiten oder die, wie man sagt, parallel zu einander geschaltet sind. Jede dieser Maschinen sei mit einem Regulator von der in Abb. 17 angegebenen Bauart ausgerüstet. Von der Steuerung setze ich der Einfachheit halber voraus, daß sie als rückdruckfrei betrachtet werden kann. Außerdem sei zunächst vorausgesetzt, daß die konstante Reibung vernachlässigt werden kann, während die der Geschwindigkeit proportionale Reibung berücksichtigt wird.

Mit jeder der beiden Maschinen sei ein Schwungrad vom Trägheitsmomente θ starr verbunden. Von der gemeinschaftlichen Welle beider Maschinen setze ich voraus, daß sie entweder ziemlich lang ist, so daß sie wegen ihrer Torsionselastizität ein geringes Vor- oder Nacheilen der einen Maschine gegenüber der anderen gestattet oder daß in die Wellenleitung irgend eine Vorrichtung eingeschaltet ist, die unter Überwindung eines sich der Verdrehung widersetzenden elastischen Widerstandes eine geringe Drehung der beiden Wellenstücke gegeneinander ermöglicht. Eine derartige Verbindung beider Maschinen miteinander sei ganz allgemein als eine elastische Kuppelung bezeichnet.

Der ganze Verband, der hierdurch gebildet wird, hat jetzt vier Freiheitsgrade. Als allgemeine Koordinaten seien die von einer bestimmten Normalstellung aus gezählten Drehungswinkel ψ_1 und ψ_2 beider Maschinen und die die Regulatorstellungen in der von früher her bekannten Weise beschreibenden Winkel φ_1 und φ_2 gewählt. Wenn ψ_1 und ψ_2 in einem bestimmten Augenblicke verschieden voneinander sind, gibt der Unterschied den Verdrehungswinkel der zwischen beiden Maschinen liegenden Welle (oder der in sie eingeschalteten federn-

den Kuppelung) an. Diesem Verdrehungswinkel entspricht ein Kräftepaar, dessen Moment sich in der Form $c(\psi_1 - \psi_2)$ anschreiben läßt, wenn unter c ein Proportionalitätsfaktor verstanden wird, der aus den näheren Angaben über die elastische Kuppelung, also, wenn es sich nur um eine federnde Welle handelt, aus der Formel der Festigkeitslehre für den Verdrehungswinkel berechnet werden kann. Die Winkel ψ_1 und ψ_2 sind in solchem Sinne zu zählen, daß sie beim regelmäßigen Umlaufe der Maschinen wachsen. Wenn dann zu einer gegebenen Zeit ψ_1 etwas größer ist als ψ_2, so läuft die erste Maschine vor und das von der Welle auf sie übertragene Moment $c(\psi_1 - \psi_2)$ wirkt an ihr verzögernd, während an der nacheilenden zweiten Maschine ein Moment von der gleichen Größe beschleunigend angreift.

Ehe ich weiter gehe, muß ich noch darauf hinweisen, daß die praktisch bedeutsamsten Schwingungen, die bei parallel geschalteten Maschinen vorkommen können, solche sind, bei denen die Regulatoren ihren Hub nicht ändern. Hier war zwar vorausgesetzt, daß die konstante Reibung vernachlässigt werden sollte. Bei den einfachen Torsionsschwingungen, die das aus den beiden Schwungrädern und der dazwischen liegenden Welle bestehende System ausführen kann, genügt aber gewöhnlich die konstante Regulatorreibung im Zusammenhange mit anderen Umständen, auf die es hier nicht weiter ankommt, um eine Änderung der Regulatorstellung infolge der mit den Torsionsschwingungen verbundenen verhältnismäßig rasch verlaufenden Schwankungen in der Umdrehungsgeschwindigkeit tatsächlich zu verhindern. Diese Torsionsschwingungen können durch periodische Änderungen der auf die Welle übertragenen Drehmomente hervorgerufen werden und im Falle der Resonanz eine gefahrdrohende Größe erreichen.

So wichtig die Betrachtung dieser einfachen Torsionsschwingungen aber auch ist: hier brauche ich mich nicht weiter bei ihnen aufzuhalten, da sie schon im vierten Bande (§ 42, S. 275 d. 3. Aufl.) eine ausreichende Besprechung gefunden haben. Ich kann mich daher hier auf die Untersuchung des

verwickelteren Bewegungsvorganges beschränken, bei dem auch die Regulatoren an den Schwingungen teilnehmen. Häufig bezeichnet man die Schwingungen der Maschinen gegeneinander als ein „Pendeln". Erstreckt sich der Vorgang auch auf eine Schwingung der Regulatoren, so verläuft er viel langsamer, als im anderen Falle. Hier handelt es sich also, mit anderen Worten, nur um das langsame Pendeln der parallel geschalteten Maschine und nicht um das an und für sich erheblich einfacher verlaufende schnelle Pendeln, das mit einer Änderung der Regulatorstellung nichts zu tun hat.

Der für beide Maschinen gemeinschaftliche Wert der durchschnittlichen Winkelgeschwindigkeit sei mit u_0, die Winkelgeschwindigkeit der ersten Maschine zur Zeit t mit $u_0 + \eta_1$, die der zweiten mit $u_0 + \eta_2$ bezeichnet. Die Abweichungen η_1 und η_2 von dem Durchschnittswerte sind wie in § 50 als kleine Größen zu betrachten. Dabei sollen sich ebenso wie früher diese Winkelgeschwindigkeiten auf die Regulatorspindel beziehen, während die Winkelgeschwindigkeiten der Schwungräder daraus durch Multiplikation mit dem konstanten Übersetzungsverhältnisse n gefunden werden.

Für die Beschleunigung des Schwungrades der ersten Maschine gilt hiernach die Bewegungsgleichung

$$n\theta \frac{d\eta_1}{dt} = M - M_0 - c(\psi_1 - \psi_2),$$

wenn M und M_0 in der früheren Bedeutung gebraucht werden. Setzen wir für M den in Gl. (304) aufgestellten Wert ein und drücken η_1 in ψ_1 aus, so lautet die Gleichung

$$n\theta \frac{d^2\psi_1}{dt^2} = \varepsilon_1 \left(\frac{dF}{d\varphi}\right)_0 - c(\psi_1 - \psi_2).$$

Eine entsprechende Gleichung gilt auch für die zweite Maschine, nämlich

$$n\theta \frac{d^2\psi_2}{dt^2} = \varepsilon_2 \left(\frac{dF}{d\varphi}\right)_0 + c(\psi_1 - \psi_2)$$

Subtrahieren wir beide Gleichungen voneinander, so erhalten wir

$$n\theta\frac{d^2(\psi_1-\psi_2)}{dt^2}=(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\left(\frac{dF}{d\varphi}\right)_0-2c(\psi_1-\psi_2).$$

Mit Benutzung der durch Gl. (305) eingeführten Konstanten K und mit der Abkürzung

$$\frac{2c}{n\theta}=c'$$

können wir dafür schreiben

$$\frac{d^2(\psi_1-\psi_2)}{dt^2}=-K(\varepsilon_1-\varepsilon_2)-c'(\psi_1-\psi_2). \tag{326}$$

Dazu kommen die Bewegungsgleichungen für beide Regulatoren, die unmittelbar aus § 50 übernommen werden können, nämlich nach Gl. (302)

$$a_1\frac{d^2\varepsilon_1}{dt^2}+a_2\frac{d\varepsilon_1}{dt}+a_3\varepsilon_1-a_4\eta_1=0,$$

$$a_1\frac{d^2\varepsilon_2}{dt^2}+a_2\frac{d\varepsilon_2}{dt}+a_3\varepsilon_2-a_4\eta_2=0,$$

wobei zu beachten ist, daß die Koeffizienten a für beide Maschinen, die wir als gleich miteinander angenommen hatten, dieselben Werte haben.

Durch Subtraktion entsteht daraus

$$a_1\frac{d^2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{dt^2}+a_2\frac{d(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{dt}+a_3(\varepsilon_1-\varepsilon_2)-a_4(\eta_1-\eta_2)=0.$$

Nun ist aber

$$\eta_1=\frac{d\psi_1}{dt}-u_0;\quad \eta_2=\frac{d\psi_2}{dt}-u_0$$

und hiermit geht die vorhergehende Gleichung über in

$$\begin{aligned}a_1\frac{d^2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{dt^2}+a_2\frac{d(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{dt}+a_3(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\\ -a_4\frac{d(\psi_1-\psi_2)}{dt}=0.\end{aligned} \tag{327}$$

In den Gleichungen (326) und (327) kommen nur noch die Differenzen der sich auf beide Maschinen beziehenden Werte

von ε und ψ vor. Bezeichnen wir die Differenz $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ mit δ und eliminieren $\psi_1 - \psi_2$ aus beiden Gleichungen, so erhalten wir für δ die Differentialgleichung

$$a_1 \frac{d^4\delta}{dt^4} + a_2 \frac{d^3\delta}{dt^3} + (a_3 + c' a_1) \frac{d^2\delta}{dt^2} + (a_2 c' + a_4 K) \frac{d\delta}{dt} + a_3 c' \delta = 0. \qquad (328)$$

Das ist wieder eine lineare Differentialgleichung mit konstanten und positiven Koeffizienten, deren Lösung in der gewöhnlichen Weise gefunden werden kann, nämlich

$$\delta = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t} + Ce^{\alpha_3 t} + De^{\alpha_4 t},$$

wenn unter den α die vier Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$a_1 \alpha^4 + a_2 \alpha^3 + (a_3 + c' a_1)\alpha^2 + (a_2 c' + a_4 K)\alpha + a_3 c' = 0 \qquad (329)$$

verstanden werden. Auch ob die beiden Maschinen im stabilen Parallelbetrieb miteinander arbeiten können, also ohne hierbei ins Pendeln (oder genauer gesagt, ins „langsame“ Pendeln) zu geraten, läßt sich aus der Lösung leicht entnehmen. Hierzu ist nötig, daß keine der Wurzeln der charakteristischen Gleichung einen positiven reellen Anteil erhalten darf. Reelle positive Wurzeln sind übrigens auf keinen Fall möglich, da die Koeffizienten der Gleichung sämtlich positiv sind.

Die Frage kann in ganz ähnlicher Weise entschieden werden, wie bei der kubischen Gleichung (310) in § 50. Hat man nämlich eine biquadratische Gleichung mit nur positiven Koeffizienten

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

so lautet die Bedingung dafür, daß nur komplexe Wurzeln mit negativem reellen Anteile möglich sind:

$$abc > c^2 + a^2 d. \qquad (330)$$

Man kann diesen Satz in derselben Weise wie den in ihm mit enthaltenen einfacheren Satz für die kubische Gleichung beweisen, also so ungefähr, wie es in § 50 geschehen war. Die Rechnungen werden nur etwas länger; ich glaube aber davon absehen zu dürfen, sie hier wiederzugeben.

Wenden wir diesen Satz auf Gl. (329) an, so lautet die Bedingung für den stabilen Gang

$$a_2(a_3 + c'a_1)(a_2c' + a_4K) > a_1(a_2c' + a_4K)^2 + a_2^{\,2}a_3c'.$$

Multipliziert man aus und hebt die auf beiden Seiten der Ungleichung herauskommenden gleichen Glieder gegeneinander fort, so erhält man

$$a_2a_3 > a_1a_2c' + a_1a_4K \tag{331}$$

als **Bedingung für die Möglichkeit eines ungestörten Parallelbetriebs.**

Setzen wir in der Ungleichung $c' = 0$, so heißt dies, daß sich die beiden Maschinen überhaupt nicht beeinflussen, daß also jede für sich arbeitet, unabhängig von der andern. Für diesen Fall vereinfacht sich Ungleichung (331) zu

$$a_2a_3 > a_1a_4K.$$

Diese Bedingung stimmt aber genau überein mit der durch Ungleichung (311) ausgedrückten Bedingung für den stabilen Gang *einer* Maschine. Wir erhalten damit zunächst das von vornherein vorauszusehende Ergebnis, daß ein geordneter Parallelbetrieb nur möglich ist, wenn jede Maschine für sich imstande ist, im stabilen Gange zu bleiben.

Aber die Bedingung (331) ist strenger, als die Bedingung für die einzelne Maschine, wenn c' von Null verschieden ist, beide Maschinen also in der Tat durch eine elastische Kuppelung miteinander verbunden sind. Man sieht auch, daß unter sonst gleichen Umständen ein langsames Pendeln der beiden Maschinen gegeneinander um so eher zu befürchten ist, je größer c' wird, d. h. je steifer die Verbindung zwischen beiden Maschinen ist.

Dieses Ergebnis ließe befürchten, daß unter gewöhnlichen Umständen, nämlich bei einer verhältnismäßig kurzen und sehr steif konstruierten gemeinschaftlichen Kurbelwelle beide Maschinen überhaupt nicht im geordneten Parallelbetrieb miteinander arbeiten könnten, wenn nicht schon aus sehr zahlreichen Erfahrungen bekannt wäre, daß diese Befürchtung grundlos ist.

Wir sind hierdurch vor die Aufgabe gestellt, eine Erklärung dafür zu geben, wie ein Parallelbetrieb der beiden Maschinen trotzdem noch möglich ist, wenn auch, wie es gewöhnlich der Fall sein wird, die Ungleichung (331) nicht erfüllt ist. Diese Erklärung kann nur darin gefunden werden, daß bei der Ableitung von Ungleichung (331) die konstante Regulatorreibung nicht berücksichtigt wurde. In der Tat ist es nur dieser konstanten Reibung zu verdanken, daß ein Parallelbetrieb von Maschinen unter den im übrigen hier zutreffenden Bedingungen überhaupt durchführbar ist.

Wir müssen daher die Entwicklungen dieses Paragraphen jetzt noch einmal von vornher beginnen und dabei die konstante Regulatorreibung mit in den Rechnungsansatz aufnehmen. Das kann nach dem schon in § 51 gegebenen Muster leicht geschehen. Hiernach gilt für den steigenden Regulator (vgl. Gl. (314)) die Bewegungsgleichung

$$a_1 \frac{d^2 \varepsilon_1}{dt^2} + a_2 \frac{d \varepsilon_1}{dt} + a_3 \varepsilon_1 - a_4 \eta_1 + F \sin \varphi_0 = 0, \qquad (332)$$

wogegen das Vorzeichen des Gliedes $F \sin \varphi_0$ umzukehren ist, wenn der Regulator herabsinkt. Bei zwei parallel geschalteten Maschinen, die im Pendeln begriffen sind, wird aber die Schwierigkeit, die durch das wechselnde Vorzeichen von F hereingebracht wird, erheblich herabgemindert, da stets ein Regulator im Aufwärts- und der andere im Abwärtsgange begriffen sein wird. Wir brauchen daher nur die Bezeichnungen 1 und 2 für beide Maschinen während irgend eines Schwingungsausschlages so zu verteilen, daß der Regulator der mit 1 bezeichneten Maschine gerade im Steigen, der mit 2 bezeichneten im Fallen begriffen ist. Dann gilt für die Dauer eines Hubes stets Gleichung (332) und neben ihr die folgende Gleichung, die sich auf den Regulator der zweiten Maschine bezieht, nämlich

$$a_1 \frac{d^2 \varepsilon_2}{dt^2} + a_2 \frac{d \varepsilon_2}{dt} + a_3 \varepsilon_2 - a_4 \eta_2 - F \sin \varphi_0 = 0. \qquad (333)$$

Subtrahieren wir beide Gleichungen voneinander und drücken die Differenz von η_1 und η_2 in ψ_1 und ψ_2 aus, so finden wir

$$a_1 \frac{d^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{dt^2} + a_2 \frac{d(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{dt} + a_3 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - a_4 \frac{d(\psi_1 - \psi_2)}{dt} + 2F \sin\varphi_0 = 0. \tag{334}$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von der in derselben Weise abgeleiteten Gleichung (327) nur durch das Auftreten des mit F behafteten konstanten Gliedes.

An den sich auf die Beschleunigung der Schwungräder beziehenden Bewegungsgleichungen wird durch das Hinzutreten der Regulatorreibung F nichts geändert; wir können daher Gl. (326) ohne weiteres übernehmen. Eliminiert man aus ihr und Gl. (334) die Variable $\psi_1 - \psi_2$ und bezeichnet man $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ wieder mit dem Buchstaben δ, so erhält man die Differentialgleichung für δ

$$a_1 \frac{d^4\delta}{dt^4} + a_2 \frac{d^3\delta}{dt^3} + (a_3 + a_1 c') \frac{d^2\delta}{dt^2} + (a_2 c' + a_4 K) \frac{d\delta}{dt} + a_3 c' \delta + 2Fc' \sin\varphi_0 = 0. \tag{335}$$

Sie unterscheidet sich von Gl. (328) nur durch das Hinzutreten des konstanten letzten Gliedes der linken Seite. Auch die allgemeinen Lösungen beider Gleichungen unterscheiden sich daher nur unerheblich voneinander. Bezeichnet man die früher betrachtete Lösung von Gl. (328) jetzt mit δ_0, so lautet die Lösung von Gl. (335)

$$\delta = \delta_0 - \frac{2F \sin\varphi_0}{a_3}. \tag{336}$$

Zu Anfang des Schwingungsganges, auf den sich die Gleichung bezieht, hatte δ seinen größten negativen Wert, dessen Absolutbetrag mit A bezeichnet werden mag. Hierauf wächst δ im positiven Sinne fortwährend an, bis es am Ende des Schwingungsganges den größten positiven Wert B erreicht hat. Wenn $F = 0$ wäre, ginge δ in δ_0 über und die zugehörigen Grenzwerte seien mit A_0 und B_0 bezeichnet. Dann hat man nach Gl. (336)

$$-A = -A_0 - \frac{2F\sin\varphi_0}{a_8},$$

$$+B = +B_0 - \frac{2F\sin\varphi_0}{a_8}.$$

Für den Unterschied der Absolutwerte von B und A erhält man daher

$$B - A = (B_0 - A_0) - \frac{4F\sin\varphi_0}{a_8}. \qquad (337)$$

Aus dieser Gleichung erkennt man deutlich den Einfluß der konstanten Reibung auf den Verlauf der Schwingung. Für $F = 0$ würden wir nämlich schon an der Grenze des Pendelns stehen, wenn $B_0 = A_0$ wäre. Wenn F hinzukommt, darf dagegen B_0 um den Betrag des letzten Gliedes auf der rechten Seite größer sein als A_0, bis die Grenze des Pendelns erreicht wird. Ein stabiler Gang der Maschine ist daher auch dann noch möglich, wenn die charakteristische Gleichung (329) zwei komplexe Wurzeln mit positiven reellen Anteilen besitzt. Voraussetzung ist nur, daß diese nicht so groß werden, um $B_0 - A_0$ über den zulässigen Wert $\frac{4F\sin\varphi_0}{a_8}$ hinaus wachsen zu lassen. Die Bedingung für den stabilen Gang kann daher jetzt in der Form

$$(B_0 - A_0) < \frac{4F\sin\varphi_0}{a_8} \qquad (338)$$

angeschrieben werden. Um einen ungefähren Überblick über die zahlenmäßige Bedeutung dieser Bedingung zn erhalten, kann man noch die folgende Näherungsrechnung anstellen. Man setze

$$\delta_0 = e^{pt}(C_1 \sin qt + C_2 \cos qt),$$

wobei unter $p + iq$ und $p - iq$ die beiden komplexen Wurzeln der charakteristischen Gleichung mit positiven, reellen Anteilen p zu verstehen sind, während C_1 und C_2 zwei willkürliche Integrationskonstanten bedeuten. Auf die beiden anderen Glieder von δ_0, die zu den Wurzeln mit negativen, reellen Anteilen gehören, ist bei diesem Ansatze nicht geachtet, d. h. es ist ein spezieller Schwingungsvorgang vorausgesetzt, bei dem diese Glieder verschwinden.

Die Zeit $t = 0$ möge dem Augenblicke entsprechen, in dem δ_0 zu Null wird. Zu Anfang des Schwingungsganges ist dann t negativ und späterhin positiv. Mit dieser uns freistehenden Wahl vereinfacht sich die vorhergehende Gleichung zu

$$\delta_0 = C_1 e^{pt} \sin qt.$$

Wenn die Bedingung (338) für einen nicht sehr großen Wert der konstanten Reibung F erfüllt sein soll, muß pt für die während eines Schwingungsausschlages verfließende Zeit jedenfalls ziemlich klein bleiben und es genügt daher, wenn wir die Exponentialfunktion in eine Reihe entwickeln und von dieser nur die beiden ersten Glieder beibehalten. Damit geht die Gleichung über in

$$\delta_0 = C_1 (1 + pt) \sin qt.$$

Mit demselben Grade der Genauigkeit kann man auch für die weitere Ausrechnung annehmen, daß der Anfang des Schwingungsganges der Zeit

$$t = -\frac{T}{2}$$

und das Ende der Zeit

$$t = +\frac{T}{2}$$

entspricht. Hierin bedeutet demnach T die Dauer einer einfachen Schwingung oder

$$T = \frac{\pi}{q}.$$

Dann erhält man für die vorher mit A_0 und B_0 bezeichneten Größen

$$A_0 = C_1 \left(1 - p\,\frac{T}{2}\right)$$

$$B_0 = C_1 \left(1 + p\,\frac{T}{2}\right).$$

Hiermit sind wir in den Stand gesetzt, die Bedingung (338) für den stabilen Gang in der weiter ausgerechneten Form

$$C_1 p T < \frac{4 F \sin \varphi_0}{a_s} \tag{339}$$

anzuschreiben. Hierin macht es auch nichts aus, wenn wir nachträglich C_1 durch A_0, d. h. durch den anfänglichen Schwingungsausschlag ersetzen.

Die Ungleichung (339) lehrt uns insbesondere, daß die konstante Reibung F das Pendeln um so leichter zu verhüten vermag, je kleiner unter sonst gleichen Umständen C_1 ist, d. h. je mehr äußere Einflüsse ferngehalten werden, die einen anfänglich großen Unterschied beider Regulatorausschläge herbeiführen könnten. Mit anderen Worten heißt dies, daß schon eine ganz geringe konstante Reibung ausreicht, um einen fortgesetzten stabilen Gang beider Maschinen weiterhin aufrechtzuerhalten, wenn er vorher bereits bestanden hatte. Große anfängliche Unterschiede beider Regulatorausschläge sind insbesondere dann zu erwarten, wenn zuerst nur die eine Maschine mit der gemeinsamen Welle verbunden war und hierauf die andere zugeschaltet wird. Dann ist also ein Pendeln in dem hier gebrauchten Sinne des Wortes besonders zu befürchten, während es später, nachdem die anfänglichen Schwingungen erloschen sind und solange größere Störungen fern gehalten werden, nicht mehr zu erwarten ist.

Ferner ist noch darauf hinzuweisen, daß die konstante Reibung einen um so kleineren Einfluß hat, je größer die Schwingungsdauer T wird. Daher tritt ein Pendeln um so eher ein, je größer die Schwingungsdauer T wird.

Schließlich erklärt sich auch aus Ungleichung (339), warum zwei Maschinen, die mit einer verhältnismäßig kurzen und steif konstruierten Kurbelwelle in Verbindung gebracht sind, anstandslos parallel arbeiten können, während vorher aus der unter Vernachlässigung der konstanten Reibung aufgestellten Bedingung (331) geschlossen werden mußte, daß in diesem Falle ein Pendeln besonders zu befürchten wäre. Gehen wir nämlich auf die charakteristische Gl. (329) zurück und schreiben wir sie jetzt für den Fall an, daß $a_2 = 0$ ist, d. h. daß die der Geschwindigkeit proportionale Reibung ganz vernachlässigt werden kann, so lautet sie

$$a_1 \alpha^4 + (a_3 + a_1 c') \alpha^2 + a_4 K \alpha + a_3 c' = 0 \qquad (340)$$

und dabei ist unter c' jetzt ein verhältnismäßig sehr großer Wert zu verstehen, den man sich in der Grenze schließlich

selbst unendlich groß denken kann. Wir erhalten daher mit großer Annäherung zwei Wurzeln der biquadratischen Gleichung, wenn wir neben den mit c' behafteten Gliedern alle anderen streichen, womit

$$\alpha_1 = i\sqrt{\frac{a_3}{a_1}}, \quad \alpha_2 = -i\sqrt{\frac{a_3}{a_1}}$$

gefunden wird. Nun kann ja allerdings der reelle Anteil dieser beiden Wurzeln nicht streng, sondern nur nahezu gleich Null sein. Wir setzen daher

$$\alpha_1 = \sigma + i\sqrt{\frac{a_3}{a_1}}, \quad \alpha_2 = \sigma - i\sqrt{\frac{a_3}{a_1}}$$

und betrachten σ als eine kleine Größe, deren höhere Potenzen gegenüber dem anderen Summanden vernachlässigt werden können. Dann erhalten wir beim Einsetzen von

$$\sigma \pm i\sqrt{\frac{a_3}{a_1}}$$

an Stelle von α in Gl. (340) nach Wegheben der gegeneinander fortfallenden Glieder

$$\mp 2i\sigma a_3\sqrt{\frac{a_3}{a_1}} \pm 2i\sigma a_1 c'\sqrt{\frac{a_3}{a_1}} + a_4 K\sigma \pm i a_4 K\sqrt{\frac{a_3}{a_1}} = 0,$$

woraus man für σ erhält

$$\sigma = \frac{\mp i a_4 K\sqrt{\frac{a_3}{a_1}}}{\mp 2ia_3\sqrt{\frac{a_3}{a_1}} \pm 2ia_1 c'\sqrt{\frac{a_3}{a_1}} + a_4 K}.$$

Im Nenner überwiegt aber unserer Voraussetzung zufolge dem Absolutbetrage nach weitaus das mit c' behaftete Glied und wenn wir die übrigen Glieder dagegen vernachlässigen, erhalten wir

$$\sigma = -\frac{a_4 K}{2a_1 c'}.$$

Hiernach haben wir bis auf Größen höherer Ordnung genau die Lösungen

$$\alpha_1 = -\frac{a_4 K}{2a_1 c'} + i\sqrt{\frac{a_3}{a_1}},$$

$$\alpha_2 = -\frac{a_4 K}{2a_1 c'} - i\sqrt{\frac{a_3}{a_1}}.$$

Da in Gl. (340) das Glied mit α^3 weggefallen ist, muß die Summe der vier Wurzeln gleich Null sein. Daraus folgt, daß die beiden noch fehlenden Wurzeln α_3 und α_4 einen positiven, reellen Anteil haben, der dem negativen, reellen Anteile von α_1 und α_2 gleich ist. Für die in der Ungleichung (339) mit p bezeichnete Größe haben wir daher in unserem Falle

$$p = \frac{a_4 K}{2 a_1 c'}$$

zu setzen. Ferner ist das von α freie Glied in Gl. (340), nachdem die Gleichung mit a_1 dividiert ist, gleich dem Produkte aller vier Wurzeln zu setzen. Das liefert, wenn wir q in dem schon vorher gebrauchten Sinne verwenden, die Gleichung

$$(p^2 + q^2)\left(p^2 + \frac{a_3}{a_1}\right) = \frac{a_3}{a_1} c'.$$

Durch Auflösen nach q erhält man zunächst

$$q = \sqrt{\frac{a_3 c'}{a_1 p^2 + a_3} - p^2}.$$

Nun ist aber, wie wir bereits erkannten, p eine sehr kleine Größe, die für $c' = \infty$ schließlich in Null übergeht. Wir können daher die Glieder mit p streichen und erhalten für q den hinreichend genauen Näherungswert

$$q = \sqrt{c'},$$

womit nun auch die Schwingungsdauer T bekannt wird, nämlich

$$T = \frac{\pi}{q} = \frac{\pi}{\sqrt{c'}}.$$

Für das Produkt pT endlich, das in der Ungleichung (339) vorkam, erhalten wir

$$pT = \frac{a_4 K \pi}{2 a_1 c' \sqrt{c'}}.$$

Hiermit geht die Bedingung für den stabilen Gang über in

$$C_1 \frac{a_4 K \pi}{2 a_1 c' \sqrt{c'}} < \frac{4 F \sin \varphi_0}{a_3}. \tag{341}$$

Für ein hinreichend großes c' wird aber diese Bedingung, welche Werte der übrigen Koeffizienten nun auch zutreffen mögen, stets erfüllt sein.

Hiermit ist die vorher geforderte Erklärung dafür geliefert, daß zwei Maschinen, die auf eine gemeinsame, sehr steif konstruierte Kurbelwelle arbeiten, stets im ungestörten Parallelbetrieb miteinander arbeiten können, falls nur jede von ihnen der Bedingung für den stabilen Gang, wenn sie allein läuft, genügt.

Wir sind damit freilich nur auf ein Ergebnis gelangt, das aus der Erfahrung längst bekannt war. Die Bedeutung dieser Betrachtung liegt aber darin, daß der Grund für diese Erscheinung dadurch aufgedeckt und in dem von der Geschwindigkeit unabhängigen Reibungsgliede nachgewiesen ist.

§ 54. Die Planetenbewegung.

Die Theorie der Planetenbewegung hat in der geschichtlichen Entwickelung unserer heutigen Mechanik eine so bedeutsame Rolle gespielt, daß man auch in einem Lehrbuche der technischen Mechanik nicht ganz daran vorübergehen kann. Wenn auch ein Ingenieur nicht die Zeit darauf verwenden kann, sich mit den Einzelheiten der astronomischen Mechanik vertraut zu machen, wird er doch, wenn er überhaupt theoretischen Studien zugeneigt ist, das Bedürfnis empfinden, sich mit den wichtigsten Betrachtungen dieses Teiles der Dynamik, wenn auch nur in allgemeinen Umrissen, bekannt zu machen.

In den älteren Auflagen des vierten Bandes hatte ich aus diesem Grunde schon eine kurze Darstellung der Planetenbewegung gegeben. Bei der Neuauflage mußte ich sie zwar der Raumersparnis wegen streichen, aber nicht um sie ganz wegzulassen, sondern um sie auf diesen sechsten Band zu verschieben.

Auf Grund der Beobachtungen waren von Kepler die drei Gesetze aufgestellt worden: 1. Die Planeten bewegen sich in Ellipsen, in deren einem Brennpunkte die Sonne steht. 2. Der von der Sonne nach einem Planeten gezogene Radiusvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen. 3. Die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der

großen Achsen der Bahnen. Diese Sätze genügten zunächst für die Beschreibung der Planetenbewegung. Ein großer Fortschritt war es aber, als Newton eine mechanische Erklärung dafür gab, indem er diese Bewegung auf die Wirkung von Kräften zurückführte, die einem einfachen Gesetze folgen und zugleich auch noch eine Reihe von anderen Erscheinungen, die über die Keplerschen Gesetze hinausgehen, in Übereinstimmung mit der Erfahrung vorauszusagen gestatten.

Wir wollen uns jetzt dieselbe Aufgabe stellen, wie sie Newton vorlag. Zunächst können wir auf Grund des Flächensatzes schließen, daß wegen des zweiten Keplerschen Gesetzes die Bewegung eines Planeten durch eine Zentralkraft erklärt werden kann, die von der Sonne auf den Planeten ausgeübt wird. Das erste Keplersche Gesetz muß uns hierauf dazu dienen, das Gesetz zu ermitteln, nach dem diese Kraft von der Entfernung des Planeten von der Sonne abhängt, während das dritte Keplersche Gesetz Aufschluß darüber gibt, in welcher Beziehung die Kräfte zueinander stehen, die von der Sonne auf verschiedene Planeten übertragen werden.

Die augenblickliche Stellung irgend eines Planeten gegen die Sonne bezogen auf einen bestimmten Raum, den wir uns gegen den Fixsternhimmel festgelegt denken, sei durch den von der Sonne nach dem Planeten gehenden Radiusvektor $\mathfrak{r}$ beschrieben. Wir setzen

$$\mathfrak{r} = r\mathfrak{r}_1 \tag{342}$$

und verstehen unter r die Länge von $\mathfrak{r}$ und unter $\mathfrak{r}_1$ einen in der Richtung von $\mathfrak{r}$ gehenden Einheitsvektor. Durch Differentiation nach der Zeit erhält man daraus

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = r\frac{d\mathfrak{r}_1}{dt} + \mathfrak{r}_1\frac{dr}{dt},$$

womit die Geschwindigkeit in eine zu $\mathfrak{r}$ normale und in eine in die Richtung von $\mathfrak{r}$ fallende Komponente zerlegt ist. Eine nochmalige Differentiation liefert einen Ausdruck für die Beschleunigung, nämlich

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = r\frac{d^2\mathfrak{r}_1}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\mathfrak{r}_1}{dt} + \mathfrak{r}_1\frac{d^2r}{dt^2}. \tag{343}$$

Auf Grund des Flächensatzes hatten wir bereits geschlossen, daß die an dem Planeten angreifende Kraft und daher auch die Beschleunigung auf die Richtungslinie von $\mathfrak{r}$ fällt. Und zwar kann diese Kraft der geschlossenen Bahn wegen nur in einer Anziehung und nicht in einer Abstoßung bestehen. Wir finden daher den Absolutbetrag der Beschleunigung durch Projektion des Vektors $\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}$ auf die Richtung $-\mathfrak{r}_1$, d. h. durch innere Multiplikation der vorhergehenden Gleichung mit $-\mathfrak{r}_1$. Damit erhalten wir

$$-\mathfrak{r}_1\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}=-r\mathfrak{r}_1\frac{d^2\mathfrak{r}_1}{dt^2}-2\frac{dr}{dt}\mathfrak{r}_1\frac{d\mathfrak{r}_1}{dt}-\frac{d^2r}{dt^2}. \tag{344}$$

Nun ist aber der Einheitsvektor $\mathfrak{r}_1$ der Größe nach konstant und nur der Richtung nach veränderlich, d. h. $d\mathfrak{r}_1$ muß senkrecht zu $\mathfrak{r}_1$ stehen, so daß jederzeit

$$\mathfrak{r}_1\frac{d\mathfrak{r}_1}{dt}=0$$

ist. Damit verschwindet das zweite Glied der rechten Seite in der vorhergehenden Gleichung. Im ersten Gliede können wir dagegen setzen

$$\mathfrak{r}_1\frac{d^2\mathfrak{r}_1}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\mathfrak{r}_1\frac{d\mathfrak{r}_1}{dt}\right)-\left(\frac{d\mathfrak{r}_1}{dt}\right)^2,$$

was sich nach der vorhergehenden Bemerkung vereinfacht zu

$$\mathfrak{r}_1\frac{d^2\mathfrak{r}_1}{dt^2}=-\left(\frac{d\mathfrak{r}_1}{dt}\right)^2.$$

Der Differentialquotient $\frac{d\mathfrak{r}_1}{dt}$ gibt seiner Größe nach die Winkelgeschwindigkeit u an, mit der sich der Radiusvektor $\mathfrak{r}$ oder $\mathfrak{r}_1$ dreht und da es bei dem Quadrate eines Vektors nur auf dessen absolute Größe ankommt, finden wir

$$\mathfrak{r}_1\frac{d^2\mathfrak{r}_1}{dt^2}=-u^2.$$

Hiermit geht Gl. (344) über in

$$-\mathfrak{r}_1\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}=ru^2-\frac{d^2r}{dt^2}. \tag{345}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung gibt uns den Absolutbetrag der Beschleunigung an und da wir außerdem wissen, daß die Richtung der Beschleunigung mit der Richtung $-\mathfrak{r}_1$ zusammenfällt, können wir die Beschleunigung auch als Vektor anschreiben, nämlich

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{r}_1\left(\frac{d^2r}{dt^2} - ru^2\right). \tag{346}$$

Bis dahin gilt die Betrachtung allgemein für jede Zentralbewegung, also für jede Bewegung, von der wir entweder aus der Beobachtung wissen, daß die Sektorengeschwindigkeit konstant ist, oder bei der von vornherein vorausgesetzt wird, daß sie durch eine Zentralkraft hervorgebracht sei. Um sie auf die Planetenbewegung anwenden zu können, brauchen wir eine Gleichung der Ellipse, die der Planet nach dem ersten Keplerschen Gesetze beschreibt, die ich zunächst ableiten will.

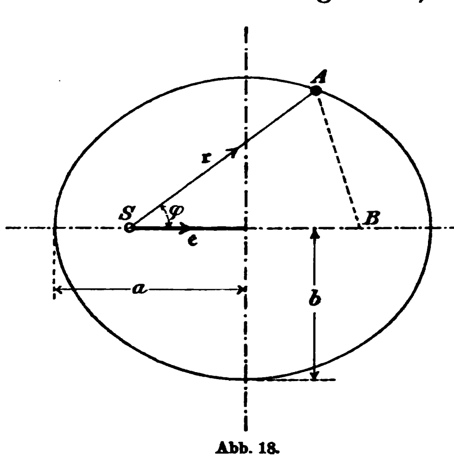


Abb. 18.

In Abb. 18 bezeichne S den Brennpunkt der Ellipse, in dem die Sonne steht, und A die augenblickliche Stellung des Planeten. Mit B ist der andere Brennpunkt bezeichnet, während die übrigen Bezeichnungen aus der Abbildung zu entnehmen sind. Bekanntlich kann man die Ellipse mit Hilfe eines Fadens aus den beiden Brennpunkten konstruieren, d. h. die Summe der beiden Längen SA und AB ist konstant und zwar gleich dem großen Durchmesser der Ellipse. Die Länge von SA bezeichnen wir wie früher mit r und für AB hat man daher die Länge $2a - r$. Andererseits kann der Vektor BA gleich $\mathfrak{r} - 2\mathfrak{e}$ gesetzt werden, wobei auch die Exzentrizität $\mathfrak{e}$, wie aus der Abbildung zu entnehmen ist, als gerichtete Größe aufzufassen

ist. Das Quadrat dieses Vektors ist gleich dem Quadrate seiner absoluten Größe, so daß die Gleichung besteht

$$(\mathfrak{r} - 2\mathfrak{e})^2 = (2a - r)^2.$$

Durch Ausführung der Quadrierung, Wegheben von r^2 und Division mit 4 geht dies über in

$$-\mathfrak{e}\mathfrak{r} + e^2 = a^2 - ar.$$

Betrachtet man einen Endpunkt der kleinen Hauptachse der Ellipse, so erkennt man nach dem Pythagoreischen Satze, daß

$$a^2 - e^2 = b^2$$

gesetzt werden kann. Damit geht die vorhergehende Gleichung über in

$$\mathfrak{e}\mathfrak{r} = ar - b^2. \tag{347}$$

Das ist die Ellipsengleichung in Vektorform, bezogen auf S als Anfangspunkt der Radienvektoren. Sie geht ohne weiteres in die aus der analytischen Geometrie bekannte Ellipsengleichung in Polarkoordinaten über, wenn man mit Einführung des Winkels φ zwischen den Richtungen von $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{r}$

$$\mathfrak{e}\mathfrak{r} = er \cos \varphi$$

setzt. Man erhält dann

$$r = \frac{b^2}{a - e \cos \varphi}. \tag{348}$$

Auf der rechten Seite sind b, a und e konstant, während sich der Winkel φ mit der Zeit ändert, wenn der Planet seine Bahn durchläuft. Wir wollen annehmen, daß dies in solchem Sinne geschehe, daß der Winkel φ wächst; der Differentialquotient von φ nach t gibt dann die Winkelgeschwindigkeit u an, mit der sich der Radiusvektor dreht. — Eine Differentiation von Gl. (348) nach der Zeit liefert daher

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{b^2}{(a - e \cos \varphi)^2} e \sin \varphi u,$$

wofür wir auch mit Rücksicht auf Gl. (348)

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{r^2}{b^2} ue \sin \varphi$$

schreiben können. Das Produkt $r^2 u$ bildet aber den Ausdruck für das Doppelte der Sektorengeschwindigkeit, d. h. der auf die Zeiteinheit bezogenen Fläche, die von dem Radiusvektor zur Zeit t überstrichen wird. Bezeichnen wir die Sektorengeschwindigkeit, von der wir wissen, daß sie konstant ist, mit dem Buchstaben c, so geht die vorhergehende Gleichung über in

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{2ce}{b^2}\sin\varphi. \tag{349}$$

Durch nochmalige Differentiation nach der Zeit erhalten wir daraus

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{2ce}{b^2}\cos\varphi \cdot u.$$

Drücken wir hierin mit Hilfe von Gl. (348) $\cos\varphi$ in r aus, so finden wir

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{2cu(ar - b^2)}{b^2 r}$$

oder, wenn wir noch beachten, daß

$$u = \frac{2c}{r^2} \tag{350}$$

gesetzt werden kann, auch

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{4c^2(ar - b^2)}{b^2 r^3}. \tag{351}$$

Hiermit sind wir in den Stand gesetzt, den in Gl. (346) angegebenen Ausdruck für die Beschleunigung in weiter ausgerechneter Form anzuschreiben. Wir erhalten nämlich

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = -\mathfrak{r}_1\left(\frac{4c^2(ar - b^2)}{b^2 r^3} + \frac{4c^2}{r^3}\right) = -\mathfrak{r}_1\frac{4c^2 a}{b^2 r^2}. \tag{352}$$

Hiermit sind wir bereits zu dem Newtonschen Ergebnisse gelangt, daß die Beschleunigung des Planeten und daher auch die von der Sonne auf ihn ausgeübte Anziehung dem Quadrate des Abstandes r umgekehrt proportional ist.

Die Sektorengeschwindigkeit c steht in einem einfachen Zusammenhange mit der Umlaufzeit T des Planeten. Die während

dieser Zeit von dem Radiusvektor überstrichene Fläche bildet nämlich den Flächeninhalt der Ellipse und man hat daher

$$c = \frac{\pi a b}{T}.$$

Setzt man diesen Wert von c in Gl. (352) ein, so geht sie über in

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = -\mathfrak{r}_1 \frac{4\pi^2 a^3}{r^2 T^2}. \tag{353}$$

Nach dem dritten Keplerschen Gesetze ist aber das Verhältnis $\frac{a^3}{T^2}$ für alle Planeten unseres Sonnensystems gleich groß. Dies heißt nach Gl. (353), daß alle Planeten, wenn sie in gleiche Abstände von der Sonne gelangten, die gleiche Beschleunigung und daher auch die gleiche Anziehung in bezug auf die Masseneinheit erfahren würden. Demnach sind alle Planeten aus Stoffen zusammengesetzt, die in bezug auf die Eigenschaft der Gravitation gleichwertig untereinander sind. Oder mit anderen Worten: Gleichen trägen Massen auf den verschiedenen Planeten entsprechen auch gleiche gravitierende Massen.

Hierbei ist nämlich darauf hinzuweisen, daß die Bezeichnung „Masse", die bei allen übrigen Anwendungen der Mechanik stets in dem Sinne gebraucht wird, der schon im ersten Bande dieser Vorlesungen auseinandergesetzt und späterhin überall beibehalten wurde, in der Mechanik der Himmelskörper noch auf einen anderen Begriff übertragen wird, der aber von jenem wohl auseinanderzuhalten ist. Das ist in der vorhergehenden Aussage dadurch geschehen, daß darin zwischen trägen und zwischen gravitierenden Massen unterschieden ist. Die trägen Massen sind jene, die auf Grund der Trägheitserscheinungen der Materie erkannt und gemessen werden können, also jene, mit denen wir uns bisher ausschließlich beschäftigt haben. Der Begriff einer „gravitierenden" Masse wird dagegen an dieser Stelle neu eingeführt. Es ist das eine jener Massen, die nach dem Newtonschen Gesetze anziehend aufeinander wirken und deren Größe auf Grund der Gravitationserscheinungen abgeschätzt wird. An und für sich wäre es nämlich durchaus

möglich, daß man zu ganz verschiedenen Werten für die Massen der Himmelskörper gelangte, je nachdem man sie auf die eine oder andere Art abschätzte. Erst das dritte Keplersche Gesetz lehrt uns, daß wenigstens innerhalb unseres Planetensystems kein Unterschied dieser Art besteht, daß vielmehr die nach den Anziehungskräften, denen sie unterworfen sind, abgeschätzten Massen ebenso groß (oder im gleichen Verhältnis zueinander) gefunden werden, als wenn man diese Massen auf Grund des Trägheitsgesetzes ermittelte. Hiermit erklärt es sich, daß man gewöhnlich keinen Unterschied zwischen trägen und gravitierenden Massen macht.

Zugleich ist aber noch ausdrücklich hervorzuheben, daß es keineswegs im Widerspruche mit den allgemeinen Grundsätzen unserer heutigen Mechanik wäre, wenn etwa plötzlich auf unserer Erde irgend ein Stoff, vielleicht ein seltenes Metall entdeckt würde, von dem sich herausstellte, daß das Verhältnis zwischen gravitierender Masse und träger Masse bei ihm anders wäre, als bei allen übrigen uns seither bekannten Körpern. Wir wollen uns zunächst überlegen, woran man ein abweichendes Verhalten dieser Art erkennen könnte, und um mich dabei bestimmter ausdrücken zu können, will ich den fraglichen Stoff mit X bezeichnen und annehmen, seine gravitierende Masse sei im Verhältnisse zur trägen doppelt so groß, als bei anderen Stoffen. Ich denke mir zunächst 1 kg dieses Stoffes auf einer Wage abgewogen. Bei diesem Versuche kommt die gravitierende Masse in Frage, denn das Gewicht des Körpers, das am Wagebalken mit dem Gewichte eines eisernen Gewichtsstückes von 1 kg im Gleichgewichte steht, rührt von der Anziehung her, die die Erde auf den Körper X ausübt, und diese erfolgt nach dem Gesetze der allgemeinen Massenanziehung.

Nun denke man sich das abgewogene Stück des Körpers X gleichzeitig mit dem ebenso schweren eisernen Gewichtsstücke, das zum Abwägen des Körpers X diente, dem freien Falle überlassen. An beiden wirkt die gleiche Kraft; aber nach der Voraussetzung, die wir über die Sonderstellung des Stoffes X gemacht haben, ist die träge Masse des X-Stückes

nur halb so groß, als die träge Masse des gleich schweren Eisenstücks. Die träge Masse ist es aber, die in der dynamischen Grundgleichung auftritt. Wir schließen, daß die Fallbeschleunigung des Stoffes X doppelt so groß sein müßte, als die des Eisenstücks oder als die aller übrigen irdischen Körper, mit denen man bisher Fallversuche oder Pendelversuche angestellt hat. In der Tat ist es also die durch die Beobachtung festgestellte Tatsache der gleichen Fallbeschleunigung am gleichen Orte für alle Körper, die uns verbürgt, daß bei allen irdischen Körpern das Verhältnis zwischen träger und gravitierender Masse dasselbe ist. Das dritte Keplersche Gesetz bildet eine Erweiterung dieser Erfahrung und gestattet uns, den daraus gezogenen Schluß auf die anderen Planeten auszudehnen.

Newton war sich übrigens, als er das Gravitationsgesetz aufstellte, offenbar sehr wohl bewußt, daß träge und gravitierende Massen nicht ohne weiteres miteinander verwechselt werden dürften, daß vielmehr eine besondere Prüfung erforderlich sei, inwieweit beide miteinander proportional gesetzt werden können. Zu diesem Zwecke hat er eine Reihe von Fallversuchen mit verschiedenen Körpern vorgenommen, um sich davon zu überzeugen, ob die Fallbeschleunigung bei allen in der Tat genau gleich groß ist.

Diese Versuche sind später mit feineren Beobachtungsmitteln mehrfach wiederholt worden und sie haben stets von neuem gelehrt, daß alle geprüften Körper die gleiche Fallbeschleunigung erfahren. Natürlich war es nicht möglich, diese Versuche auf alle Körper von verschiedener chemischer Zusammensetzung, die wir heute kennen, auszudehnen. Aber die Wahrscheinlichkeit, daß unter den bisher nicht darauf untersuchten ein Stoff von abweichendem Verhalten vorkäme, kann nur als sehr gering angesehen werden.

Ob das Verhältnis zwischen trägen und gravitierenden Massen auch noch außerhalb unseres Sonnensystems den gleichen Wert hat wie bei uns, vermag niemand zu sagen. Man nimmt dies zwar gewöhnlich stillschweigend an, aber doch nur ver-

mutungsweise, denn man vermag keine Beobachtung anzugeben, die zum Beweise dafür dienen könnte. Ich habe sogar früher einmal darauf hinweisen können (in einer Abhandlung, die in den Berichten der Bayer. Akademie d. Wissenschaften, Band 27, 1897 erschienen ist), daß dieses Verhältnis zwischen beiden Arten von Massen außerhalb des Sonnensystems unter Umständen sogar das Vorzeichen wechseln könnte, derart, daß sich gewisse Massen nicht anzögen, sondern abstießen, ohne daß diese Voraussetzung auf einen Widerspruch mit den vorhandenen Beobachtungen am Fixsternhimmel zu stoßen brauchte. Zugleich ließen sich sogar gewisse Wahrscheinlichkeitsgründe anführen, die einer solchen Vermutung günstig sind, wenn sie auch längst nicht ausreichen, um einen Beweis dafür zu liefern.

Innerhalb unseres Sonnensystems kann aber die Proportionalität zwischen trägen und gravitierenden Massen (vorbehaltlich etwaiger geringfügiger und überdies sehr unwahrscheinlicher Ausnahmen) im allgemeinen als sicher festgestellt betrachtet werden. Nach dieser Erkenntnis kehren wir zu Gl. (353) zurück. Multiplizieren wir sie mit der trägen Masse m des Planeten, so erhalten wir die auf ihn von der Sonne ausgeübte Anziehungskraft $\mathfrak{P}$, nämlich

$$\mathfrak{P} = -\frac{\mathfrak{r}_1}{r^2} \cdot m \cdot \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \tag{354}$$

und es handelt sich jetzt noch um die Deutung, die wir dem letzten Faktor in dem auf der rechten Seite der Gleichung stehenden Produkte zu geben haben. Dieser Faktor ist, wie schon hervorgehoben wurde, für das ganze Planetensystem konstant. Offenbar hängt aber die Anziehung $\mathfrak{P}$ nicht nur von dem Planeten ab, dessen Masse schon als Faktor in der Formel auftritt, sondern auch von den Eigenschaften der Sonne. Wenn wir annehmen, daß auch die Sonne aus Stoffen besteht, die hinsichtlich der Gravitation die gleichen Eigenschaften besitzen, wie jene der Planeten, kommen wir zu dem Schlusse, daß die Kraft $\mathfrak{P}$ auch der Sonnenmasse proportional zu setzen ist. Der letzte Faktor in Gl. (354), dessen Bedeutung wir noch suchten, stellt daher entweder die Sonnenmasse selbst oder ein Vielfaches

davon dar. Wenn wir die Sonnenmasse mit M bezeichnen, läßt sich Gl. (354) demnach auch in der Form

$$\mathfrak{P} = -\frac{\mathfrak{r}_1}{r^2} K m M \tag{355}$$

schreiben, in der sie das Newtonsche Gravitationsgesetz ausspricht. Der Faktor K ist eine Konstante, die eine besondere aus der Gleichung leicht festzustellende physikalische Dimension hat und deren Zahlenwert daher von den gewählten Fundamentaleinheiten abhängt. Rechnet man im physikalischen CGS-System, so hat die „Gravitationskonstante" K der Erfahrung zufolge den Wert

$$K = 6{,}6 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{cm}^3\,\mathrm{gr}^{-1}\,\mathrm{sec}^{-2}.$$

Unter den Massen m und M sind hierbei in Gl. (355) die gewöhnlich benützten trägen Massen zu verstehen, die zugleich als Maß für die gravitierenden Massen dienen.

In astronomischen Rechnungen ist es aber üblich, unter Übergehung der in der irdischen Physik gebrauchten Fundamentaleinheiten ein Maßsystem zu benützen, für das die Konstante K in Gleichung (355) den Wert Eins annimmt. Dann geht die Gleichung über in

$$\mathfrak{P} = -\frac{\mathfrak{r}_1}{r^2} m M.$$

In diesem Maßsystem ist dann, wie der Vergleich mit Gl. (354) lehrt,

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \tag{356}$$

Hiermit sind wir auch in den Stand gesetzt, die Sonnenmasse zu berechnen.

Dieselbe Gleichung wird auch benutzt, um die Masse von Fixsternen zu berechnen, die einen Begleiter haben, dessen Bahn sich beobachten läßt. Nach dem, was ich darüber vorher auseinandersetzte, findet man aber hierbei nur die gravitierende Masse und es bleibt zweifelhaft, ob die träge Masse jenes fernen Zentralkörpers dazu in dem uns gewohnten Verhältnisse steht.

§ 55. Folgerungen aus dem Gravitationsgesetze.

In dem vorhergehenden Paragraphen ist der induktive Weg eingeschlagen worden, der von bestimmten Beobachtungstatsachen ausgeht und durch sorgfältige Überlegung der annehmbarsten Art ihrer Deutung zur Aufstellung eines allgemeinen Gesetzes, und zwar hier des Gravitationsgesetzes führt. Nachdem dies geschehen ist, hat die deduktive Behandlung einzusetzen, nämlich die möglichst vollständige Ableitung aller theoretischen Schlußfolgerungen, die sich aus dem aufgestellten Gesetze ziehen lassen, wenn dieses Gesetz als gegebener Ausgangspunkt für alle weiteren Betrachtungen gewählt wird. Unter diesen Schlußfolgerungen müssen sich natürlich auch wieder jene finden, die mit den bei der vorhergehenden induktiven Untersuchung als gegeben zugrunde gelegten Beobachtungstatsachen übereinstimmen. Darüber hinaus werden sich aber noch eine Reihe von anderen Folgerungen einstellen und der Wert, den wir dem Gesetze beizumessen haben, muß sich nach der mehr oder minder guten Übereinstimmung aller dieser weiteren Folgerungen mit entsprechenden Beobachtungen, die einen Vergleich damit zulassen, richten. Nun kann man zwar nicht behaupten, daß alle aus dem Gravitationsgesetze abgeleiteten Folgerungen in eine uns restlos befriedigende Übereinstimmung mit den Beobachtungen und den daraus hervorgehenden Überlegungen gebracht werden könnten. Aber diese Übereinstimmung trifft doch in den weitaus überwiegenden Fällen in einem Umfange und mit einer Genauigkeit zu, die geradezu erstaunlich sind. Erst in dieser weitgehenden Übereinstimmung und keineswegs in der bloßen Möglichkeit, die drei Keplerschen Gesetze wieder rückwärts aus dem Gravitationsgesetze abzuleiten oder sie damit zu „erklären“, liegt die große und umfassende Bedeutung, die dem Newtonschen Gravitationsgesetze beizulegen ist.

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, die Bewegung eines materiellen Punktes zu ermitteln, der nach einem festen Anziehungszentrum mit einer Kraft hingezogen wird, die dem Quadrate des Abstandes umgekehrt proportional ist. Darauf

lassen sich die Entwicklungen im Eingange des vorigen Paragraphen, die zu Gl. (346) führten, ohne weiteres anwenden. Für jede Zentralbewegung gilt die Gleichung

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{r}_1\left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r u^2\right),$$

wofür man auch mit Einführung der Sektorengeschwindigkeit c nach Gl. (350)

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{r}_1\left(\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{4c^2}{r^3}\right),$$

schreiben kann. Mit dieser allgemeinen Formel vergleichen wir den Ansatz

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = -k\frac{\mathfrak{r}_1}{r^2},$$

durch den das vorausgesetzte Anziehungsgesetz zum Ausdrucke gebracht wird und worin k eine beliebige Konstante ist. Der Vergleich liefert

$$\frac{k}{r^2} = \frac{4c^2}{r^3} - \frac{d^2 r}{dt^2}. \tag{357}$$

Hiermit haben wir bereits eine Differentialgleichung erhalten, durch die die Abhängigkeit des Abstandes r von der Zeit dargestellt wird. Um daraus die Differentialgleichung der Bahn zu finden, betrachten wir den Winkel φ, den der Radiusvektor mit einer festen Richtung einschließt, als die unabhängige Veränderliche, von der t und r unbekannte Funktionen sind. Aus

$$\frac{d\varphi}{dt} = u = \frac{2c}{r^2}$$

folgt dann zunächst

$$\frac{dt}{d\varphi} = \frac{r^2}{2c} \quad \text{oder auch} \quad r^2 = 2c\frac{dt}{d\varphi}.$$

Setzt man diesen Werth in Gl. (357) ein, so erhält man

$$k = \frac{4c^2}{r} - 2c\frac{dt}{d\varphi}\frac{d^2 r}{dt^2},$$

wofür man auch

$$k + 2c\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{4c^2}{r}$$

schreiben kann. Dies läßt sich weiter umformen in

$$k + 2c\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{4c^2}{r}$$

oder auch in

$$k + 2c\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dr}{d\varphi}\frac{2c}{r^2}\right) = \frac{4c^2}{r}. \tag{358}$$

Durch diese Umformungen sind die Differentiationen nach der Zeit vollständig durch Differentiationen nach φ ersetzt und man hat in Gl. (358) die Differentialgleichung der Bahn vor sich, durch die r als Funktion von φ beschrieben wird. Um die Integration auszuführen, benutzen wir eine neue Variable z, indem wir

$$z = \frac{1}{r}$$

setzen, wobei z ebenso wie vorher r als eine Funktion von φ zu betrachten ist. Dann folgt

$$\frac{dz}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}$$

und hiermit geht Gl. (358) über in

$$k - 4c^2\frac{d^2z}{d\varphi^2} = 4c^2z. \tag{359}$$

Von dem konstanten Gliede k abgesehen, ist diese Gleichung von der Form der Differentialgleichung einer harmonischen Schwingung und wir haben daher die Lösung

$$z = \frac{k}{4c^2} + A\sin\varphi + B\cos\varphi,$$

wobei A und B die aus den Anfangsbedingungen abzuleitenden Integrationskonstanten sind. Ersetzen wir hierauf wieder z durch r, so haben wir als Gleichung der Bahn in Polarkoordinaten

$$r = \frac{1}{\frac{k}{4c^2} + A\sin\varphi + B\cos\varphi}.$$

Der Winkel φ kann hier von einer beliebigen Anfangsstellung aus gezählt werden. Die Gleichung bleibt daher in ihrer allgemeinen Form auch noch gültig, wenn wir φ durch $\varphi + \gamma$ ersetzen, wobei γ einen beliebigen konstanten Winkel

bedeutet. Durch passende Wahl dieses Winkels γ oder mit anderen Worten durch passende Wahl der Anfangslage, von der aus der Winkel φ zu zählen ist, können wir daher jedenfalls erreichen, daß sich die vorhergehende Gleichung vereinfacht zu

$$r = \frac{1}{\frac{k}{4c^2} + B\cos\varphi}, \tag{360}$$

in der nur noch die durch eine weitere Anfangsbedingung zu ermittelnde Integrationskonstante B stehen geblieben ist.

Die durch diese Gleichung dargestellte Kurve ist auf jeden Fall ein Kegelschnitt. Am einfachsten überzeugt man sich davon, indem man auf rechtwinklige Koordinaten übergeht, also $r\cos\varphi = x$ und $r^2 = x^2 + y^2$ setzt. Man sieht sofort, daß man hiermit zu einer Gleichung zweiten Grades zwischen x und y gelangt.

Bildet man $\frac{dr}{d\varphi}$, so erkennt man, daß dieser Differentialquotient zu Null wird für $\varphi = 0$. Der zu $\varphi = 0$ gehörige Wert r_0 von r ist daher entweder ein Maximum oder ein Minimum von r und an dieser Stelle der Bahn steht die Geschwindigkeit senkrecht zum Radiusvektor. Bezeichnen wir diese Geschwindigkeit mit v_0, so erhalten wir für diese Stelle $\varphi = 0$

$$r_0 = \frac{1}{\frac{k}{4c^2} + B}, \quad v_0 = u_0 r_0 = \frac{2c}{r_0}.$$

Diese Gleichungen lösen wir nach B und c auf und erhalten

$$c = \frac{v_0 r_0}{2}, \quad B = \frac{1}{r_0} - \frac{k}{v_0^2 r_0^2}$$

und wenn wir diese Werte in Gl. (360) einsetzen, erhalten wir

$$r = \frac{v_0^2 r_0^2}{k + (v_0^2 r_0 - k)\cos\varphi}. \tag{361}$$

Wenn die Bahn eine Ellipse werden soll, darf r für keinen Wert des Winkels unendlich groß werden.

Für eine planetarische Bahn muß daher die Bedingung erfüllt sein

$$v_0^2 r_0 < 2k. \tag{362}$$

Nehmen wir an, daß dies zutreffe, und setzen

$$v_0^2 r_0 = 2k - a,$$

wobei a eine positive Größe ist, so geht Gl. (361) über in

$$r = r_0 \frac{k + (k - a)}{k + (k - a)\cos\varphi}$$

und aus dieser Schreibweise erkennt man, daß der Zähler des Bruches stets größer bleibt als der Nenner, solange a kleiner ist als k, und daß daher in diesem Falle r stets größer ist als r_0, wenn φ von Null verschieden ist. Mit anderen Worten heißt dies, daß r_0 den kleinsten vorkommenden Abstand angibt oder daß die Stellung $\varphi = 0$ dem „Perihel" der Bahn entspricht. Ist dagegen a größer als k (jedenfalls aber kleiner als $2k$), so schreiben wir Gl. (361) in der Form

$$r = r_0 \frac{k - (a - k)}{k - (a - k)\cos\varphi}$$

und erkennen, daß der Zähler des Bruches für jedes von Null verschiedene φ kleiner ist als der Nenner, so daß r_0 den größten möglichen Wert von r angibt. Die Stellung $\varphi = 0$ entspricht in diesem Falle dem „Aphel" der Bahn.

Im Aphel der Bahn ist die Geschwindigkeit v_0 nur an die Bedingung (362) gebunden. Dagegen muß im Perihel außerdem noch die weitere Bedingung hinzukommen, daß a kleiner bleibt als k, d. h. daß

$$v_0^2 r_0 > k \tag{363}$$

ist. Wenn daher an einer Stelle der Bahn, bei der die Geschwindigkeit senkrecht zum Radiusvektor gerichtet ist, die Bedingung (362) verletzt ist, so haben wir es entweder mit einer hyperbolischen oder im Grenzfalle mit einer parabolischen Bahn zu tun. Dagegen hängt es von der Erfüllung der Bedingung (363) ab, ob diese Stelle einem Perihel entspricht oder nicht. Bei der parabolischen oder hyperbolischen Bahn entspricht die Stelle $\varphi = 0$ stets dem Perihel.

Hiermit ist die zunächst gestellte Aufgabe genügend besprochen. Für die Anwendung auf das Planetensystem kommt noch in Betracht, daß der Zentralkörper nicht fest steht, sondern durch die Reaktion der den Planeten beschleunigenden Anziehungskraft ebenfalls in Bewegung gesetzt wird. Hierdurch wird aber nichts Wesentliches geändert. Wenn nur zwei Körper vorliegen, also der Zentralkörper und ein Planet, so muß der Schwerpunkt des ganzen Systems dauernd in Ruhe bleiben, wenn er anfänglich in Ruhe war, und der Planet sowohl als der Zentralkörper beschreiben nun elliptische Bahnen um den Schwerpunkt des Systems. Bezeichnet man nämlich die Massen mit M und m und die vom Schwerpunkt aus gerechneten Abstände mit R und r, so liegen M, m und der Schwerpunkt jederzeit auf einer Geraden und zugleich ist

$$MR = mr.$$

Ferner geht die am Planeten wirkende Kraft P jederzeit durch den festliegenden Schwerpunkt und ihre Größe kann

$$P = K \frac{mM}{(R+r)^2}$$

gesetzt werden. Mit Rücksicht auf die vorhergehende Gleichung läßt sich dies aber umformen in

$$P = K \cdot \frac{m}{r^2} \cdot \frac{M}{\left(1 + \frac{m}{M}\right)^2} = K \frac{mM'}{r^2},$$

wenn man zur Abkürzung

$$M' = \frac{M}{\left(1 + \frac{m}{M}\right)^2}$$

setzt. Die Bewegung des Planeten erfolgt also genau so, als wenn im festliegenden Schwerpunkte eine dauernd festgehaltene Masse M' vorhanden wäre, womit die Behauptung bewiesen ist. Entsprechendes gilt auch für den Zentralkörper. Wenn M weitaus größer ist als m, unterscheidet sich M' nur wenig von M und man kann den Zentralkörper näherungsweise als feststehend betrachten.

Das „Zweikörperproblem“ ist hiermit gelöst. Dagegen ist es es bisher nicht gelungen, das „Dreikörperproblem“ ebenfalls allgemein zu lösen. Man versteht darunter die Aufgabe, die Bewegungen von drei materiellen Punkten vorauszusagen, die sich nach dem Newtonschen Gesetze anziehen, wenn die Anfangslagen und die Anfangsgeschwindigkeiten beliebig gegeben sind. Man denke sich unter diesen drei materiellen Punkten etwa die Sonne, die Erde und den Mond. Streng läßt sich die gestellte Aufgabe nicht lösen; dagegen ist eine Näherungslösung möglich, die sehr weitgehenden Ansprüchen genügt, weil in dem genannten Falle die drei Massen von sehr verschiedener Größenordnung sind. Das gleiche gilt auch von der Störungstheorie, bei der es sich darum handelt, die kleinen Abweichungen der Planetenbewegungen von den den Keplerschen Gesetzen entsprechenden Bahnen vorauszuberechnen, die durch die Anziehungen der verschiedenen Planeten unter sich hervorgebracht werden.

Endlich ist noch eine Folgerung aus dem Newtonschen Gravitationsgesetze hervorzuheben, die zu besonders wichtigen Bestätigungen dieses Gesetzes geführt hat und von der hier wenigstens ein kurzer Abriß gegeben werden soll.

Vorher hatte ich nämlich jeden Weltkörper nur als einen materiellen Punkt angesehen, indem ich mir seine ganze Masse im Schwerpunkte vereinigt dachte. Für die meisten Betrachtungen ist dies zulässig, weil die Abmessungen der verschiedenen Himmelskörper klein sind gegenüber den Entfernungen, die zwischen ihnen bestehen. Jetzt soll aber von den Erscheinungen die Rede sein, die dadurch hervorgebracht werden, daß die Durchmesser der Himmelskörper doch nicht vollständig im Vergleiche zu den Entfernungen vernachlässigt werden dürfen.

Um diesen Umstand klar zu legen, genügt es, einen starren Körper ins Auge zu fassen, auf dessen einzelne Massenteilchen von einem festen Zentrum her Anziehungskräfte nach dem Newtonschen Gesetze ausgeübt werden. Der von dem Anziehungszentrum nach dem Schwerpunkte des starren Körpers

gezogene Radiusvektor sei wie vorher mit $\mathfrak{r}$ bezeichnet und ferner der von diesem Schwerpunkte nach einem Massenteilchen m des starren Körpers gezogene Radiusvektor mit $\mathfrak{p}$. Dabei setze ich voraus, daß $\mathfrak{p}$ sehr klein sei gegen $\mathfrak{r}$, so daß höhere Potenzen des Verhältnisses beider Längen vernachlässigt werden dürfen, während es auf die Größen, die von der ersten Potenz dieses Verhältnisses abhängen, hier gerade ankommt.

Der vom Anziehungszentrum nach m gezogene Radiusvektor ist jetzt gleich $\mathfrak{r} + \mathfrak{p}$ und der Absolutbetrag davon sei mit R bezeichnet. Dann ist zunächst mit Vernachlässigung von kleinen Größen höherer Ordnung

$$R = \sqrt{(\mathfrak{r} + \mathfrak{p})^2} = \sqrt{\mathfrak{r}^2 + 2\mathfrak{p}\mathfrak{r}} = r + \frac{\mathfrak{p}\mathfrak{r}}{r}.$$

Das letzte Glied stellt einfach die Projektion von $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{r}$ dar. Die an m wirkende Kraft $\mathfrak{P}$ können wir in der Form

$$\mathfrak{P} = -\frac{cm(\mathfrak{r} + \mathfrak{p})}{R^3}$$

ansetzen, wenn die Konstante c das Produkt der im Anziehungszentrum vereinigten anziehenden Masse und der Gravitationskonstante bedeutet. Setzen wir den Wert von R ein und vernachlässigen wiederum Glieder, die von höherer Ordnung klein sind, so erhalten wir nach einfacher Ausrechnung

$$\mathfrak{P} = -\frac{cm\mathfrak{r}}{r^3} + \frac{3cm\mathfrak{p}\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r}}{r^5} - \frac{cm\mathfrak{p}}{r^3}. \tag{364}$$

Das erste Glied auf der rechten Seite überwiegt weitaus die beiden folgenden; es gibt den Betrag an, den m zur gesamten Anziehung liefern würde, wenn die ganze Masse im Schwerpunkte des Körpers vereinigt wäre. Hier kommt es gerade auf die Abweichung an, die durch den kleinen Abstand $\mathfrak{p}$ vom Schwerpunkte herbeigeführt wird. Führen wir dafür die Bezeichnung $\mathfrak{A}$ ein, so ist

$$\mathfrak{A} = \frac{3cm\mathfrak{p}\mathfrak{r}}{r^5}\cdot\mathfrak{r} - \frac{cm}{r^3}\cdot\mathfrak{p}. \tag{365}$$

Alle an den verschiedenen Massenteilchen des Körpers angreifenden äußeren Kräfte gehen durch das feste Anziehungs-

zentrum und lassen sich daher zu einer Resultierenden zusammensetzen, die ebenfalls durch diesen Punkt geht. Dagegen geht die Resultierende im allgemeinen nicht durch den Schwerpunkt des starren Körpers. Wir können daher sagen, daß vom Anziehungszentrum außer der nach dem Schwerpunkte des Körpers verlegten anziehenden Kraft noch ein Kräftepaar auf den Körper ausgeübt wird, dessen Momentenvektor mit $\mathfrak{K}$ bezeichnet sei. Wir erhalten dafür

$$\mathfrak{K} = \Sigma \mathrm{V} \mathfrak{A} \mathfrak{p} = \frac{3c}{r^5} \Sigma m \mathfrak{p} \mathfrak{r} \cdot \mathrm{V} \mathfrak{r} \mathfrak{p}.$$

Für diesen Ausdruck können wir auch schreiben

$$\mathfrak{K} = \frac{3c}{r^5} \mathrm{V} \mathfrak{r} \cdot \Sigma m \mathfrak{p} \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{p} = \frac{3c}{r^3} \mathrm{V} \mathfrak{r}_1 \Sigma m \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p} \mathfrak{r}_1. \qquad (366)$$

Der hierin vorkommende Summenausdruck

$$\Sigma m \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p} \mathfrak{r}_1$$

in dem $\mathfrak{r}_1$ ein konstanter Einheitsvektor ist, bildet ein Vektormoment zweiten Grades für die Massenverteilung des starren Körpers in bezug auf den Schwerpunkt und die durch ihn gehende Achse, deren Richtung durch $\mathfrak{r}_1$ beschrieben wird. Die Eigenschaften dieser Vektormomente habe ich bereits im 5. Bande dieser Vorlesungen in § 4 näher besprochen. Daraus geht hervor, daß das Vektormoment nur dann in die Richtung von $\mathfrak{r}_1$ fällt, wenn diese Richtung eine Hauptträgheitsachse des Körpers bildet. Nur in diesem Falle wird daher $\mathfrak{K}$ zu Null und die Resultierende der Anziehungskräfte geht durch den Schwerpunkt des Körpers. Kann ein Himmelskörper als eine Kugel betrachtet werden, so ist freilich jede Achse eine Hauptträgheitsachse und $\mathfrak{K}$ wird daher bei jeder Stellung des Körpers gegen das Anziehungszentrum zu Null. Unsere Erde ist aber ein abgeplattetes Ellipsoid und der von der Sonne oder vom Monde aus nach dem Erdmittelpunkte gezogene Radiusvektor geht bei einer beliebigen Stellung dieser Körper zueinander im allgemeinen nicht durch eine Hauptträgheitsachse der Erde. Daher erfährt die Erde von diesen Himmelskörpern aus neben einer im Schwerpunkte an-

greifenden Kraft auch noch ein Kräftepaar, das zu einer Änderung der Drehbewegung der Erde führen muß. Wenn dieses Kräftepaar verhältnismäßig auch nur klein ist, so bringt es doch im Laufe langer Zeiten einen sehr erheblichen Erfolg hervor, nämlich die Präzession der Umdrehungsachse der Erde, die hierbei als ein Kreisel aufgefaßt werden kann, gegen den Fixsternhimmel.

Besonders ist noch darauf hinzuweisen, daß sowohl $\mathfrak{A}$ als $\mathfrak{K}$ unter sonst gleichen Umständen mit der dritten Potenz der Entfernung r umgekehrt proportional sind. Daher kommt es, daß bei den durch die $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{K}$ veranlaßten Erscheinungen der Mond eine ebenso große oder selbst noch wichtigere Rolle spielt als die Sonne, obschon die Anziehung, die die Erde im ganzen von der Sonne erfährt, weitaus größer ist, als die vom Monde ausgehende.

Diese Bemerkung gilt namentlich von den Fluterscheinungen unserer Meere, die durch die vom Monde und der Sonne her ausgeübten Kräfte $\mathfrak{A}$ hervorgebracht werden. Werden nämlich an allen Punkten eines deformierbaren freien Körpers äußere Kräfte angebracht, die nur den Massen proportional und gleich gerichtet sind, so können sie nicht zu einer Formänderung oder zu Relativbewegungen an diesem Körper führen. Anders ist es aber, wenn die äußeren Kräfte an verschiedenen gleichen Massenteilchen von etwas verschiedener Größe und Richtung sind. Die Unterschiede, also die vorher mit $\mathfrak{A}$ bezeichneten Kräfte bringen dann die Relativbewegungen hervor, die wir bei den Flutbewegungen unserer Meere beobachten können.

Fünfter Abschnitt.

Hydrodynamik.

§ 56. Anknüpfung an die früheren Lehren.

In der letzten Auflage des vierten Bandes meiner Vorlesungen wurde der die Hydrodynamik behandelnde Abschnitt durch starke Kürzungen gegenüber der vorhergehenden Auflage auf einen ganz engen Raum zusammengedrängt. Diese Kürzungen gingen weiter, als es zulässig gewesen wäre, wenn nicht an dieser Stelle alles nachgeholt werden könnte, was damals weggelassen wurde. In der dadurch gebotenen Ergänzung besteht hauptsächlich die Aufgabe der nachfolgenden Betrachtungen. Sie knüpfen an die Lehren des vierten Bandes unmittelbar an und beziehen sich auf eine Reihe der wichtigsten Folgerungen, die man aus den dort aufgestellten hydrodynamischen Gleichungen zu ziehen vermag.

Zum Verständnis des weiterhin Folgenden ist es daher durchaus nötig, mit den schon im vierten Bande vorgetragenen allgemeinen Betrachtungen bereits genügend vertraut zu sein. Es wird sich darum empfehlen, daran in möglichst gedrängter Zusammenfassung zuvor nochmals zu erinnern.

Um die Aufgabe so weit zu vereinfachen, daß eine Lösung überhaupt erst möglich wird, sieht man sich zu bestimmten Annahmen oder Vernachlässigungen genötigt. Bei den meisten Anwendungen der Hydrodynamik wird es als ausreichend angesehen, sowohl den Einfluß der Flüssigkeitsreibung als die durch die „Mischbewegung" hervorgerufenen Störungen der ohne sie zu erwartenden regelmäßigen Strömungsvorgänge zu vernachlässigen. Ebenso wird, wenn es sich um tropfbare

Flüssigkeiten handelt, von der elastischen Zusammendrückbarkeit abgesehen. Diese Annahmen legen wir bis auf weiteres hier ebenfalls zugrunde.

Für die analytische Darstellung des Strömungszustandes bedient man sich gewöhnlich am besten des nach Euler benannten Verfahrens, die Geschwindigkeit in einem festen Punkte des durchströmten Raumes als eine Funktion der Koordinaten dieses Punktes und der Zeit anzusehen. Die Aufgabe kommt dann darauf hinaus, diese Funktion oder ihre Komponentenfunktionen durch eine den Grenzbedingungen Rechnung tragende Integration der Eulerschen hydrodynamischen Gleichungen zu ermitteln.

Bezeichnen wir die auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogenen Geschwindigkeitskomponenten mit $v_1 v_2 v_3$, so lautet die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0 \tag{367}$$

und die drei anderen Eulerschen Gleichungen haben wir ebenfalls in der ihnen schon im vierten Bande gegebenen Form

$$\left.\begin{aligned}
\mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2\frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3\frac{\partial v_1}{\partial z}\right) &= X - \frac{\partial p}{\partial x}\\
\mu\left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2\frac{\partial v_2}{\partial y} + v_3\frac{\partial v_2}{\partial z}\right) &= Y - \frac{\partial p}{\partial y}\\
\mu\left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_3}{\partial x} + v_2\frac{\partial v_3}{\partial y} + v_3\frac{\partial v_3}{\partial z}\right) &= Z - \frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \tag{368}$$

zu übernehmen. Darin bedeutet μ die auf die Raumeinheit bezogene Masse der Flüssigkeit, die als eine Konstante zu betrachten ist, p den Flüssigkeitsdruck, der zwar mit $xyzt$ veränderlich, für alle Schnittrichtungen aber bei der reibungsfreien Flüssigkeit gleich groß ist, während mit XYZ die Komponenten der auf die Raumeinheit bezogenen äußeren Massenkraft bezeichnet sind.

Ferner ist an die wichtige Einteilung der Flüssigkeitsbewegungen in wirbelfreie und in Wirbelbewegungen und an den damit zusammenhängenden Satz von Lagrange zu erinnern.

Bei der wirbelfreien Bewegung, die viel einfacher zu behandeln ist, lassen sich die Geschwindigkeitskomponenten in einem Geschwindigkeitspotentiale Φ durch die Gleichungen

$$v_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad v_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \tag{369}$$

ausdrücken und der Satz von Lagrange lehrt, daß die Bewegung, wenn sie anfänglich wirbelfrei war, auch weiterhin wirbelfrei bleibt, unter der Voraussetzung, daß die auf die Flüssigkeit wirkende äußere Kraft von einem Potentiale abgeleitet werden kann. Diese Voraussetzung trifft bei den meisten Fällen der Anwendung ohne weiteres zu. Dagegen darf man nicht vergessen, daß der Satz von Lagrange außerdem auch noch von den Voraussetzungen abhängig ist, daß die Flüssigkeitsreibung vernachlässigt werden kann und daß der Einfluß der Mischbewegung ebenfalls als unerheblich außer Ansatz gelassen werden kann. Bei wirklichen Flüssigkeitsbewegungen darf daher der Satz von Lagrange immer nur als näherungsweise gültig angesehen werden.

Bei einer Wirbelbewegung kann der Wirbel an einer bestimmten Stelle durch einen Vektor $\mathfrak{w}$ nach Größe und Richtung beschrieben werden, der mit der Geschwindigkeitsverteilung durch die Gleichung

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{i}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) + \mathfrak{j}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) + \mathfrak{k}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) \tag{370}$$

zusammenhängt. An Stelle von $\mathfrak{w}$ selbst kann man auch irgend ein Vielfaches und insbesondere, wie es häufig geschieht, die Hälfte davon als Maß des Wirbels ansehen. Zur Abkürzung wird die vorhergehende Gleichung auch

$$\mathfrak{w} = \operatorname{curl} \mathfrak{v} \tag{371}$$

geschrieben.

Endlich ist noch an eine wichtige Folgerung zu erinnern, die sich aus der Integration der drei Eulerschen Gleichungen (368) für die stationäre wirbelfreie Strömung ergibt. Sie wird durch die in § 52 des vierten Bandes abgeleitete Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\mu \mathfrak{v}^2 + V + p = C \tag{372}$$

ausgesprochen, in der V das Potential der äußeren Massenkraft und C eine für den ganzen durchströmten Raum konstante, zugleich auch von der Zeit unabhängige Größe bedeutet. Diese Gleichung wird hauptsächlich dazu verwendet, um die Druckverteilung festzustellen, die bei einer bestimmten Strömung, die an sich möglich ist, d. h. die der Kontinuitätsgleichung genügt, auftreten muß, um diese Strömung auch wirklich herbeizuführen.

§ 57. Die ebene wirbelfreie Strömung im Beharrungszustande.

Um die Aufgabe der Integration der Eulerschen Gleichungen für bestimmte Grenzbedingungen so weit zu vereinfachen, daß sich eine Lösung dafür finden läßt, muß man auf die Betrachtung der allgemeineren Fälle verzichten und sich auf die Untersuchung einfacherer Bewegungsarten beschränken, für die eine Lösung wirklich gefunden werden kann. Dazu gehört vor allem die ebene Bewegung, mit der wir uns hier beschäftigen wollen.

Die Bewegung erfolge überall parallel zu einer bestimmten Ebene, die wir zur XY-Ebene eines im Raume festliegenden rechtwinkligen Koordinatensystems benutzen wollen. Die Geschwindigkeitskomponente v_3 ist daher gleich Null zu setzen. Zum Begriffe der ebenen Bewegung gehört aber ferner noch, daß die Bewegung in allen parallel zur XY-Ebene durch die Flüssigkeit gelegten Schnitten dieselbe ist, so daß die Bewegung bereits vollständig bekannt ist, wenn sie in einem dieser Schnitte angegeben wird. Wir haben also

$$v_3 = 0, \qquad \frac{\partial v_1}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial v_2}{\partial z} = 0 \tag{373}$$

zu setzen. Es muß jedoch darauf hingewiesen werden, daß bei der wirbelfreien Bewegung, von der hier in erster Linie die Rede sein soll, die beiden letzten dieser Gleichungen notwendige Folgen der ersten davon sind. Nach Gl. (370) erfordert nämlich die Bedingung $\mathfrak{w} = 0$, daß

$$\frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{\partial v_3}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v_2}{\partial z} = \frac{\partial v_3}{\partial y}$$

ist, woraus die Behauptung folgt. Indessen braucht bei der ebenen Bewegung an und für sich, d. h. bei einer Bewegung, die nur die Gleichungen (373) erfüllt, $\mathfrak{w}$ nicht gleich Null zu sein. Es genügt vielmehr, wenn die $\mathfrak{i}$-Komponente und die $\mathfrak{j}$-Komponente von $\mathfrak{w}$ verschwinden, während eine senkrecht zur Bewegungsebene stehende Wirbelkomponente

$$w_3 = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \tag{374}$$

bei der ebenen Bewegung immer noch möglich ist. An dieser Stelle wollen wir uns aber auf die Betrachtung der wirbelfreien Bewegung beschränken, also auch $w_3 = 0$ voraussetzen.

Wir sind dann in den Stand gesetzt, die Bewegung auf ein Geschwindigkeitspotential Φ zurückzuführen, das nur noch von den unabhängig veränderlichen Größen x und y abhängt. Die Kontinuitätsbedingung, Gl. (367), geht damit über in

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \tag{375}$$

und jede Funktion Φ, die dieser Gleichung genügt, beschreibt eine mögliche Flüssigkeitsbewegung, die bei geeigneter Wahl der Anfangsbedingungen auch verwirklicht werden kann.

Von derselben Gleichung wie hier, die mit Gl. (318) des dritten Bandes übereinstimmt, hängt auch die Lösung des Torsionsproblems für einen prismatischen Stab von beliebigem Querschnitt ab. In § 74 des dritten Bandes wurde auf diesen Zusammenhang nicht nur hingewiesen, sondern er wurde auch schon zur näherungsweisen Lösung des Torsionsproblems benutzt. Damals wurde schon gezeigt, daß sowohl der reelle als der imaginäre Bestandteil jeder beliebigen Funktion einer komplexen Variabeln $x + yi$ oder $x - yi$ eine Lösung der Gleichung bildet.

Hieraus geht hervor, daß die Theorie der ebenen und wirbelfreien Flüssigkeitsströmungen sehr eng mit der allgemeinen Theorie der Funktionen komplexer Variabeln und auch mit der sich an diese anschließenden Theorie der konformen oder winkeltreuen Abbildung zusammenhängt. Da die

sich hierauf beziehenden mathematischen Lehren eine weitgehende Ausbildung erfahren haben, vermag man Aufgaben über ebene Flüssigkeitsbewegungen verhältnismäßig leicht zu behandeln und in manchen bemerkenswerten Fällen auch vollständig zu lösen.

Um den zuvor schon erwähnten Satz nochmals von neuem abzuleiten, setze ich

$$z = x + yi,$$

wobei aber der Buchstabe z mit einer zur Bewegungsebene senkrecht gezogenen Z-Achse nichts zu tun hat, sondern nur zur abgekürzten Bezeichnung der komplexen Variabeln dient. Unter w sei irgendeine analytische Funktion von z verstanden, also unter Verwendung eines Funktionszeichens F

$$w = F(z) = F(x + yi).$$

Jedenfalls läßt sich die Funktion w in einen reellen und einen rein imaginären Bestandteil zerlegen, so daß man auch

$$w = \Phi + i\Psi$$

schreiben kann. Dabei sind Φ und Ψ reelle Funktionen von x und y.

Wir bilden den partiellen Differentialquotienten von w nach x, den wir unter Verwendung der vorhergehenden Bezeichnungen auf zwei verschiedene Arten ausdrücken können, nämlich entweder

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dw}{dz}$$

oder

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Ebenso erhält man für den Differentialquotienten von w nach y die beiden Ausdrücke

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = i\frac{dw}{dz},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + i\frac{\partial \Psi}{\partial y}.$$

Aus dem ersten Gleichungspaare findet man

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

und aus dem zweiten

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} - i\frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Beide Ausdrücke müssen miteinander übereinstimmen und das ist nur möglich, wenn zwischen Φ und Ψ die Gleichungen bestehen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \tag{376}$$

Insbesondere folgt daraus noch, daß man für $\frac{dw}{dz}$ auch die folgenden beiden Ausdrücke setzen kann

$$\left.\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} - i\frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{dw}{dz} &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} + i\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned}\right\}. \tag{377}$$

Eliminiert man ferner Ψ aus den Gleichungen (376), indem man die erste nach x und die zweite nach y differentiiert und hierauf beide zueinander addiert, so erhält man die erste der beiden folgenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{378}$$

Die zweite erhält man nämlich in der gleichen Weise durch Elimination von Φ aus den Gleichungen (376). Damit ist zunächst der verlangte Nachweis erbracht, daß sowohl der reelle als der imaginäre Anteil einer beliebigen Funktion w von $x + yi$ der Differentialgleichung (375) für das Geschwindigkeitspotential genügt. Es läßt sich aber jetzt auch noch weiter zeigen, daß, wenn eine dieser Funktionen, etwa Φ, als Geschwindigkeitspotential angesehen wird, der anderen, also Ψ, ebenfalls eine wichtige Bedeutung für die Beschreibung der zugehörigen Flüssigkeitsströmung zukommt.

Um dies nachzuweisen, berechnen wir zunächst, um wieviel sich Ψ ändert, wenn man in der Richtung der Strömungsgeschwindigkeit um ein Längenelement fortschreitet. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$ zwei Einheitsvektoren, die in den Richtungen der X- und der Y-Achse gezogen sind, so kann nach der Bedeutung von Φ die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{i}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

gesetzt werden. Im Zeitelemente dt wird ein Weg $\mathfrak{v}\,dt$ durchlaufen und die Komponenten dieses Wegelements sind

$$dx = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dt, \quad dy = \frac{\partial \Phi}{\partial y}dt.$$

Die Änderung von Ψ, die diesem Fortschreiten entspricht, ist

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y}dy,$$

wenn unter dx und dy die soeben festgestellten Verschiebungskomponenten verstanden werden. Setzt man deren Werte ein, so erhält man

$$d\Psi = dt\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right),$$

und wenn man auf die durch die Gleichungen (376) angegebenen Beziehungen zwischen den Differentialquotienten von Φ und Ψ achtet, so geht dies über in

$$d\Psi = 0.$$

Hiermit ist bewiesen, daß Ψ konstant bleibt, wenn man in der Richtung einer Stromlinie weiter geht. Die Gleichungen

$$\Psi = \text{const}$$

geben daher die Gleichungen aller Stromlinien an, wobei sich die verschiedenen Stromlinien voneinander nur durch verschiedene Werte der auf der rechten Seite der Gleichung stehenden Konstanten unterscheiden.

Wir berechnen ferner, wie groß die Flüssigkeitsmenge ist, die durch ein beliebig gerichtetes Längenelement ds in der Zeiteinheit hindurchströmt. Zu diesem Zwecke zerlegen wir

ds in zwei Komponenten dx und dy. In das durch ds, dx und dy gebildete Dreieck muß nach der Kontinuitätsbedingung ebensoviel einströmen als davon ausströmt. Wenn dx, dy und die beiden Geschwindigkeitskomponenten v_1 und v_2 sämtlich als positiv vorausgesetzt werden, strömt durch die Dreieckseite dx eine Menge $v_2 dx$ ein und durch dy eine Menge $v_1 dy$ aus. Daraus folgt, daß die durch ds einströmende Menge gleich

$$v_1 dy - v_2 dx$$

sein muß. Die Betrachtung bleibt auch gültig, wenn nachher einige der vorkommenden Faktoren negativ werden, wenn man nur beachtet, daß einem negativen Vorzeichen des vorhergehenden Ausdrucks eine durch ds ausströmende Menge entspricht. Drückt man die Geschwindigkeitskomponenten in Φ aus, so geht der Ausdruck über in

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} dy - \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx$$

oder, wenn man auf die Gleichungen (376) achtet, in

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx.$$

Das ist aber das totale Differential $d\Psi$, um das sich Ψ beim Fortschreiten um ds in der jetzt beliebig angenommenen Richtung ändert. Dieses Differential ist demnach gleich der Flüssigkeitsmenge, die zwischen zwei Stromlinien hindurchströmt, die man durch die beiden Endpunkte von ds legen kann. Auch wenn man zwei in endlichem Abstande voneinander verlaufende Stromlinien mit den Gleichungen

$$\Psi = C_1 \quad \text{und} \quad \Psi = C_2$$

miteinander vergleicht, gibt daher der Unterschied der beiden Konstanten C_1 und C_2 die zwischen beiden Stromlinien in der Zeiteinheit dahinfließende Menge an. Wegen dieser wichtigen Eigenschaft hat man der Funktion Ψ einen besonderen Namen gegeben. Man nennt sie die Stromfunktion.

Man kann diese Untersuchung noch durch die folgende mehr anschauliche Betrachtung ergänzen. Man denke sich

nämlich in der Bewegungsebene eine beliebige geschlossene Kurve gezogen, die ganz innerhalb der Flüssigkeit verläuft. Nach der Kontinuitätsbedingung muß in den dadurch umgrenzten Raum ebensoviel Flüssigkeit einströmen, als an anderen Stellen ausströmt. Wählt man daher einen Anfangspunkt O und einen zweiten Punkt A, so muß für jede Linie, die man zwischen O und A ziehen mag, die Flüssigkeitsmenge, die von der einen Seite zur anderen hinüberströmt, gleich groß sein. Wenn der Punkt O ein für allemal gewählt ist, kommt daher jedem anderen Punkte A eine ganz bestimmte, nur von der Lage des Punktes A abhängige Flüssigkeitsmenge zu, die zwischen ihm und O hindurchströmt, ohne Rücksicht auf die besondere Wahl der Verbindungslinie beider Punkte, auf der der Durchgang festgestellt wird. Diese Flüssigkeitsmenge ist gleich dem Unterschiede der Stromfunktion Ψ für beide Punkte. Da es bei dieser Betrachtung nur auf die Unterschiede der Stromfunktion ankommt, ändert sich auch nichts, wenn man nachträglich der Stromfunktion eine beliebige Konstante zufügt, gerade so wie auch das Geschwindigkeitspotential Φ nur bis auf eine willkürlich zu wählende Konstante bestimmt ist. Man kann daher die Konstante auch so bestimmen, daß Ψ für den Anfangspunkt O zu Null wird. Dann ist die zwischen A und O hindurchströmende Menge gleich dem Werte der Stromfunktion im Punkte A.

Außer Φ und Ψ spielt noch eine dritte Größe eine wichtige Rolle bei der Theorie der ebenen Flüssigkeitsströmungen. Die komplexe Größe

$$z = x + iy$$

läßt sich nämlich geometrisch durch einen Vektor abbilden, der vom Koordinatenursprung nach dem Punkte mit den Koordinaten x und y gezogen ist. Indessen ist zwischen dem Vektor und der dadurch abgebildeten komplexen Größe doch noch wohl zu unterscheiden, da beide keineswegs in allen Beziehungen denselben formalen Gesetzen unterworfen sind. Um diesen Unterschied hervorzuheben, schreibe ich für den Vektor

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{i}x + \mathfrak{j}y$$

und mache darauf aufmerksam, daß in der ersten Gleichung i die imaginäre Einheit bildet, deren Quadrat gleich -1 ist, während in der zweiten Gleichung $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$ mit der imaginären Einheit nichts zu tun haben, sondern bloße Richtungsfaktoren sind, die eine Anweisung zur geometrischen Auffassung der zugehörigen Glieder geben und deren Quadrate im Gegensatze zu i gleich $+1$ zu setzen sind. Immerhin ist aber der Zusammenhang zwischen z und $\mathfrak{z}$ so eng, daß er mit Vorteil für die Untersuchung der ebenen Vektorfelder verwendet werden kann.

Nach dieser Vorbemerkung vergleiche man die erste der Gleichungen (377), nämlich

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - i\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

mit dem Ausdrucke für die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, nämlich

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{i}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Man sieht, daß, wenn man $\frac{dw}{dz}$ in der vorher angegebenen Weise durch einen Vektor abbildet, zwischen ihm und $\mathfrak{v}$ eine bemerkenswerte Beziehung besteht. Beide stimmen zwar wegen des negativen Vorzeichens im zweiten Gliede der rechten Seite in der ersten Gleichung nicht völlig miteinander überein. Die beiden Vektoren sind aber von gleicher Größe und sie liegen symmetrisch zueinander in bezug auf die X-Achse. Unmittelbar verwendbar zur Darstellung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ ist dieses Unterschiedes wegen der Differentialquotient $\frac{dw}{dz}$ freilich nicht. Aber man kann diesem Übelstande leicht so weit abhelfen, daß der Zusammenhang nutzbar gemacht werden kann.

Wenn nämlich w als irgend eine Funktion von z angenommen wurde, so kann auch umgekeht z als eine Funktion von w betrachtet und es kann der Differentialquotient von z nach w gebildet werden. Dieser ist einfach das Reziproke des vorigen Differentialquotienten und man hat daher

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial x} - i\frac{\partial \Phi}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{d \Phi}{\partial y}\right)^2}. \tag{379}$$

Der Nenner dieses Ausdruckes ist reell und gleich dem Quadrate der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$. Der Zähler dagegen ist eine komplexe Zahl, die, als Vektor gedeutet, die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ selbst darstellt. Jedenfalls ist daher auch $\frac{dz}{dw}$ selbst, als Vektor gedeutet, mit $\mathfrak{v}$ gleich gerichtet, dessen Größe freilich umgekehrt proportional mit $\mathfrak{v}$ ist. Dieser Unterschied ist unvermeidlich, aber für die Darstellung der Strömungsgeschwindigkeit durch den Differentialquotienten nicht sehr störend. Wichtiger ist, daß jedenfalls die Richtungen übereinstimmen und daß auch die Größe der Geschwindigkeit aus dem Werte des Differentialquotienten gefunden werden kann, wenn dazu auch erst eine kleine Umrechnung erforderlich ist.

Hierauf beruht die Wichtigkeit des Differentialquotienten $\frac{dz}{dw}$ für die Theorie der ebenen Flüssigkeitsströmungen. Man pflegt deshalb die Größe mit einem besonderen Buchstaben, und zwar häufig mit ζ zu bezeichnen, also

$$\zeta = \frac{dz}{dw} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{d\Phi}{\partial y}}{\mathfrak{v}^2} \tag{380}$$

zu setzen. Diese komplexe Größe ζ ist es, die neben Φ und Ψ und der daraus zusammengesetzten Funktion w eine wichtige Rolle in der Hydrodynamik spielt.

Bisher betrachtete ich w als eine Funktion von $x + yi$. Man überzeugt sich aber leicht, daß die vorausgehenden Betrachtungen auch dann noch gültig bleiben, wenn man überall $x - yi$ an Stelle von $x + yi$ setzt. Es wird nicht nötig sein, die Betrachtung für diesen Fall von neuem zu wiederholen.

§ 58. **Flüssigkeitsströmung um einen Zylinder.**

Als einfachstes Beispiel für die Anwendung der vorhergehenden Lehren betrachten wir die ebene Flüssigkeitsströmung um einen kreisförmigen Zylinder, dessen Achse senkrecht zur Bewegungsebene steht und der sich einer in größerer Entfernung davon gradlinig und gleichförmig verlaufenden Strömung als Hindernis in den Weg stellt. Die Aufgabe, die sich unter

diesen Umständen ausbildende Strömung genauer anzugeben, kommt darauf hinaus, die im vorigen Paragraphen besprochene Funktion w zu finden. Ich gebe hier die Lösung an und beweise, daß sie richtig ist, ohne auf die Methoden, die dazu dienen können, die Lösung zu finden, ehe sie bekannt ist, näher einzugehen. Die Funktion w muß in unserem Falle, um den Grenzbedingungen zu genügen, angenommen werden zu

$$w = a\left(z + \frac{\varrho^2}{z}\right), \tag{381}$$

wenn unter a und ϱ zwei reelle Konstanten verstanden werden und z, wie vorher, die komplexe Variable $x + yi$ bedeutet.

Unter dem „Modul" von z oder $x + yi$ verstehen wir die Länge des Vektors $\mathfrak{z}$, durch den z in der Zahlenebene abgebildet wird, und schreiben dafür den Buchstaben r, so daß

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ist. Um nun w in die beiden Anteile Φ und Ψ zu zerlegen, setzen wir

$$w = a\left(x + yi + \frac{\varrho^2}{x + yi}\right) = a\left(x + yi + \frac{\varrho^2(x - yi)}{r^2}\right),$$

$$= ax\left(1 + \frac{\varrho^2}{r^2}\right) + iay\left(1 - \frac{\varrho^2}{r^2}\right).$$

Hiernach ist

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= ax\left(1 + \frac{\varrho^2}{r^2}\right) \\ \Psi &= ay\left(1 - \frac{\varrho^2}{r^2}\right) \end{aligned}\right\}. \tag{382}$$

Um auch noch die im vorigen Paragraphen mit ζ bezeichnete Größe zu ermitteln, differentiieren wir zunächst Gl. (381) nach z und erhalten

$$\frac{dw}{dz} = a\left(1 - \frac{\varrho^2}{z^2}\right),$$

woraus ζ als reziproker Wert gefunden wird zu

$$\zeta = \frac{1}{a} \cdot \frac{z^2}{z^2 - \varrho^2}. \tag{383}$$

Für $z = 0$ würde $\zeta = 0$ und die Geschwindigkeit daher unendlich groß. In der Nachbarschaft des Koordinatenursprungs läßt sich daher die durch Gl. (387) gegebene Lösung jedenfalls nicht benutzen. Aber wir lassen den Koordinatenursprung mit dem Mittelpunkte des Kreises zusammenfallen, durch den der Zylinder in der Bewegungsebene dargestellt wird, und brauchen uns dann nur um die Strömung außerhalb des Kreises zu kümmern. Durch den Kreis hindurch kann nirgends eine Strömung stattfinden, d. h. die Stromgeschwindigkeit muß am Kreisumfange überall tangential gerichtet sein oder der Kreis muß mit einer Stromlinie zusammenfallen. Das trifft bei der angegebenen Lösung ohne weiteres zu, wenn man die Konstante ϱ in den vorhergehenden Formeln gleich dem Radius des Zylinderquerschnittskreises setzt. Denn für alle Punkte auf diesem Kreise ist $r = \varrho$ und daher Ψ nach der zweiten der Gleichungen (382) gleich Null, also längs des Kreises konstant, worin die Bedingung für eine Stromlinie besteht.

Man kann sich davon auch überzeugen, indem man ζ weiter ausrechnet. Zunächst erhält man mit $z = x + yi$ für ζ

$$\zeta = \frac{1}{a} \frac{x^2 - y^2 + 2ixy}{x^2 - y^2 + 2ixy - \varrho^2}$$

oder indem man den Nenner reell macht,

$$\begin{aligned}
\zeta &= \frac{1}{a} \frac{(x^2 - y^2 + 2ixy)(x^2 - y^2 - \varrho^2 - 2ixy)}{(x^2 - y^2 - \varrho^2)^2 + 4x^2y^2} \\
&= \frac{1}{a} \frac{(x^2 - y^2)(x^2 - y^2 - \varrho^2) + 4x^2y^2 - 2ixy\varrho^2}{(x^2 + y^2)^2 - 2\varrho^2(x^2 - y^2) + \varrho^4} \\
&= \frac{1}{a} \frac{(x^2 + y^2)^2 - \varrho^2(x^2 - y^2) - 2ixy\varrho^2}{(x^2 + y^2)^2 + \varrho^4 - 2\varrho^2(x^2 - y^2)}.
\end{aligned}$$

Für alle Punkte des Umfangs ist $x^2 + y^2 = \varrho^2$ und dafür vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\zeta_{(r=\varrho)} = \frac{1}{2a}\left(1 - \frac{2ixy}{\varrho^2 - (x^2 - y^2)}\right) = \frac{1}{2a}\left(1 - i\frac{x}{y}\right). \tag{384}$$

Die Bedingung dafür, daß zwei komplexe Zahlen durch senkrecht zueinander stehende Strecken in der Zahlenebene

dargestellt werden, besteht darin, daß die eine der Zahlen mit i multipliziert eine mit der zweiten gleich oder entgegengesetzt gerichtete Zahl liefert. Durch Multiplikation mit iy geht aber der Klammerwert in der vorhergehenden Formel in $x + iy$ oder in z über, womit von neuem bewiesen ist, daß die Richtung von ζ oder die Richtung der Flüssigkeitsströmung am Umfange des Kreises vom Halbmesser ϱ überall senkrecht zum Halbmesser steht, also in die tangentiale Richtung fällt.

In sehr großer Entfernung von dem Hindernisse kann ϱ als sehr klein gegenüber r angesehen und dagegen vernachlässigt werden. Für ζ erhalten wir an diesen Stellen

$$\zeta_{(r=\infty)} = \frac{1}{a},$$

also ζ reell, d. h. die Strömung erfolgt parallel zur X-Achse mit der konstanten Geschwindigkeit a.

Den kleinsten Absolutwert nimmt ζ an jenen Stellen des Kreisumfangs an, für die $x = 0$ ist, d. h. auf der Y-Achse. Die Geschwindigkeit ist dort gleich $2a$, also doppelt so groß als die Geschwindigkeit der ungestörten Strömung. Das ist ein Ergebnis, das schon im dritten Bande bei der Besprechung der Spannungserhöhung in einer auf Verdrehen beanspruchten Welle durch ein kleines kreisförmiges Loch vorausgenommen wurde (§ 74, Hydrodynamisches Gleichnis, S. 401 der 3. Aufl.). Für die auf der X-Achse liegenden Punkte des Kreisumfangs wird mit $y = 0$ $\zeta = \infty$, d. h. die Geschwindigkeit ist dort gleich Null. Indem man ζ für verschiedene Stellen berechnet oder noch einfacher auf Grund der Gleichung $\Psi = \text{const}$ kann man leicht eine Anzahl von Stromlinien auftragen, wodurch man zu Abb. 19 gelangt, die ein anschauliches Bild des ganzen Strömungsvorgangs liefert.

Die Druckverteilung in der strömenden Wassermasse folgt nachträglich aus Gl. (372), nämlich

$$\tfrac{1}{2}\mu\mathfrak{v}^2 + V + p = C.$$

In der horizontalen Bewegungsebene ist hier überdies das Potential V der äußeren Kräfte, als die hier nur die Schwer-

kraft in Betracht kommt, konstant, so daß sich dieses Glied aus der Gleichung heraushebt. Der Druck p ist demnach an allen Stellen, die sich in größeren Abständen von dem Hindernisse befinden, konstant, etwa gleich p_0. Daß ein Druckgefäll in der Strömungsrichtung dort nicht besteht, hängt damit zusammen, daß wir die Flüssigkeitsbewegung als reibungsfrei

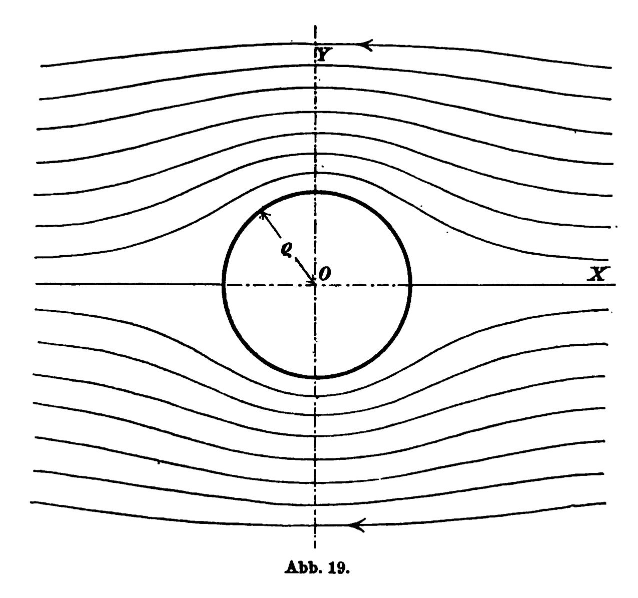


Abb. 19.

vorausgesetzt haben. In der Nähe des Hindernisses kann der Druck

$$p = p_0 + \tfrac{1}{2}\,\mu\,(a^2 - \mathfrak{v}^2) \tag{385}$$

gesetzt werden. Der Druck wird daher mit $\mathfrak{v} = 0$ am größten an den beiden auf der X-Achse liegenden Punkten des Kreisumfangs und den kleinsten Wert

$$p_{\min} = p_0 - \frac{3\mu}{2}\,a^2$$

nimmt er an den auf der Y-Achse liegenden Punkten des Kreisumfangs an.

Für zwei Punkte des Kreisumfangs, die symmetrisch zur Y-Achse oder zur X-Achse liegen, wird der Absolutbetrag von ζ, wie aus Gl. (384) hervorgeht, gleich groß. Daher ist an

solchen Stellen auch der Absolutbetrag der Geschwindigkeit und demnach auch der Druck gleich groß. Daraus folgt, daß sich alle von der strömenden Flüssigkeit auf den Zylinder übertragenen Druckkräfte im Gleichgewichte miteinander halten, d. h. daß bei dem hier betrachteten Strömungsvorgange keine Kraft erforderlich wäre, um den Zylinder in der strömenden Flüssigkeit festzuhalten.

Dieses Ergebnis steht in Übereinstimmung mit der gleichen Schlußfolgerung, zu der wir schon im vierten Bande bei der Untersuchung der Strömung um eine Kugel gekommen waren (3. Aufl. des 4. Bandes, § 53), und die Bemerkungen, die damals dazu gemacht wurden, treffen auch hier zu. Hiernach rührt der resultierende Druck, den das Hindernis tatsächlich von der strömenden Flüssigkeit erfährt, von der Reibung und namentlich von den Mischbewegungen her, durch die der Strömungsvorgang gegenüber dem hier vorausgesetzten abgeändert wird.

Bei geeigneten Versuchsbedingungen, die eine Ausbildung der Mischbewegungen und ihrer Folgen erschweren, kann man aber in der Tat eine Strömung feststellen, die mit der hier theoretisch gefundenen sehr gut übereinstimmt. Solche Versuche hat Professor Hele-Shaw in Liverpool angestellt. Eine Beschreibung davon findet der deutsche Leser am bequemsten in der Zeitschr. d. Vereins D. Ing. 1898, S. 1387. Zwei parallele rechteckige Glasplatten schlossen eine dünne Wasserschicht zwischen sich ein und das Hindernis, um das die Strömung herumfließen mußte, war zwischen die Glasplatten gebracht. Auf der einen Rechteckseite erfolgte der Wasserzufluß, auf der gegenüberliegenden der Wasserabfluß und die beiden anderen waren verschlossen. Auf der Zuflußseite wurde durch feine Öffnungen, die in gleichen Abständen verteilt waren, eine Farblösung in den Flüssigkeitsstrom eingeführt. Dadurch zeichneten sich die zugehörigen Stromlinien deutlich ab. Solange die Geschwindigkeit der Strömung nicht zu groß gewählt wurde, glich das Bild, das man erhielt, sehr nahe dem in Abb. 19 aus der Theorie abgeleiteten. Je dünner die Wasserschicht ist, desto größer darf die Geschwindigkeit gewählt werden, ohne

daß merkliche Abweichungen davon eintreten. Durch die nahe beieinander stehenden parallelen Wände wird nämlich die Ausbildung der Mischbewegungen erschwert. In der Tat gelingt der Versuch auch noch besser, wenn man eine zähere Flüssigkeit an Stelle des Wassers verwendet. Auch dies ist darauf zurückzuführen, daß in einer zähen Flüssigkeit Mischbewegungen unter sonst gleichen Umständen weniger leicht auftreten.

Bei größeren Geschwindigkeiten oder bei einer größeren Dicke der Wasserschicht treten dagegen ganz andere Bewegungen auf, die zu einem Durcheinanderwirbeln der Flüssigkeit führen. Über diesen zweiten und praktisch weitaus wichtigeren Bewegungsvorgang vermag dagegen die heutige Theorie noch nicht viel auszusagen.

Einen beachtenswerten Versuch, Erscheinungen dieser Art theoretisch näher zu kommen, hat jedoch Herr Prof. L. Prandtl gemacht durch den von ihm gewählten Ansatz der Flüssigkeit mit kleiner Reibung. Dieser Ansatz kommt darauf hinaus, daß man in größeren Abständen von einem Hindernisse die Reibung sowohl als die Mischbewegung mit hinreichender Annäherung vernachlässigen, die Bewegung also als eine „Potentialbewegung", wie sie hier besprochen wurde, ansehen darf, während man in der nächsten Nachbarschaft einer Wand auf die Reibung und die durch sie hervorgebrachten Erscheinungen, zu denen auch die Mischbewegung zu rechnen ist, jedenfalls achten muß. Bei der vorhergehenden Theorie war nämlich vorausgesetzt, daß die Flüssigkeit auch unmittelbar an der Zylinderwand ohne Reibung dahinzufließen vermöge, während aus dem üblichen Ansatze für die zähen Flüssigkeiten, der schon im vierten Bande eine kurze Besprechung erfahren hat, hervorgeht, daß selbst bei einem noch so kleinen Werte des Zähigkeitskoeffizienten ein Haften der unmittelbar an die Wand angrenzenden Flüssigkeitsteilchen an der Wand auzunehmen ist. Prandtl erblickt daher in der Verletzung dieser auf jeden Fall zu berücksichtigenden Grenzbedingung an der Wand die Hauptursache für die in vielen Fällen sehr schlechte Übereinstimmung der älteren Theorie der reibungsfreien Flüssigkeit mit der Erfahrung.

Je geringer die Flüssigkeitsreibung ist, desto kleiner wird die Dicke der Grenzschicht, in der die Reibung zu berücksichtigen ist und in der die Geschwindigkeit der Strömung von dem normalen Werte, wie er der „Potentialbewegung" entspricht, bis auf den Wert Null an der feststehenden Wand abnimmt. Man wird es daher als

eine gute Annäherung betrachten dürfen, wenn die Dicke der Grenzschicht als unendlich klein angesehen wird. Der Druck in der Grenzschicht ist dann überall durch den Druck der angrenzenden in der normalen Strömung begriffenen Flüssigkeit mit bestimmt. Je größer die Geschwindigkeit dieser Strömung ist, desto kleiner ist daher der Druck auch in der Grenzschicht. Wenn wir nun einer in der Nähe der Grenzschicht verlaufenden Stromlinie folgen und von Stellen höherer zu Stellen geringerer Geschwindigkeit fortschreiten, so ist damit ein Anstieg des Druckes bedingt. Durch den entgegenstehenden höheren Druck wird gerade die Verzögerung der Strömung herbeigeführt. Der Druckunterschied und damit die Verzögerung ist aber in der Grenzschicht ebenso groß, wie in der angrenzenden Stromlinie. Da nun in der Grenzschicht die Geschwindigkeiten von vornherein schon kleiner waren, als in der außen benachbarten Stromlinie, so wird bei gleicher Verzögerung die Geschwindigkeit in der Grenzschicht sehr bald nicht nur auf Null herabsinken, sondern auch das Vorzeichen wechseln, so daß in der Grenzschicht die Strömung in entgegengesetzter Richtung erfolgt, als in der benachbarten Stromlinie. Damit ist aber ein Wirbel entstanden, der zu einer Loslösung der äußeren Strömung von der als Hindernis dienenden Wand führt. Nach dieser Theorie ist daher auf der der Stömung zugewendeten Seite des Hindernisses eine Flüssigkeitsbewegung anzunehmen, die mit der früher betrachteten Potentialströmung im wesentlichen übereinstimmt, während auf der abgewendeten Seite durch die Fortführung der an der Loslösungsstelle bestehenden Wirbel eine weitgehende Änderung eintritt. Diese Schlüsse werden auch durch die Beobachtung insofern unmittelbar bestätigt, als sich die in strömendem Wasser hinter feststehenden Körpern ausgebildeten Wirbel leicht wahrnehmen lassen.

Zwei Schüler von Prandtl haben an den Ansatz ihres Lehrers weitere Rechnungen geknüpft. H. Blasius behandelt in seiner Göttinger Dissertation „Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung“ den Fall der ebenen Strömung um einen Zylinder (der nicht gerade ein Kreiszylinder zu sein braucht) und E. Boltze dehnt diese Untersuchung in seiner Dissertation „Grenzschichten an Rotationskörpern in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung“ auf die in der Überschrift genannten Fälle aus. Die Rechnungen werden sehr verwickelt. — Eine befriedigende Lösung der ganzen Frage vermag ich in diesen an sich sehr verdienstvollen Arbeiten einstweilen freilich nicht zu erblicken. Deshalb sehe ich auch von einer ausführlichen Wiedergabe hier ab.

§ 59. Zusammenhang der Strömungsprobleme mit Problemen aus der Lehre vom Magnetismus.

Die Bedeutung der Hydrodynamik der reibungsfreien Flüssigkeit liegt nicht ausschließlich in der (oft sehr mangelhaften) Anwendungsfähigkeit auf wirkliche Flüssigkeitsströmungen, sondern sie beruht auch auf der Möglichkeit, die gefundenen Lösungen auf Aufgaben aus anderen Teilen der Physik zu übertragen, bei denen diese Lösungen oft weit besser zutreffen, als in dem ursprünglichen Anwendungsgebiete. Im vorhergehenden Paragraphen wurde schon auf eine solche Übertragung, nämlich auf eine Anwendung in der Theorie der Torsion hingewiesen. Hier soll von einer anderen, praktisch ebenfalls sehr bedeutsamen Anwendung die Rede sein.

Ein magnetisches Feld, das wir hier der Zeit nach als konstant voraussetzen, kann durch eine gerichtete Größe $\mathfrak{B}$, die *magnetische Induktion*, an jeder Stelle des Feldes gekennzeichnet werden. Zieht man Linien, die der Richtung von $\mathfrak{B}$ überall folgen, so heißen diese „*Induktionslinien*“. Häufig werden sie auch kurzweg als „Kraftlinien“ bezeichnet, obschon dies nicht in Übereinstimmung mit dem in der Theorie des Magnetismus eingeführten Sprachgebrauche steht, wonach sich diese Bezeichnung auf die dem Verlaufe des Vektors $\mathfrak{H}$ der magnetischen Kraft folgenden Linien bezieht.

Das magnetische Feld kann nun unter dem Bilde einer strömenden Flüssigkeit dargestellt werden, so daß die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ überall in die Richtung von $\mathfrak{B}$ fällt und der Größe nach proportional damit ist. Man weiß ferner, daß der Induktionsfluß, der in ein Raumelement eintritt, stets ebenso groß ist, als der davon austretende, daß also die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ der die Induktion abbildenden Strömung der Kontinuitätsbedingung ebenso genügt, wie bei einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit. Dazu kommt noch, daß in „magnetisch weichen“ Körpern, wenn sie nicht von elektrischen Strömen durchzogen sind, das Feld wirbelfrei ist. Das Problem, den Induktionsfluß in einem solchen Falle zu ermitteln, fällt daher in den wesent-

lichen geometrischen Bedingungen mit einem hydrodynamischen Probleme zusammen.

Von den Anwendungen, die durch diesen Zusammenhang ermöglicht sind, bespreche ich zunächst eine, die sich auf die Strömung einer reibungsfreien Flüssigkeit um eine Kugel bezieht, also auf einen Fall, der schon in § 53 des 4. Bandes, 3. Aufl. behandelt wurde. Man betrachte ein homogenes magnetisches Feld, d. h. ein Feld, bei dem $\mathfrak{B}$ und daher auch $\mathfrak{h}$ überall gleich groß und gleichgerichtet sind. Dieses Feld bestehe in einer weichen Eisenmasse von größerer Ausdehnung. In dieser sei aber an einer Stelle ein kleiner kugelförmiger Hohlraum angebracht, und es fragt sich jetzt, welche Störung das vorher homogene Feld dadurch erfährt.

Einige Induktionslinien gehen zwar immer noch durch den mit Luft gefüllten kugelförmigen Hohlraum. Wegen der viel größeren „Permeabilität“ des Eisens gegenüber der Luft ist dies aber nur ein ganz geringer Bruchteil und der Induktionsfluß erfolgt daher fast genau so, als wenn der Luftraum für ihn undurchdringlich wäre. Damit haben wir aber in allen wesentlichen Punkten denselben Fall wie bei der Strömung der Flüssigkeit um eine Kugel. Wir können daher das, was wir früher dafür fanden, ohne weiteres benutzen. Es zeigt sich also z. B., daß $\mathfrak{B}$ seinen größten Wert in dem durch die Kugel gestörten Felde am Äquator der Kugel annimmt und daß $\mathfrak{B}$ dort $1\frac{1}{2}$ mal so groß ist als im ungestörten Felde.

Durch eine nachträgliche kleine Änderung der früheren Lösung kann man übrigens sofort auch dem Umstande Rechnung tragen, daß ein kleiner Teil des Induktionsflusses doch noch durch den kugelförmigen Hohlraum geht. Dazu ist nur nötig, dem früheren Geschwindigkeitspotentiale (Gl. 243 der 3. Aufl. des 4. Bandes)

$$\Phi = az\left(\frac{\varrho^3}{2r^3} + 1\right)$$

noch ein Glied bz beizufügen, womit es übergeht in

$$\Phi' = az\left(\frac{\varrho^3}{2r^3} + 1\right) + bz,$$

gültig für den Außenraum. Unter b ist dabei eine noch näher zu ermittelnde Konstante zu verstehen. Von den Geschwindigkeitskomponenten wird durch die Beifügung des neuen Gliedes nur die in der Z-Richtung, also in der Strömungsrichtung des ungestörten Feldes gehende um den konstanten Summanden b vermehrt. Die Kontinuitätsbedingung ist immer noch erfüllt und auch die Bedingung an der Kugeloberfläche, wenn wir die Stromgeschwindigkeit im Luftraum der Kugel überall parallel zur Z-Achse und von der Größe b annehmen. Im ungestörten Felde des Außenraumes wird die Stromgeschwindigkeit jetzt durch $a + b$ angegeben.

Wie groß man b zu wählen hat, wenn die magnetische Permeabilität des Eisens gleich μ und die der Luft gleich Eins gesetzt wird, geht ebenfalls aus einer einfachen Betrachtung, die sich auf einen bekannten Satz aus der Lehre vom Magnetismus stützt, ohne weiteres hervor. Am Äquator der Kugel ist nämlich der Induktionsfluß im Eisenraume gleichgerichtet mit dem Induktionsflusse im Luftraume, indem beide in die Tangentialebene der Kugeloberfläche fallen, und nach jenem Satze müssen sich daher beide der Größe nach zueinander verhalten wie $\mu : 1$. Im Eisenraume wird aber an dieser Stelle die Stromgeschwindigkeit jetzt gleich $\frac{3a}{2} + b$ und man hat daher die Bedingungsgleichung

$$\frac{3a}{2} + b = \mu b,$$

woraus

$$b = \frac{3a}{2(\mu - 1)} = \frac{3(a+b)}{2\mu + 1}$$

folgt. Da bei weichem Eisen und nicht zu starker Sättigung die Verhältniszahl μ mindestens einige tausend ausmacht, beträgt b nur einen ganz geringen Bruchteil der Stärke $a + b$ des ungestörten Feldes im Eisenraume.

Sehr eng verwandt mit der vorigen ist auch die folgende Aufgabe. Eine Kugel aus weichem Eisen von der Permeabilität μ sei in einem von Luft erfüllten homogenen magnetischen Felde, etwa im magnetischen Felde der Erde, aufgestellt. Man

soll ermitteln, wie sich der Induktionsfluß in der Kugel zu dem ungestörten Felde im Luftraume verhält. Wir bilden zu diesem Zwecke das Geschwindigkeitspotential für den Außenraum

$$\Phi'' = bz - az\left(\frac{\varrho^3}{2r^3} + 1\right),$$

das bei passender Wahl von a und b allen Anforderungen der Aufgabe entspricht. Im ungestörten Felde, also für $r = \infty$, erlangt der wiederum parallel zur Z-Achse gerichtete Vektor des Feldes die Größe $b - a$. In der Eisenkugel geht er überall parallel zur Z-Achse und hat die Größe b, und am Äquator der Kugel geht er im Luftraume ebenfalls in dieser Richtung und hat die Größe $b - \frac{3a}{2}$. Dieselbe Überlegung wie vorher liefert die Bedingung

$$b = \mu\left(b - \frac{3a}{2}\right) \quad \text{oder} \quad b = \frac{3\mu(b-a)}{\mu + 2}.$$

Da μ eine sehr große Zahl ist, kann man dafür genau genug auch

$$b = 3(b - a)$$

schreiben, d. h. der Induktionsfluß wird in der Eisenkugel dreimal so groß als im ungestörten Felde des Luftraumes. Das ist ein sehr bekanntes und oft benutztes Ergebnis der Theorie des Magnetismus.

Selbstverständlich kann auch die im vorigen Paragraphen behandelte ebene Flüssigkeitsströmung um einen Zylinder in derselben Weise auf die Lehre vom Magnetismus übertragen werden. Die Gleichung für das Geschwindigkeitspotential (Gl. 382)

$$\Phi = ax\left(\frac{\varrho^2}{r^2} + 1\right)$$

geht durch Beifügung eines Gliedes bx über in

$$\Phi' = ax\left(\frac{\varrho^2}{r^2} + 1\right) + bx$$

und entspricht alsdann dem Induktionsflusse im Außenraum um ein von Luft erfülltes zylindrisches Loch im Eisen, wenn die Zylinderachse senkrecht zu der jetzt in die Richtung der X-Achse fallenden Induktion des ungestörten Feldes steht.

Auf der Y-Achse wird die Geschwindigkeit am Kreisumfange gleich $2a + b$ im Eisen und gleich b in der Luft, woraus

$$b = \frac{2a}{\mu - 1} = \frac{2(a + b)}{\mu + 1}$$

folgt. Da μ sehr groß ist, beträgt $2a + b$ nahezu das Doppelte des ungestörten Feldes $a + b$.

Für eine zylindrische Eisenstange, die senkrecht zu einem homogenen magnetischen Felde im Luftraum gestellt wird, gilt im Außenraum das Geschwindigkeitspotential

$$\Phi'' = bx - ax\left(\frac{\varrho^2}{r^2} + 1\right) \cdot$$

Die Stärke des ungestörten Feldes im Luftraum wird durch $b - a$ und die Feldstärke im Eisen durch b angegeben. Zwischen den Konstanten a und b erhält man auf demselben Wege wie vorher die Bedingungsgleichung

$$b = \mu(b - 2a),$$

woraus

$$b = \frac{2\mu(b - a)}{\mu + 1}$$

gefunden wird. Wegen der Größe von μ kann dies genau genug dahin ausgesprochen werden, daß die Induktion in der zylindrischen Eisenstange doppelt so groß ist als die Induktion im ungestörten Felde des Luftraumes.

Selbstverständliche Voraussetzung für die Anwendung dieser Ergebnisse ist eine genügende Länge der Eisenstange im Verhältnisse zum Durchmesser und die Beschränkung auf die mittleren Teile dieser Länge, da in der Nähe der Zylinderenden ganz andere Bedingungen vorliegen.

§ 60. Die Flüssigkeitsstrahlen.

Die oft sehr mangelhafte Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der Theorie der wirbel- und reibungsfreien Flüssigkeitsströmungen mit den Erscheinungen der Wirklichkeit hat Helmholtz zu der Lehre von den Flüssigkeitsstrahlen geführt, die

den Beobachtungen in vielen Fällen weit besser gerecht wird. Helmholtz wies z. B. darauf hin, daß die einem Schornsteine entströmende Rauchsäule bei ruhiger Luft oft auf große Strecken hin ganz geschlossen emporsteigt, so daß schon in geringer Entfernung davon die Luft fast in Ruhe bleibt, während bei wirbelfreier Bewegung der Rauch sich sofort nach dem Verlassen des Schornsteins nach allen Seiten hin ausbreiten müßte. Er bemerkte auch, daß man einen feinen Luftstrahl durch eine leuchtende Flamme hindurchblasen kann, so daß dadurch ein Loch aus der Flamme herausgeschnitten wird, ohne daß der übrige Teil der Flamme dadurch merklich in Mitleidenschaft gezogen würde.

Die Bewegung ist in solchen Fällen natürlich nicht mehr wirbelfrei. Man denke sich nämlich einen geschlossenen viereckigen Integrationsweg, von dem eine Seite ein Stück einer Strömungslinie des Strahls bildet, während die beiden anschließenden Seiten rechtwinklig zu den Stromlinien nach außen führen und dort durch eine in der ruhenden oder wenig bewegten Flüssigkeit gezogene vierte Seite miteinander verbunden werden. Das Linienintegral der Geschwindigkeit kann für diesen geschlossenen Integrationsweg nicht zu Null werden, denn die in die Stromlinie fallende Seite liefert zu dem Linienintegrale einen hohen Beitrag, die beiden anschließenden Seiten tragen dazu überhaupt nichts bei und die vierte Seite jedenfalls auch nur wenig.

Man schließt sich nun dem wirklichen Verhalten jedenfalls näher an, wenn man im Strahle und außerhalb des Strahles zwar immer noch von der Berücksichtigung der Wirbel absieht, die Strömung also dort wie eine wirbelfreie behandelt, an der Grenze des Strahls aber eine Trennungsfläche annimmt, längs deren die Art der Bewegung sprungweise wechselt. Längs der Trennungsfläche ist die Bedingung für die wirbelfreie Bewegung nicht mehr erfüllt, sie bildet vielmehr den Sitz von Wirbeln und wird daher auch als eine Wirbelfläche bezeichnet.

Ein solcher durch die Wirbelfläche von der nahezu ruhenden Flüssigkeit getrennter Strahl kann sich, wie schon aus den erwähnten Beispielen hervorgeht, unter Umständen auf längere Strecken hin ziemlich rein erhalten. Mit der Zeit wird er freilich aufgelöst, da die starken Geschwindigkeitsunterschiede an benachbarten Stellen in der Nähe der Trennungsfläche in Wirklichkeit eine Flüssigkeitsreibung hervorbringen, durch die die Wirbel immer weiter ausgebreitet werden, womit die Bewegungsart geändert wird. Läßt man einen Wasserstrahl in den Luftraum übertreten, so sind die Reibungen an der Trennungsfläche zwischen Wasserstrahl und Luft übrigens unerheblich, so daß sie an der Bewegung nicht viel zu ändern vermögen. Freilich kommt in diesem Falle die Schwere hinzu, die eine Ablenkung des Strahls nach unten bewirkt. Es ist aber nützlich, zu untersuchen, wie die Bewegung im Strahle erfolgen müßte, wenn die Schwere nicht einwirkte. Es kommt dies darauf hinaus, die schon im ersten Bande dieses Werkes besprochene Kontraktion eines aus einer Öffnung in dünner Wand hervortretenden Wasserstrahls noch etwas näher zu besprechen, als es dort geschehen konnte. Dabei muß hier ferner noch angenommen werden, daß die Bewegung als eine ebene betrachtet werden kann, d. h. die Öffnung soll ein langer Schlitz von überall gleicher Breite sein, so daß durch jeden Querschnitt des Schlitzes die Bewegung in derselben Weise erfolgt. Auf die Untersuchung der damit umschriebenen Aufgabe werde ich mich hier beschränken, wobei ich bemerke, daß man die Bedingungen auch noch ein wenig variieren kann, ohne die Lösung dadurch unmöglich zu machen oder sie auch nur erheblich zu erschweren. Vorausschicken möchte ich indessen noch, daß die hier zu gebende Lösung immer noch keineswegs als physikalisch streng richtig betrachtet werden darf, da die Flüssigkeit auch bei ihr als reibungsfrei und die Flüssigkeitsbewegung im Innern des Strahls und im Innern des Gefäßes, aus dem der Strahl austritt, als wirbelfrei angesehen wird. Sie gibt aber jedenfalls einen besseren Aufschluß über die ganze Erscheinung, als die sum-

marische Erörterung, mit der wir uns im ersten Bande begnügen mußten.

Die Lösung hängt auch hier davon ab, eine Funktion w der komplexen Variabeln z zu ermitteln, deren reeller Teil das Geschwindigkeitspotential Φ und deren imaginärer Teil die Stromfunktion Ψ im Gefäße und im freien Strahle angibt. Die Gestalt dieser Funktion w hängt von den Grenzbedingungen des Problems ab. Die Wände des Gefäßes müssen mit Stromlinien zusammenfallen. Wenn wir uns das Gefäß jenseits der Wand, um die Aufgabe zu vereinfachen, sehr ausgedehnt im Vergleiche zur Querseite des Ausflußschlitzes denken, muß die Geschwindigkeit im Gefäße in größeren Abständen von der Ausflußöffnung sehr klein und der Flüssigkeitsdruck daher dort überall konstant sein. Für die Grenze des freien Strahles kommt dazu noch eine andere Bedingung. Der Druck, den die angrenzende Luft (oder allgemeiner die angrenzende ruhende Flüssigkeit) auf die Oberfläche des Strahls ausübt, ist nämlich überall von der gleichen Größe. Mit dem Drucke hängt aber die Geschwindigkeit nach Gl. (372) zusammen und da hier das Potential V der äußeren Kräfte wegfällt, muß dem konstanten Drucke auch ein konstanter Absolutwert der Geschwindigkeit entsprechen. Analytisch gesprochen, muß daher längs der „Trennungsfläche", d. h. an der Grenze des Strahls der Differentialquotient von w oder auch die komplexe Größe ζ einen konstanten Modul haben. Da diese Bedingungen genügen, um das Problem physikalisch zu kennzeichnen, schließen wir, daß es nur eine einzige Lösung haben kann. Wenn man also eine Lösung angeben kann, die allen genannten Bedingungen entspricht, haben wir damit auch die in Wirklichkeit zu erwartende Flüssigkeitsbewegung gefunden.

Man setze

$$\zeta = \frac{dz}{dw} = e^{-w} + \sqrt{e^{-2w} - 1}, \tag{386}$$

woraus durch eine Integration, die sich leicht ausführen läßt, auch z als Funktion von w gefunden werden kann. Ein Glied des Ausdrucks, zu dem man hierbei gelangt, enthält aber einen

arc tg, also eine periodische Funktion und daraus erwachsen für die weitere Behandlung gewisse Schwierigkeiten oder wenigstens Umständlichkeiten, die man besser umgeht, indem man die weitere Behandlung unmittelbar an Gl. (386) anknüpft. Allerdings ist auch schon in Gl. (386) eine gewisse Vorsicht wegen des Wurzelvorzeichens geboten; daraus werden uns aber keine besonderen Schwierigkeiten entstehen.

Für unsere Zwecke genügt es vollständig, wenn wir nur wissen, daß durch Gl. (386) zugleich z als eine Funktion von w und hiermit auch w als eine Funktion von z gegeben ist und daß demnach der durch diese Gleichung gegebene Wert von ζ einer möglichen Flüssigkeitsbewegung entspricht. Wie diese Strömung im einzelnen erfolgt, läßt sich schon aus Gl. (386) selbst ohne weiteres erkennen, wenn man berücksichtigt, daß der zur komplexen Variabeln ζ gehörige Vektor überall in die Richtung der Geschwindigkeit fällt und deren Größe umgekehrt proportional ist. Es stört dabei nicht viel, daß der Ort in der Ebene, zu dem jedes ζ gehört, aus Gl. (386) nicht ohne weiteres durch seine Koordinaten ausgedrückt werden kann. Man kann nämlich einen bestimmten Ort in der Flüssigkeitsbewegung auch noch auf eine andere Art als durch seine rechtwinkligen Koordinaten beschreiben. Dazu genügt erstens die Angabe der Stromlinie, zu der der betreffende Punkt gehört, und zweitens die Angabe des zugehörigen Geschwindigkeitspotentials. Längs einer Stromlinie muß das Geschwindigkeitspotential seiner Definition nach in der Stromrichtung fortwährend wachsen und daher wird ein Punkt auf der Stromlinie durch die Angabe des zugehörigen Geschwindigkeitspotentials eindeutig bezeichnet. Jedem Werte von w entspricht aber zugleich ein bestimmter Wert von Ψ und von Φ und daher kann der Ort, auf den sich ζ bezieht, auch schon durch die Angabe der komplexen Variabeln w ausreichend gekennzeichnet werden.

Zur besseren Orientierung schicke ich hier schon eine Zeichnung in Abb. 20 voraus, die der durch Gl. (386) beschriebenen Bewegung entspricht und die einer Figur aus Holzmüller, „Ingenieur-Mathematik, Bd. II, Das Potential“

(Leipzig, 1898) nachgebildet ist. $ABCD$ ist die dünne Wand, in der sich der Schlitz BC befindet. Oberhalb der Wand liegt das Gefäß, aus dem die Stromlinien durch die Öffnung austreten, und die die Stromlinien senkrecht schneidenden Kurven sind die Linien gleichen Geschwindigkeitspotentials. Die Grenzen des freien Strahls sind die Linien BE und CF. Die Symmetrieachse ist zur Y-Achse gewählt und die X-Achse fällt mit der Wand zusammen. — Ich habe freilich erst noch nachzuweisen, daß Gl. (386) zu einer solchen Bewegung führt.

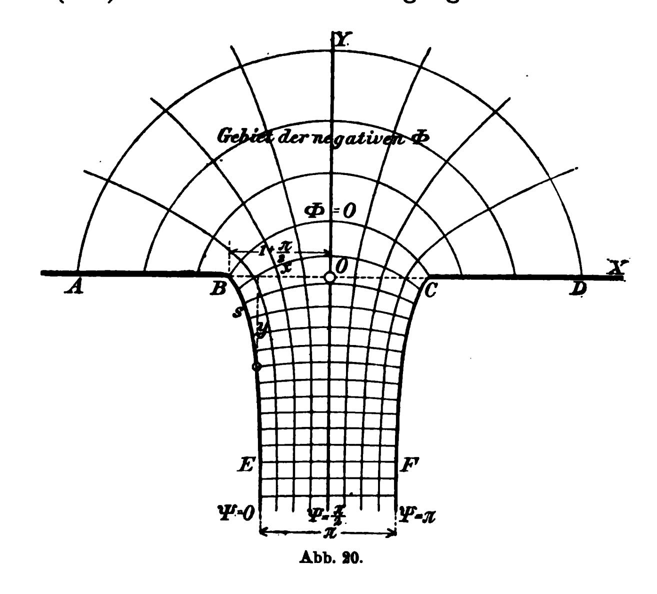


Abb. 20.

Zunächst betrachte ich jene Stromlinie, für die $\Psi = 0$ ist. Hiermit wird $w = \Phi$ und Gl. (386) geht über in

$$\zeta = e^{-\Phi} + \sqrt{e^{-2\Phi} - 1}. \tag{387}$$

Solange Φ negativ ist, bleibt ζ reell. Die Strömung geht daher in der Richtung der X-Achse und die Stromlinie $\Psi = 0$ ist für die Werte von $\Phi = -\infty$ bis $\Phi = 0$ eine in der Richtung der X-Achse gehende Grade. Hiernach entspricht der eine Teil der Wand AB in Abb. 20 dem ersten Stücke der Stromlinie $\Psi = 0$.

Wenn Φ positiv ist, wird die Wurzel in Gl. (242) imaginär. Man schreibt dann besser dafür

$$\zeta = e^{-\Phi} - i\sqrt{1 - e^{-2\Phi}}. \tag{388}$$

Daß hierbei die Wurzel $\sqrt{-1}$ gleich $-i$ und nicht (was an und für sich am nächsten liegen würde) gleich $+i$ gesetzt ist, wird alsbald näher begründet werden.

Dieser Teil der Stromlinie $\Psi = 0$ entspricht der Grenze BE des freien Strahls. Daß die Linie von der Kante B der Ausflußöffnung, die zum Werte $\Phi = 0$ gehört, ausgeht, ist bereits bekannt. Es muß aber noch bewiesen werden, daß ζ zugleich die Bedingung für die freie Grenze eines Strahls erfüllt. Wie wir vorher sahen, besteht diese Bedingung darin, daß ζ überall längs der Grenze denselben Modul (oder der zugehörige Vektor denselben Absolutwert) hat. Das Quadrat des Moduls einer komplexen Zahl ist aber gleich der Quadratsumme aus dem reellen und dem imaginären Anteile und für ζ gibt dies nach Gl. (388) den Wert 1. Auch diese Grenzbedingung wird demnach erfüllt.

Für die Stromlinie $\Psi = 0$ setzten wir das Wurzelvorzeichen in Gl. (387) als positiv fest. Das Wurzelvorzeichen in anderen Fällen ist hiernach so zu bestimmen, daß ein stetiger Übergang von jeder Stelle zur benachbarten stattfindet. Wir betrachten jetzt irgend eine andere Stromlinie, für die Ψ einen Wert zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ hat. Mit $w = \Phi + i\Psi$ erhält man

$$e^{-w} = e^{-\Phi} \cdot e^{-i\Psi} = e^{-\Phi}(\cos\Psi - i\sin\Psi).$$

Setzt man dies in Gl. (386) ein, so erhält man

$$\zeta = e^{-\Phi}(\cos\Psi - i\sin\Psi) + \sqrt{e^{-2\Phi}(\cos 2\Psi - i\sin 2\Psi) - 1}.$$

Die Wurzel aus einer komplexen Größe kann ausgezogen werden mit Hilfe der Formel

$$\sqrt{a+bi} = \pm\sqrt{\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}} \pm i\sqrt{-\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}}$$

Das Vorzeichen des reellen Gliedes kann hierbei zunächst beliebig genommen werden; dann muß aber, falls b positiv ist,

das Vorzeichen des imaginären Gliedes ebenso gewählt werden, während bei negativem b beide Wurzelvorzeichen entgegengesetzt sein müssen. Nun war für $\Psi = 0$ und negatives Φ das positive Vorzeichen für das dann allein noch übrig bleibende reeelle Glied gewählt. Für Werte von Ψ, die zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegen, wird die zuvor mit b bezeichnete Größe negativ. Man hat daher für ζ

$$\zeta = e^{-\Phi}(\cos \Psi - i \sin \Psi) + \sqrt{\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}}$$
$$- i\sqrt{-\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}},$$

wobei a und $a^2 + b^2$ zur Abkürzung für die Ausdrücke

$$a = e^{-2\Phi} \cos 2\Psi - 1$$
$$a^2 + b^2 = e^{-4\Phi} - 2e^{-2\Phi} \cos 2\Psi + 1$$

gesetzt sind. Hiermit erklärt sich auch die Wahl, die in Gl. (388) für das Wurzelvorzeichen getroffen werden mußte. — Wird ferner $\Psi = \frac{\pi}{2}$, so erhält man hiernach

$$\zeta = - ie^{-\Phi} - i\sqrt{e^{-2\Phi} + 1},$$

d. h. ζ ist rein imaginär und die Strömung erfolgt längs der Stromlinie $\Psi = \frac{\pi}{2}$ überall parallel zur Y-Achse. Es macht dabei auch keinen Unterschied, ob Φ negativ, Null oder positiv ist, d. h. diese Stromlinie ist ihrer ganzen Ausdehnung nach gradlinig. Sie fällt mit der Symmetrieachse der Abb. 20 zusammen. Wenn Ψ noch größer wird als $\frac{\pi}{2}$, wird der Ausdruck

$$b = - e^{-2\Phi} \sin 2\Psi$$

positiv und beim Ausziehen der Wurzel aus der komplexen Größe $a + bi$ müssen nun beide Glieder gleiche Vorzeichen erhalten. An der Stromlinie $\Psi = \frac{\pi}{2}$ hatte aber das imaginäre Glied ein negatives Vorzeichen und dieses muß es auch weiterhin behalten. Das reelle Glied verschwand an der Übergangsstelle und sein Vorzeichen jenseits derselben kann daher nur daraus

geschlossen werden, daß es dem des imaginären Gliedes gleich gewählt werden muß. Daher ist für die zwischen $\Psi = \frac{\pi}{2}$ und $\Psi = \pi$ liegenden Stromlinien

$$\zeta = e^{-\Phi}(\cos\Psi - i\sin\Psi) - \sqrt{\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}}$$
$$- i\sqrt{-\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}}$$

zu setzen. Für die Stromlinie $\Psi = \pi$ endlich geht dies über in

$$\zeta = -e^{-\Phi} - \sqrt{\frac{e^{-2\Phi} - 1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(e^{-2\Phi} - 1)^2}}$$
$$- i\sqrt{\frac{1 - e^{-2\Phi}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(e^{-2\Phi} - 1)^2}}.$$

Die innere Quadratwurzel ist hier noch nicht ausgezogen; es geschah deshalb nicht, weil das Vorzeichen dieser Wurzel auf jeden Fall so zu wählen ist, daß ein positiver Wert herauskommt. Wir haben daher zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem Φ negativ oder positiv ist. Ist Φ negativ, also $e^{-2\Phi}$ größer als Eins, so wird für den zugehörigen Teil der Stromlinie $\Psi = \pi$

$$\zeta = -e^{-\Phi} - \sqrt{e^{-2\Phi} - 1}, \tag{389}$$

d. h. ζ ist reell und die Stromlinie ist geradlinig und verläuft in der Richtung der X-Achse. Zugleich bemerkt man, daß dieser Wert von ζ das Negative des für die Stromlinie $\Psi = 0$ in Gl. (387) gefundenen ist. Das betreffende Stück der Stromlinie $\Psi = \pi$ entspricht daher dem anderen Teile CD der graden Wand des Gefäßes und die Geschwindigkeiten sind in entsprechenden Punkten beider Wandteile, wie auch schon aus Gründen der Symmetrie zu erwarten war, gleich groß und entgegengesetzt gerichtet.

Wird dagegen Φ positiv, so geht der Ausdruck für ζ über in

$$\zeta = -e^{-\Phi} - i\sqrt{1 - e^{-2\Phi}}. \tag{390}$$

Dieser Teil der Stromlinie $\Psi = \pi$ entspricht der zweiten freien Grenzlinie CF des Strahls. Der imaginäre Anteil stimmt, wie

ebenfalls aus Symmetriegründen zu erwarten war, mit dem von ζ in Gl. (388) für die erste Grenzlinie überein, und der reelle Anteil hat entgegengesetztes Vorzeichen wie dort. Daß der Modul von ζ überall längs der Grenzlinie den konstanten Wert 1 und daher auch die Geschwindigkeit überall den Absolutwert 1 hat, erkennt man auf dieselbe Weise wie vorher im Anschlusse an Gl. (388).

Es bleibt nur noch übrig die Flüssigkeitsbewegung in größeren Entfernungen von der Ausflußöffnung zu betrachten. Im Innern des Gefäßes, also für negative Werte von Φ, kann man in großer Entfernung von der Öffnung $e^{-\Phi} = \infty$ setzen. Auch e^{-w} ist dann eine komplexe Zahl von unendlich großem Modul und aus Gl. (386) folgt, daß dann auch ζ komplex unendlich groß ist. Die Geschwindigkeit ist aber dem Modul von ζ umgekehrt proportional und sie erlangt daher in großer Entfernung von der Öffnung einen unendlich kleinen Absolutwert, wie es unseren Grenzbedingungen entspricht. — Für positive Werte von Φ, die zu dem freien Strahle gehören, kann man in größerer Entfernung von der Öffnung $e^{-2\Phi} = 0$ setzen und e^{-w} verschwindet damit ebenfalls. Es bleibt daher

$$\zeta = \sqrt{-1} = -i,$$

wobei auch hier zur Begründung für das Wurzelvorzeichen auf die vorhergegangene Untersuchung über $\sqrt{a + bi}$ zu verweisen ist. In größerer Entfernung von der Öffnung erfolgt daher die Strömung in allen Stromlinien mit der Geschwindigkeit 1 (entgegen der positiven Y-Achse) und die Stromlinien werden dort zueinander parallel.

Der Nachweis, daß die durch Gl. (386) gegebene Lösung allen Grenzbedingungen unseres Problems entspricht, ist nun vollständig erbracht. Wir können jetzt noch dazu übergehen, die Form der Grenzlinie, also etwa die Gestalt der Stromlinie $\Psi = 0$ vom Punkte $\Phi = 0$ an bis zu $\Phi = +\infty$ festzustellen und hiermit auch die Kontraktion des Strahls zu berechnen. Die Koordinaten eines Punktes dieser Stromlinie seien x und y und der Bogen vom Punkte $\Phi = 0$, also von der

Kante der Ausflußöffnung an bis zum Punkte xy sei mit s bezeichnet. Da die Geschwindigkeit längs der Grenzlinie den konstanten Wert Eins hat, folgt

$$\frac{d\Phi}{ds} = 1 \quad \text{oder} \quad \Phi = s \quad \text{und auch} \quad w = s.$$

Aus Gl. (386) bezw. Gl. (388) wird daher hier

$$\zeta = \frac{dz}{ds} = e^{-s} - i\sqrt{1 - e^{-2s}}.$$

Wenn wir hier $z = x + yi$ setzen und die reellen und imaginären Teile trennen, zerfällt diese Gleichung in die beiden

$$\frac{dx}{ds} = e^{-s}; \quad \frac{dy}{ds} = -\sqrt{1 - e^{-2s}}, \tag{391}$$

die sich leicht integrieren lassen. Aus der ersten erhalten wir

$$x = C - e^{-s}.$$

Die Bedeutung der Integrationskonstanten C folgt daraus, daß für $s = \infty$ die Abszisse x der Asymptote an die Grenzlinie gleich C wird. Für $s = 0$ ist dagegen $x = C - 1$, d. h. die Asymptote geht um die Strecke Eins an der Kante der Ausflußöffnung vorüber. Setzt man

$$e^{-s} = C - x$$

in die vorhergehenden Gleichungen ein, so erhält man für die Grenzlinie die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\left(\frac{1}{C - x}\right)^2 - 1}, \tag{392}$$

die ebenfalls leicht integriert werden kann. Zur Bestimmung der Integrationskonstanten C beachte man schließlich, daß nach den Gl. (376)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

ist. In größerer Entfernung von der Ausflußöffnung, wo die Stromlinien schon als parallel zur Y-Achse betrachtet werden können, ist überall

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -1$$

nämlich gleich der dort bestehenden Geschwindigkeit und damit

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 1 \quad \text{oder} \quad \Psi = \Psi_0 + x,$$

wenn mit Ψ_0 der Wert von Ψ auf der Y-Achse bezeichnet wird. Dieser ist aber, wie wir wissen, gleich $\frac{\pi}{2}$ und für $x = C$ wird $\Psi = 0$. Hieraus folgt

$$C = -\frac{\pi}{2}.$$

Die ganze Breite des Strahls nach vollständiger Kontraktion ist daher gleich π und die Breite der Ausflußöffnung gleich $2\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) = 2 + \pi$. Der Kontraktionskoeffizient, d. h. das Verhältnis zwischen dem kontrahierten Querschnitte und dem Querschnitte der Ausflußöffnung wird daher gleich

$$\frac{\pi}{\pi + 2} = 0{,}61 \cdots$$

Die Größen ζ, w usf. treten in den vorhergehenden Rechnungen überall nur als absolute Zahlen auf, ohne Rücksicht auf die Dimensionen, die ihnen ihrer physikalischen Bedeutung nach zukämen. Man könnte dem zwar leicht abhelfen, indem man an Stelle von w überall ein Verhältnis $\frac{w}{w_0}$ setzte, wobei w_0 die konstante Einheit wäre, in der die w auszumessen sind, und ähnlich bei den übrigen Größen. Es ist aber einfacher, die Gleichungen so stehen zu lassen, wie sie lauten, und die Fundamentaleinheiten nachträglich passend zu wählen, so daß die Zahlen in den Formeln das richtige Maß für die Größen bilden, denen sie entsprechen. Zunächst muß die Einheit der Länge so gewählt werden, daß die Breite der Öffnung $\pi + 2$ Längeneinheiten enthält. Zugleich muß ferner die Einheit der Zeit so bestimmt werden, daß im Strahle nach erfolgter Kontraktion während dieser Zeit die Längeneinheit zurückgelegt wird. Dann sind die vorhergehenden Formeln ohne weiteres auf jeden gegebenen Fall anwendbar; der Kontraktionskoeffizient, auf dessen Ableitung es besonders ankam, ist übrigens von diesen besonderen Festsetzungen unabhängig.

Schließlich sei noch einmal hervorgehoben, daß die Lehre von den Flüssigkeitsstrahlen zunächst auch solche Fälle umfaßt, in denen der austretende Strahl in eine ruhende Flüssigkeit der gleichen Art eindringt, wie etwa ein Luftstrahl in den Luftraum oder wie ein unter Wasser ausmündender Wasserstrahl. Indessen liegt in diesen Fällen die Möglichkeit zur Auflösung des Strahls durch die Ausbreitung der Wirbel von der Trennungsfläche her infolge der Reibungen viel näher und die Entwicklungen werden daher weniger zuverlässig oder auch ganz unbrauchbar.

Eine beachtenswerte Anwendung hat die Lehre von den Flüssigkeitsstrahlen namentlich zur Berechnung des Widerstandes gefunden, den eine Flüssigkeit einem relativ zu ihr bewegten Körper entgegensetzt. Wir sahen früher, daß eine vollkommene Flüssigkeit bei wirbelfreier Bewegung überhaupt keinen Widerstand leistet. Dagegen kann man einen solchen Widerstand herausrechnen, wenn man die Bewegung zwar sonst immer noch als wirbel- und reibungsfrei behandelt, dagegen eine Trennungsfläche annimmt, die sich in der Strömung hinter dem Hindernisse bildet. Der Grund dafür, daß dann ein resultierender Wasserdruck herauskommen muß, ist leicht einzusehen. Wenn das Hindernis, das sich der Strömung entgegenstellt, etwa ein ebenes Brett ist, grenzt das ruhende Wasser auf der Rückseite des Brettes in der Wirbelfläche an die schnell strömende Flüssigkeit an, die sich um das Hindernis herumgebogen hatte. An der Grenzfläche herrscht zu beiden Seiten derselbe Flüssigkeitsdruck; das ruhende Wasser auf der Rückseite des Brettes steht daher unter demselben Drucke wie das schnell strömende im Strahle. Andererseits soll die Bewegung jenseits der Trennungsfläche im Strahle und vor dem Hindernisse überall wirbelfrei sein. Innerhalb dieses Gebietes gilt daher überall die Beziehung, daß die Summe aus kinetischer Energie, potentieller Energie und Flüssigkeitsdruck konstant ist. Auf der Vorderseite des Brettes, in dessen nächster Nachbarschaft, sind die Geschwindigkeiten jedenfalls gering und daher ist der Druck dort viel größer, als in den Grenz-

linien des Strahls oder also auch als auf der Rückseite des Brettes. Der Druckunterschied zwischen Vorderseite und Rückseite sucht das Brett in der Richtung der Strömung mit fortzureißen. — Man sieht hier deutlich, wie wesentlich die Trennungsfläche ist. In dieser springt die Geschwindigkeit von einem endlichen Werte plötzlich auf Null, ohne daß damit eine Druckabnahme verbunden wäre. Nur durch die Wirbelfläche wird es möglich, daß zu beiden Seiten des Brettes zur Geschwindigkeit Null ganz verschiedene Drücke gehören.

Die Ausführung der Rechnung gleicht vollständig der vorhergehenden. Lord Rayleigh hat auf diesem Wege die schon im ersten Bande § 63 der 3. Aufl. erwähnte Formel für den Winddruck beim schiefen Stoße auf eine ebene Fläche abgeleitet. Die theoretischen Erwägungen sind bei diesen Untersuchungen freilich nicht ganz einwandfrei, da sie keine Rechenschaft darüber geben, was schließlich in größerer Entfernung nach dem Passieren des Hindernisses geschieht, oder vielmehr, weil das, was die Formeln hierüber aussagen, im offenbaren Widerspruche mit dem wirklichen Verhalten steht. Ich gehe deshalb auch nicht weiter darauf ein. Immerhin wird aber durch die Berücksichtigung der Trennungsfläche schon der erste und wichtigste Schritt gemacht, um zu einer den Tatsachen besser gerecht werdenden Theorie zu gelangen; mit Rücksicht darauf kann es auch einstweilen zugelassen werden, daß die näheren Annahmen, die sich auf die Trennungsfläche selbst beziehen, freilich noch durchaus nicht zutreffend sind. Jedenfalls hat bereits jener erste Schritt eine Winddruckformel abzuleiten gestattet, die mit der Wirklichkeit schon recht gut übereinzustimmen scheint. — Auch der Wert für den Kontraktionskoeffizienten, den die vorher durchgeführte Rechnung lieferte, stimmt mit den Beobachtungen nicht schlecht überein. Die Helmholtzsche Lehre von den Flüssigkeitsstrahlen ist daher als ein beachtenswerter Fortschritt der Hydrodynamik zu betrachten, wenn sie auch selbst in Hinsicht auf die physikalische Genauigkeit noch viel zu wünschen übrig läßt.

§ 61. Die Sätze von Helmholtz über die Wirbelbewegungen.

Eine der Hauptursachen für die Abweichungen zwischen der Dynamik der reibungsfreien Flüssigkeiten und den in Wirklichkeit stattfindenden Flüssigkeitsbewegungen besteht, wie schon aus den Untersuchungen des vorausgehenden Paragraphen folgt, in dem Auftreten von Wirbeln. Den physikalischen Grund für die Bildung der Wirbel erkennen wir in erster Linie (abgesehen nämlich von der Mischbewegung, soweit diese zugleich auch noch von anderen Ursachen abhängt) in der Flüssigkeitsreibung. Solange wir uns nicht dazu entschließen, das einfache Bild der reibungsfreien Flüssigkeit aufzugeben, vermögen wir daher über das Entstehen der Wirbel keine hinreichende Rechenschaft zu geben. Man kann sich dagegen die Aufgabe stellen, den weiteren Verlauf der Flüssigkeitsbewegung, nachdem einmal auf irgendeine Art Wirbel in ihr entstanden sind, unter der Voraussetzung zu untersuchen, daß die Flüssigkeit weiterhin als reibungsfrei angesehen werden könne. Jedenfalls wird damit ein wichtiger weiterer Schritt zur Erforschung des wahren Verhaltens der Flüssigkeiten getan, ohne daß man dabei sofort genötigt wäre, die für die theoretische Behandlung so wesentliche Vereinfachung zu opfern, die in der Vernachlässigung der Reibungen liegt.

Ich greife hier auf die Eulerschen Gleichungen (367) und (368) und auf die Differentialgleichung (370) für den Wirbelvektor $\mathfrak{w}$ zurück, die ich der Übersicht wegen hier nochmals zusammenstelle:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0 \qquad [(367)]$$

$$\left.\begin{aligned}
\mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2\frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3\frac{\partial v_1}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial}{\partial x}(V+p)\\
\mu\left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2\frac{\partial v_2}{\partial y} + v_3\frac{\partial v_2}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial}{\partial y}(V+p)\\
\mu\left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_3}{\partial x} + v_2\frac{\partial v_3}{\partial y} + v_3\frac{\partial v_3}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial}{\partial z}(V+p)
\end{aligned}\right\} \qquad [(368)]$$

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{i}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) + \mathfrak{j}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) + \mathfrak{k}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right). \qquad [(370)]$$

Im allgemeinen verschwindet der Wirbelvektor $\mathfrak{w}$ jetzt nirgends. In einem gegebenen Augenblicke möge innerhalb der Flüssigkeit eine Linie gezogen werden, die überall der Richtung von $\mathfrak{w}$ folgt. Eine solche Linie soll als eine Wirbellinie bezeichnet werden. Denkt man sich ferner an irgendeiner Stelle einer Wirbellinie ein Flächenelement dF senkrecht zur Wirbellinie gelegt und durch alle Punkte des Umfanges von dF Wirbellinien gezogen, so schließen diese einen Raum ein, von dem dF ein Querschnitt ist und den man als einen Wirbelfaden bezeichnet.

Um ein anschauliches Bild von der augenblicklichen Verteilung der Wirbel zu erhalten, kann man sich eine zweite Flüssigkeit vorstellen, die einen gleichgestalteten Raum einnimmt wie die erste und deren Geschwindigkeit in gleichgelegenen Punkten mit dem Wirbelvektor $\mathfrak{w}$ in der ersten Flüssigkeit der Richtung nach übereinstimmt und der Größe nach damit proportional ist. Dies ist nämlich möglich, ohne die Kontinuitätsbedingung in der zweiten Flüssigkeit zu verletzen, denn aus Gl. (370) folgt für die Komponenten von $\mathfrak{w}$

$$w_1 = \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \quad w_2 = \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \quad w_3 = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y},$$

und wenn man diese Werte in die Kontinuitätsgleichung einsetzt, erhält man in der Tat

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial w_3}{\partial z} = 0. \tag{393}$$

Die Wirbelfäden in der ersten Flüssigkeit entsprechen den Stromfäden in der zweiten und sie sind diesen kongruent. Daraus folgt auch, daß ein Wirbelfaden innerhalb der Flüssigkeit nicht aufhören kann; er muß entweder an den Grenzflächen der Flüssigkeit enden oder er muß in sich zurückkehren, so daß die Leitlinie eine geschlossene Kurve bildet. Im letzten Falle wird der Wirbelfaden auch als ein Wirbelring bezeichnet. Das Produkt aus einem Querschnitte des Wirbelfadens und der Größe des Wirbelvektors $\mathfrak{w}$ an dieser Stelle muß längs des ganzen Wirbelfadens einen konstanten Wert behalten, denn bei der zweiten

Flüssigkeit, die zur Erläuterung für die Verteilung der Wirbel diente, entspricht dem Produkte wdF die durch den Querschnitt dF gehende Flüssigkeitsmenge und diese muß der Kontinuitätsbedingung wegen für alle Querschnitte des Stromfadens gleich groß sein. Das Produkt wdF wird auch als die Stärke des Wirbelfadens bezeichnet und wir können daher auch sagen, daß ein Wirbelfaden in allen Teilen seiner Länge dieselbe Stärke hat.

Man betrachte ferner zwei materielle Punkte der Flüssigkeit, die zur Zeit t unendlich benachbart auf der gleichen Wirbellinie liegen mögen. Der Abstand zwischen beiden Punkten, also das zwischen ihnen liegende Element der Wirbellinie, möge die Projektionen $\xi\eta\zeta$ auf die Koordinatenachsen haben. Man fragt nach der Richtung und Größe der Verbindungsstrecke beider materieller Punkte nach Ablauf eines Zeitelementes dt. Der Anfangspunkt der Strecke verschiebt sich während dt in den Richtungen der Koordidatenachsen um $v_1 dt,\ v_2 dt,\ v_3 dt$; der Endpunkt dagegen in der Richtung der X-Achse um

$$\left\{v_1 + \xi\frac{\partial v_1}{\partial x} + \eta\frac{\partial v_1}{\partial y} + \zeta\frac{\partial v_1}{\partial z}\right\}dt$$

und um entsprechende Strecken in den Richtungen der beiden anderen Koordinatenachsen. Der Unterschied zwischen den Verschiebungen beider Endpunkte der Projektion ξ der Verbindungsstrecke gibt die Änderung an, die ξ während dt erfährt. Für die totalen Differentialquotienten von $\xi\eta\zeta$ nach der Zeit erhält man demnach

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= \xi\frac{\partial v_1}{\partial x} + \eta\frac{\partial v_1}{\partial y} + \zeta\frac{\partial v_1}{\partial z}\\ \frac{d\eta}{dt} &= \xi\frac{\partial v_2}{\partial x} + \eta\frac{\partial v_2}{\partial y} + \zeta\frac{\partial v_2}{\partial z}\\ \frac{d\zeta}{dt} &= \xi\frac{\partial v_3}{\partial x} + \eta\frac{\partial v_3}{\partial y} + \zeta\frac{\partial v_3}{\partial z}\end{aligned}\right\}. \qquad (394)$$

Diese Gleichungen gelten für die Abstandsänderungen von irgendzwei benachbarten Punkten. Um noch auszudrücken, daß sie auf zwei zur gleichen Wirbellinie gehörige Punkte

angewendet werden sollen, setze man zu Anfang des Zeitelements dt

$$\xi = \varepsilon w_1, \quad \eta = \varepsilon w_2, \quad \zeta = \varepsilon w_3, \tag{395}$$

wo nun ε irgendeine unendlich kleine Größe ist. Nach Division mit ε gehen dann die vorigen Gleichungen über in

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\xi}{dt} &= w_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + w_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + w_3 \frac{\partial v_1}{\partial z} \\
\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\eta}{dt} &= w_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + w_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + w_3 \frac{\partial v_2}{\partial z} \\
\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\zeta}{dt} &= w_1 \frac{\partial v_3}{\partial x} + w_2 \frac{\partial v_3}{\partial y} + w_3 \frac{\partial v_3}{\partial z}
\end{aligned}\right\}. \tag{396}$$

Wir wollen jetzt ferner berechnen, um wieviel sich die Wirbelkomponenten $w_1 w_2 w_3$, die zum gleichen Flüssigkeitsteilchen gehören, während der Zeit dt ändern. Man muß sich dabei vor einigen naheliegenden Fehlern hüten: zunächst kann nämlich $\frac{dw_1}{dt}$ nicht etwa aus Gl. (395) in $\frac{d\xi}{dt}$ ausgedrückt werden, denn diese Gleichungen gelten nach Voraussetzung nur zu Anfang der Zeit dt und es bleibt vorläufig ganz zweifelhaft, ob sie auch späterhin noch bestehen bleiben. Außerdem darf $\frac{dw_1}{dt}$ nicht mit dem sich auf den konstanten Ort beziehenden $\frac{\partial w_1}{\partial t}$ verwechselt werden; zwischen beiden besteht vielmehr der Zusammenhang

$$\frac{dw_1}{dt} = \frac{\partial w_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial w_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial w_1}{\partial z}.$$

Zur Berechnung von $\frac{dw_1}{dt}$ kann man natürlich nicht durch bloß geometrische Betrachtungen gelangen, denn die Flüssigkeitsbewegung hängt von dem dynamischen Grundgesetze ab und wir müssen daher von den Eulerschen Gleichungen (368) ausgehen, durch die dieses zum Ausdrucke gebracht wird. Die dritte von diesen sei nach y, die zweite nach z partiell differentiiert und hierauf diese von jener subtrahiert. Dadurch heben sich die rechten Seiten voneinander fort und nach Wegheben des konstanten Faktors μ bleibt

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial z}\right)$$
$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) = 0.$$

Beim Auflösen der Klammern entstehen je sieben Glieder und die einander entsprechenden aus beiden Klammern vereinigen wir in passender Weise miteinander. So wird z. B.

$$\frac{\partial^2 v_3}{\partial y \partial t} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial z \partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) = \frac{\partial w_1}{\partial t}$$

$$v_1 \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial y} - v_1 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial z} = v_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) = v_1 \frac{\partial w_1}{\partial x}$$

usf. Hierdurch geht die vorige Gleichung zunächst über in

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial w_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\frac{\partial v_3}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial y}\frac{\partial v_3}{\partial z}$$
$$- \frac{\partial v_1}{\partial z}\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\frac{\partial v_2}{\partial y} - \frac{\partial v_3}{\partial z}\frac{\partial v_2}{\partial z} = 0.$$

Die ersten vier Glieder bilden aber, wie wir schon sahen, den totalen Differentialquotienten von w_1 nach der Zeit. Die sechs übrigen bringen wir auf die rechte Seite und ordnen sie passend; nach einigen weiteren Umformungen, namentlich auf Grund der Kontinuitätsgleichung (367), erhalten wir hierauf der Reihe nach

$$\frac{dw_1}{dt} = \frac{\partial v_1}{\partial z}\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\left(\frac{\partial v_2}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial y}\right) + \frac{\partial v_3}{\partial z}\left(\frac{\partial v_2}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial y}\right)$$
$$= \frac{\partial v_1}{\partial z}\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\frac{\partial v_3}{\partial x} - w_1\left(\frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right)$$
$$= \frac{\partial v_1}{\partial z}\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\frac{\partial v_3}{\partial x} + w_1 \frac{\partial v_1}{\partial x}$$
$$= \frac{\partial v_1}{\partial z}\frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial z}\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z}\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\frac{\partial v_3}{\partial x} + w_1 \frac{\partial v_1}{\partial x}$$
$$= \frac{\partial v_1}{\partial y}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial v_1}{\partial z}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) + w_1 \frac{\partial v_1}{\partial x}$$
$$= w_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + w_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + w_3 \frac{\partial v_1}{\partial z}.$$

Für die Differentialquotienten der beiden anderen Komponenten von $\mathfrak{w}$ gelten entsprechende Gleichungen, die sich aus der letzten durch zyklische Vertauschung ableiten lassen. Im ganzen hat man daher

$$\left.\begin{aligned}\frac{dw_1}{dt} &= w_1\frac{\partial v_1}{\partial x} + w_2\frac{\partial v_1}{\partial y} + w_3\frac{\partial v_1}{\partial z}\\ \frac{dw_2}{dt} &= w_1\frac{\partial v_2}{\partial x} + w_2\frac{\partial v_2}{\partial y} + w_3\frac{\partial v_2}{\partial z}\\ \frac{dw_3}{dt} &= w_1\frac{\partial v_3}{\partial x} + w_2\frac{\partial v_3}{\partial y} + w_3\frac{\partial v_3}{\partial z}\end{aligned}\right\}. \tag{397}$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen stimmen aber genau mit jenen der Gleichungen (396) überein. Hiernach folgt auch

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon\frac{dw_1}{dt}, \quad \frac{d\eta}{dt} = \varepsilon\frac{dw_2}{dt}, \quad \frac{d\zeta}{dt} = \varepsilon\frac{dw_3}{dt} \tag{398}$$

und der Vergleich mit den Gleichungen (395) lehrt, daß ε als eine der Zeit nach konstante Größe anzusehen ist und daß dann die zuerst nur für den Beginn des Zeitelements dt aufangestellten Gleichungen (395) auch weiterhin gültig bleiben. Nach Ablauf der Zeit dt ist nämlich, wie aus der Verbindung der Gleichungen (395) mit den Gleichungen (398) hervorgeht, auch noch

$$\xi + d\xi = \varepsilon(w_1 + dw_1), \quad \eta + d\eta = \varepsilon(w_2 + dw_2),$$
$$\zeta + d\zeta = \varepsilon(w_3 + dw_3).$$

Hieraus folgt, daß zwei benachbarte materielle Punkte der Flüssigkeit, die anfänglich auf einer Wirbellinie lagen, auch noch in jedem folgenden Augenblicke auf einer Wirbellinie enthalten sind. Jedem Wirbelfaden zu Anfang der Zeit entspricht daher auch nachher noch ein Wirbelfaden, der dieselben Teilchen der Flüssigkeit umfaßt. Ferner ist die Entfernung der beiden Punkte in jedem folgenden Augenblicke der Größe des Wirbelvektors proportional. Betrachten wir nun ein Element des Wirbelfadens, das zu Anfang den Querschnitt dF hatte und dessen Länge gleich dem Abstande der beiden materiellen Punkte war. Alle Teilchen der Flüssigkeit, die zu Anfang in diesem Wirbelfadenelemente enthalten

waren, bilden auch in jedem folgenden Augenblicke ein Wirbelfadenelement. Wegen der Unzusammendrückbarkeit der Flüssigkeit müssen beide Elemente gleiches Volumen haben. Wenn sich daher wegen der Veränderung der Größe des Wirbelvektors die Länge des Elements vergrößert oder verkleinert hat, so muß sich der Querschnitt entsprechend verkleinert oder vergrößert haben, so daß das Produkt $dF \cdot w$ konstant bleibt. D e r W i r b e l f a d e n b e s t e h t d a h e r n i c h t n u r s t e t s a u s d e n s e l b e n T e i l c h e n, s o n d e r n e r h a t a u c h i n j e d e m f o l g e n d e n A u g e n b l i c k e d i e s e l b e „S t ä r k e“ w i e z u A n f a n g. Hiernach kann man jedem einmal in einer reibungsfreien Flüssigkeit bestehenden Wirbelfaden eine selbständige Existenz zuschreiben; er bewegt sich mit unveränderter Stärke in der Flüssigkeit samt den Teilchen der Flüssigkeit, an die er gebunden ist, weiter und kann nur entweder durch Reibungen in der Flüssigkeit oder durch äußere Kräfte, die sich nicht von einem Potentiale ableiten lassen, vernichtet (oder neu geschaffen) werden. Der letzte Fall ist übrigens bei den gewöhnlich vorkommenden Flüssigkeitsbewegungen ausgeschlossen, da als äußere Kraft bei diesen nur die Schwere in Betracht kommt, die zu einem Potentiale gehört.

Die Schlüsse, zu denen wir hier gelangten und die zuerst von Helmholtz in einer seiner berühmtesten Abhandlungen gezogen wurden, sind freilich immer noch an die Voraussetzung gebunden, daß die Flüssigkeitsreibung und die Mischbewegung vernachlässigt werden können. Eine genaue Übereinstimmung mit der Wirklichkeit ist daher auch von ihnen keineswegs zu erwarten. Immerhin stimmen sie aber in vielen Fällen schon sehr näherungsweise mit den Beobachtungen überein. Eine der bekanntesten Erscheinungen, die hierher gehören, bieten uns die Wirbelringe dar, die ein Raucher hervorzubringen vermag. Auf verhältnismäßig große Strecken hin halten diese Rauchringe gut zusammen und daß der Wirbelring dabei stets aus denselben Teilchen zusammengesetzt bleibt, wird in diesem Falle durch die Farbe des Rauchs gekennzeichnet. Sonst spielt der Rauch natürlich bei dem ganzen Vorgange keine Rolle; auch

ohne Rauch kann man solche Wirbelringe in die Luft ausstoßen, sie entziehen sich dann nur der unmittelbaren Wahrnehmung.

Eine große Rolle spielen die Wirbel bei den großen Luftbewegungen in der Atmosphäre der Erde. In der Gegend der barometrischen Minima und Maxima bestehen Wirbel mit ungefähr senkrechter Achse, die auf der Erdoberfläche enden und nach oben hin in unbekannter Weise weiterlaufen, die sogenannten Zyklonen und Antizyklonen. Die verhältnismäßige Beständigkeit der Wirbel zeigt sich auch bei ihnen, indem sie sich oft tagelang erhalten, während sie über die Erde hinwegziehen. Sie schlagen dabei mit Vorliebe gewisse Bahnen ein, die sogenannten „Zugstraßen". Übrigens ist bei der Anwendung der Wirbellehre auf diese meteorologischen Vorgänge nicht außer acht zu lassen, daß sich unsere Mechanik zunächst immer nur auf den absoluten Raum bezieht, während hier die Drehung der Erde gegen den festen Raum eine wesentliche Rolle spielt. Man muß daher, um die Bewegung der Luftströmungen relativ zur Erde verfolgen zu können, die Ergänzungskräfte der Relativbewegung an den Luftteilchen als fernere äußere Kräfte anbringen. Dabei findet man aber, daß die „zweite" (Coriolissche) Ergänzungskraft nicht zu einem Potentiale gehört. Infolgedessen ist hier, auch abgesehen von Reibungen, ein Grund zum Entstehen (oder Verschwinden) von Wirbeln gegeben, der sehr wesentlich mitspricht.

Ein kreisförmiger Wirbelring (ähnlich einem der vorher erwähnten Rauchringe) vermöchte sich in einer reibungsfreien Flüssigkeit, solange nur solche Kräfte auftreten, die zu einem Potentiale gehören, in unveränderter Gestalt und mit konstanter Geschwindigkeit in derselben Richtung beliebig lange fortzubewegen. Relativ zu einem Koordinatensysteme, das sich mit ihm bewegte, wäre die Bewegung stationär. Den Geschwindigkeiten der Flüssigkeitsteilchen, die hierbei in Bewegung begriffen sind, entspricht eine gewisse lebendige Kraft. Auch diese Energie bewegt sich demnach mit dem Wirbelringe voran

und es gehört zu den bemerkenswertesten Eigenschaften der Wirbel, daß sie die kinetische Energie zusammenhalten und mit sich weiterführen können, ohne daß eine andere Zerstreuung derselben eintritt, als sie durch die Flüssigkeitsreibungen bedingt wird, die zu einem allmählichen Ausbreiten und zugleich zu einem Erlöschen der Wirbel führt.

§ 62. Wellenbewegungen.

Zu den bekanntesten Flüssigkeitsbewegungen gehören die Wellen, die sich nach Gleichgewichtsstörungen auf der Oberfläche weit ausgedehnter und tiefer Wasserbecken ausbilden. Ein kleines Stückchen Holz, das auf der Wasseroberfläche schwimmt und deren Bewegungen mitmacht, lehrt uns, daß die Wasserteilchen keineswegs in dauernd fortschreitender Bewegung begriffen sind, wie dies nach flüchtiger Beobachtung vermutet werden könnte, sondern daß sie — wenigstens bei regelmäßiger Ausbildung der Wellen — in sich zurücklaufende Kurven beschreiben. Im allgemeinen bleiben demnach die Wasserteilchen an ihrem Orte; sie heben sich, wenn ein Wellenkamm naht, um sich gleich darauf wieder zu senken und beim Vorbeischreiten eines Wellentals ihren tiefsten Stand zu erreichen. Nur die Erscheinung oder „Phase", d. h. die geometrisch wohldefinierte Oberflächenform ist im Fortschreiten begriffen, aber nicht die Materie, aus der sie gebildet ist.

Aus bloßen Hebungen und Senkungen kann indessen die Bewegung des Wassers in den Wellen nicht bestehen, da eine solche Bewegung im Widerspruche mit der Kontinuitätsbedingung wäre. Man denke sich nämlich durch eine lotrechte Mantelfläche einen zylindrischen Wasserkörper von beliebiger Grundfläche, der bis zum Boden hinreicht, abgegrenzt. Wenn keine Horizontalkomponenten der Geschwindigkeit vorkämen, würde aus diesem Raume Wasser weder austreten noch eintreten und da das in ihm vorhandene Wasser stets den gleichen Raum einnehmen muß, folgt, daß bei festem Boden auch der Wasserspiegel — im Mittel wenigstens — stets die gleiche Höhe einnehmen müßte. Da dies nun für jeden solchen Wasser-

zylinder gilt, kann ohne Horizontalkomponenten der Geschwindigkeit überhaupt keine Wellenbewegung bestehen.

Jedes Wasserteilchen muß hiernach eine Bahn beschreiben, die bei regelmäßiger Ausbildung der Wellen als eine geschlossene ebene Kurve angenommen werden kann, deren Ebene senkrecht zur Längsrichtung der Wellen, d. h. senkrecht zu den horizontalen Erzeugenden der Zylinderfläche steht, die das Wasser nach oben hin begrenzt. Die Wellenbewegung kann daher als eine ebene Bewegung behandelt werden. Als wirbelfrei dürfen wir sie aber nicht ansehen, wenn wir an dem aus der Beobachtung gezogenen Schlusse festhalten wollen, daß die einzelnen Wasserteilchen geschlossene Bahnen beschreiben. Freilich hat man auch eine recht umfangreiche Theorie der Wasserwellen ausgebildet, bei der die Bewegung von einem Geschwindigkeitspotentiale abgeleitet, also als wirbelfrei betrachtet wird. Außer der einfacheren Behandlung, die durch diese Annahme ermöglicht wird, führt man häufig zu ihren Gunsten an, daß nach dem für die reibungsfreie Flüssigkeit gültigen Satze von Lagrange die Bewegung notwendig wirbelfrei sein müsse, da sie ursprünglich aus dem Ruhestande hervorgegangen ist und dabei an den im Innern gelegenen Flüssigkeitsteilchen andere äußere Kräfte als die Schwere nicht mitgewirkt haben. Das ist zwar richtig, aber ebenso steht fest, daß das Bild der reibungsfreien Flüssigkeit ohne Mischbewegungen in vielen Fällen der Anwenrung, zu denen wohl auch die hier zu betrachtenden Wasserwellen gehören, für sich allein ganz unzulänglich ist. Nur soweit die daraus gezogenen Schlüsse durch die Beobachtung genügend bestätigt werden, darf man ihnen einen Wert beimessen; wo aber die Beobachtung zu einer damit im Widerspruche stehenden Annahme nötigt, ist dieser der Vorzug zu geben.

Den Techniker interessieren vor allem die großen wohlausgebildeten Wellenzüge, die infolge eines heftigen Sturmes auf der Oberfläche des Meeres oder eines größeren Sees aufteten. Diesen hat auch der berühmte Wasserbaumeister Hagen seine Aufmerksamkeit zugewendet. Er fand durch Beobachtung,

daß die Wasserteilchen bei ihnen stets ziemlich genau kreisförmige Bahnen beschrieben. Hiervon ließ er sich bei der theoretischen Untersuchung, die er daran knüpfte, leiten und die sich daraus ergebende „Hagensche Theorie“ der Wasserwellen nimmt in den Kreisen der Wasserbautechniker bis auf den heutigen Tag den ersten Rang ein. Übrigens war Gerstner (1804) im wesentlichen schon auf die gleichen Betrachtungen gekommen, wenn er sie auch nicht so weit durchgeführt hatte. Ich begnüge mich hier mit der Wiedergabe der Gerstner-Hagenschen Theorie, ohne auf die zahlreichen anderen Arbeiten über Wellenbewegungen von ähnlicher Art einzugehen.

Ehe mit der Rechnung begonnen wird, möge die Grundlage, auf der sie beruhen soll, noch etwas näher besprochen werden. Es soll sich also um eine ebene Bewegung handeln,

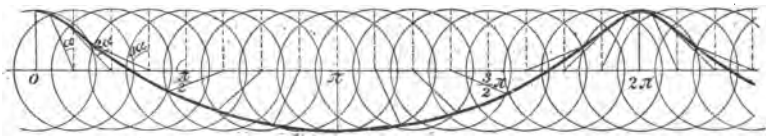


Abb. 21.

die unter dem Einflusse der Schwere erfolgt, während auf der freien Oberfläche ein konstanter Druck — nämlich der Luftdruck — lastet. Das Wasser soll tief im Vergleiche zu den Abmessungen der Wellen sein und auch nach den Seiten hin soll es als unbegrenzt angenommen werden, um die Störungen, die von den Ufern her erfolgen, hier aus dem Spiele lassen zu können. Vermutet wird ferner auf Grund von Beobachtungen, daß die Wasserteilchen der Oberfläche kreisförmige Bahnen durchlaufen. Abb. 21 gibt näher an, wie hierbei die Wellenoberfläche zustande kommt. Ob dies genau zutreffen kann, läßt sich auf Grund der Beobachtung allein nicht entscheiden; wir werden uns vielmehr davon überzeugen müssen, ob eine solche Bewegung geometrisch und dynamisch möglich ist.

Ferner müssen wir nach den Bahnen fragen, die von den nicht zur Oberfläche gehörenden Teilen eingeschlagen werden. Wir denken uns in der Bewegungsebene eine horizontale Linie

gezogen, die bei ruhendem Wasser eine gewisse Tiefe unter dem Wasserspiegel hat. Wenn der vorher geradlinige Wasserspiegel durch die Bewegung in eine Wellenlinie übergegangen ist, müssen auch die Wasserteilchen, die im Gleichgewichtszustande auf jener Geraden lagen, eine Wellenlinie bilden. Die Wellenhöhe dieser Linie ist nur von der Tiefe abhängig, die sie unter dem Wasserspiegel einnimmt. Ihren größten Wert nimmt sie in der Oberfläche selbst an und von da an muß sie nach der Tiefe zu fortwährend abnehmen, so daß in größerer Tiefe überhaupt kaum noch etwas von der Bewegung wahrzunehmen ist. Dies ist einerseits nötig, damit die Grenzbedingung an der Bodenfläche erfüllt werden kann, und andererseits weiß man auch schon aus der Erfahrung, daß sich die Wellenbewegungen im wesentlichen nur in der Nähe der Oberfläche abspielen und schon in einiger Tiefe unter der Oberfläche fast unmerklich werden. Die Wasserteilchen unter der Oberfläche werden sich daher im allgemeinen ähnlich wie die an der Oberfläche selbst bewegen müssen, nur mit geringeren Ausschlägen. Wir werden daher zu der Vermutung geführt, daß auch diese Wasserteilchen kreisförmige Bahnen beschreiben, daß aber der Halbmesser der Kreise nach unten hin abnimmt. Wenn die Teilchen an der Oberfläche zum Gipfel eines Wellenberges gehören, müssen der Kontinuitätsbedingungen wegen auch die Teilchen der tieferen Wasserschichten, die gerade unter jenen liegen, jedenfalls eine der höchsten benachbarte, wahrscheinlich aber ebenfalls ihre höchste Lage einnehmen. Wir vermuten daher, daß die Bewegungen in verschiedenen Tiefen an entsprechenden Stellen in gleicher Phase stehen, d. h. daß die tiefer gelegenen Teilchen ihre Kreisbahnen mit derselben Winkelgeschwindigkeit beschreiben, wie die an der Oberfläche, und daß der vom Mittelpunkte der Kreisbahn aus nach dem bewegten Punkte gezogene Radius in jedem gegebenen Augenblicke für alle übereinanderliegenden Teilchen die gleiche Richtung hat.

Alle diese Schlüsse sind Induktionsschlüsse, die als ein Muster dafür gelten können, wie man mit der theoretischen

Deutung einer aus der Beobachtung bekannten Erscheinung beginnen soll. Inwieweit man mit diesen Vermutungen das Rechte getroffen hat, kann erst die nachfolgende deduktive Untersuchung lehren.

Für die Durchführung dieser Untersuchung empfiehlt sich im vorliegenden Falle nicht das Verfahren von Euler, sondern das von Lagrange. Denn bei diesem verfolgen wir das einzelne Wasserteilchen; wir können daher nach ihm die Untersuchung in derselben Weise fortsetzen, wie sie vorher begonnen war. Bei der Lagrangeschen Methode fällt die Kontinuitätsgleichung freilich erheblich verwickelter aus, als nach der Eulerschen; sie spricht aus, daß eine gewisse Determinante konstant sein muß. Im Falle der ebenen Bewegung und namentlich in dem hier vorliegenden Falle vereinfacht sich aber die Gleichung so erheblich, daß sie keine Schwierigkeiten mehr machen kann.

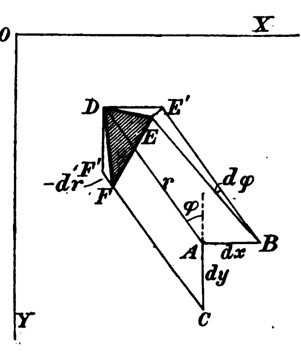


Abb. 22.

Wir ziehen in der Bewegungsebene eine horizontale X-Achse und eine Y-Achse lotrecht nach abwärts. Dann nehmen wir drei benachbarte Punkte an, von denen der zweite mit dem ersten in gleicher Höhe, der dritte mit dem ersten auf der gleichen Lotrechten liegt. Diese drei Punkte ABC in Abb. 22 betrachten wir als die Mittelpunkte der kreisförmigen Bahnen von drei Wasserteilchen, deren Bewegung wir näher verfolgen wollen. In irgendeinem Augenblicke sei D die Lage jenes Teilchens, dessen Mittelpunkt in A liegt. Der Halbmesser AD der Kreisbahn sei mit r bezeichnet; der Winkel, den AD mit der Lotrechten bildet und den wir als den Phasenwinkel bezeichnen können, sei zur gegebenen Zeit gleich φ. Wir wollen annehmen, daß die Teilchen ihre Bahnen in solchem Sinne durchlaufen, daß der Winkel φ mit der Zeit abnimmt; die Welle pflanzt sich dann im Sinne der positiven X-Achse fort

(vorausgesetzt, daß, wie in der Figur schon angenommen, $\frac{d\varphi}{dx}$ positiv ist).

Zum Mittelpunkte B gehört das Wasserteilchen E. Wenn die Phase von x unabhängig wäre, hätte E die Lage E', so nämlich, daß BE' gleich und parallel mit AD wäre. Nun ist zwar BE immer noch gleich AD, weil der Halbmesser der Bahnkreise für alle in derselben Schicht liegenden Teilchen dieselbe Größe hat. Dagegen hat sich der Phasenwinkel φ um $d\varphi$ geändert. Da φ nur von x abhängig, von y aber unabhängig ist, können wir

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dx}\, dx$$

setzen, falls die Strecke AB mit dx bezeichnet wird. — Zum Mittelpunkte C endlich gehört der Flüssigkeitspunkt F. Um ihn zu finden, trage man zunächst CF' gleich und parallel mit AD auf und vermindere hierauf CF' um $F'F$ oder um $-dr$. Der Halbmesser r ist nur von y abhängig und von x unabhängig und man hat daher, wenn die Strecke AC mit dy bezeichnet wird,

$$dr = \frac{dr}{dy}\, dy.$$

Wir müssen erwarten, daß r mit wachsendem y abnimmt. Hier setzen wir aber zunächst $\frac{dr}{dy}$ als positiv voraus; die Rechnung muß uns dann von selbst lehren, daß es in Wirklichkeit negativ ist.

Man betrachte den Inhalt des in Abb. 22 durch Schraffierung hervorgehobenen Dreiecks DEF. Wenn die Zeit fortschreitet, verändert sich die Gestalt und die Lage dieses Dreiecks; für jeden folgenden Augenblick läßt es sich aus den festliegenden Mittelpunkten ABC ohne weiteres von neuem konstruieren. Das Dreieck wird stets von denselben Flüssigkeitsteilchen eingenommen; die Kontinuitätsbedingung verlangt daher, daß die Fläche des Dreiecks während der Bewegung konstant bleibt.

Wir müssen also nun einen Ausdruck für den Flächeninhalt des Dreiecks aufstellen. Um dabei nicht auf Lehren

der analytischen Geometrie verweisen zu müssen, von denen ich nicht wissen kann, ob sie dem Leser gerade noch im Gedächtnis geblieben sind, zeichne ich in Abb. 23 ein Dreieck aus den Punkten 1, 2, 3, deren Koordinaten eingeschrieben sind. Der Flächeninhalt dieses Dreiecks wird durch Zusammensetzen aus den einzelnen Bestandteilen gefunden zu

$$\triangle = \frac{1}{2} a_3 b_3 + (a_2 - a_3) \frac{b_2 + b_3}{2} - \frac{1}{2} a_2 b_2 = \frac{1}{2}(a_2 b_3 - a_3 b_2),$$

wofür man auch in Determinantenform

$$\triangle = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

schreiben kann.

Abb. 23.

Um diese Formel für die Berechnung des Dreiecks DEF in Abb. 22 verwenden zu können, brauchen wir nur zu setzen

$$\begin{aligned} a_2 &= dx - r\,d\varphi \cos\varphi, \\ b_2 &= r\,d\varphi \sin\varphi, \\ a_3 &= -dr \sin\varphi, \\ b_3 &= dy - dr \cos\varphi. \end{aligned}$$

Diese Werte ergeben sich nämlich aus Abb. 22 ohne weiteres, wenn man nur beachtet, daß $EE' = r d\varphi$ und $F'F = -dr$ ist. Wäre nämlich dr positiv, so läge F jenseits F', während es in der Figur zwischen F' und C angenommen ist. Für den Dreiecksinhalt $\triangle$ bekommt man demnach

$$\begin{aligned} \triangle &= \tfrac{1}{2}\{(dx - r d\varphi \cos\varphi)(dy - dr\cos\varphi) + dr \sin\varphi \cdot r d\varphi \sin\varphi\} \\ &= \tfrac{1}{2}\{dx dy - \cos\varphi\,(dx dr + r dy d\varphi) + r dr d\varphi\} \end{aligned}$$

oder, wenn man für dr und $d\varphi$ die vorher festgestellten Ausdrücke einsetzt,

$$\triangle = \frac{1}{2} dx dy \left\{1 - \cos\varphi\left(\frac{dr}{dy} + r\frac{d\varphi}{dx}\right) + r\frac{dr}{dy}\frac{d\varphi}{dx}\right\}. \qquad (399)$$

Dieser Ausdruck muß der Zeit nach konstant sein. Der Halbmesser r und die Differentialquotienten von r und φ sind aber

unabhängig von der Zeit und die einzige Größe, die in dem gefundenen Ausdrucke mit der Zeit veränderlich ist, ist $\cos\varphi$. Um die Kontinuitätsbedingung zu erfüllen, müssen wir daher den mit $\cos\varphi$ multiplizierten Klammerwert gleich Null setzen. Wir erhalten damit

$$\frac{dr}{dy} = -r\frac{d\varphi}{dx}. \tag{400}$$

Da r unabhängig von x ist, kann auch $\frac{d\varphi}{dx}$ nicht von x abhängen. Wir können daher einen einfachen Ausdruck für diesen Differentialquotienten aufstellen. Die Länge der Welle, d. h. die Entfernung zwischen zwei Wellenkämmen, sei mit λ bezeichnet; dann ist der Phasenunterschied, der zu dem Abstande λ gehört, gleich 2π. Da nun der Phasenunterschied $d\varphi$, wie wir sahen, überall proportional zu dem horizontalen Abstande dx ist, folgt

$$d\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}dx \tag{401}$$

und die vorige Gleichung geht hiermit über in

$$\frac{dr}{dy} = -\frac{2\pi}{\lambda}r.$$

Aus dieser Differentialgleichung kann sofort r als Funktion von y berechnet werden. Durch Trennung der Variabeln erhält man

$$\frac{dr}{r} = -\frac{2\pi}{\lambda}dy$$

und hieraus durch Integration

$$\lg r = C - \frac{2\pi}{\lambda}y. \tag{402}$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten C dient die Bemerkung, daß für die Wasseroberfläche r gleich der Hälfte der Wellenhöhe h ist, wenn man darunter den Höhenunterschied zwischen dem Wellenkamme und dem tiefsten Punkte eines Wellentals versteht. Wir wollen ferner annehmen, daß die X-Achse in jener Höhe gezogen sei, auf der die Mittelpunkte der von den Punkten der Wellenoberfläche beschriebenen Kreisbahnen liegen. Dabei ist übrigens zu beachten, daß diese Linie nicht etwa mit dem Wasserspiegel des ruhenden

Wassers zusammenfällt. Auf Grund dieser Festsetzung findet man für $y = 0$ aus Gl. (402)

$$C = \lg \frac{h}{2},$$

und wenn man dies einsetzt, geht die Gleichung über in

$$\lg \frac{h}{2r} = \frac{2\pi}{\lambda} y \quad \text{oder} \quad r = \frac{h}{2} e^{-\frac{2\pi}{\lambda} y}. \tag{403}$$

Der Halbmesser r nimmt also nach einem Exponentialgesetze mit der Tiefe ab. Da

$$e^{-2\pi} = 0{,}00187$$

ist, macht r in einer Tiefe, die gleich der Wellenlänge λ ist, schon nicht mehr ganz zwei Tausendstel des Wertes an der Oberfläche aus und in einer doppelt so großen Tiefe zählt r nur noch nach Millionteln des Wertes an der Oberfläche. Wir finden damit bestätigt, daß sich die Wellenbewegung im wesentlichen nur in den oberflächlichen Schichten des Wassers abspielt, deren Dicke etwa von der Größenordnung der Wellenlänge ist. Unsere Lösung des Problems ist daher jedenfalls auch nur so lange brauchbar, als die Wassertiefe mindestens auch von dieser Größenordnung ist.

Da die Punkte ABC in Abb. 22 ganz willkürlich gewählt waren, ist bei Erfüllung der Gl. (400) oder der daraus abgeleiteten Integralgleichung (403) der Kontinuitätsbedingung (bei genügender Wassertiefe) überall genügt. Die auf induktivem Wege gefundene Bewegungsform stellt daher jedenfalls eine geometrisch mögliche Wasserbewegung dar. Es bleibt aber noch zu untersuchen, ob sie unter den gegebenen Bedingungen für die äußeren Kräfte auch dynamisch möglich ist.

Zu diesem Zwecke machen wir von dem d'Alembertschen Prinzip Gebrauch. Wenn wir zu den äußeren Kräften noch die Trägheitskräfte an den bewegten Wasserteilchen fügen, muß sich die Wassermasse in der augenblicklichen Gestalt, die sie besitzt, im Gleichgewichte halten, falls wir sie im ruhenden Zustande und in dieser Gestalt und Lage sich selbst überlassen.

Die Trägheitskräfte reduzieren sich hier, da die Wasserteilchen alle kreisförmige Bahnen mit konstanter Geschwindigkeit beschreiben, auf Zentrifugalkräfte. Wir haben daher nur noch ein einfaches hydrostatisches Problem zu untersuchen.

Die Bedingung für das Gleichgewicht einer Flüssigkeit unter dem Einflusse gegebener äußerer Kräfte kommt aber darauf hinaus, daß die Flüssigkeitsoberfläche eine Niveaufläche bildet, d. h. daß die resultierende äußere Kraft senkrecht zur Oberfläche steht. Der Druck an irgend einer Stelle im Innern regelt sich danach von selbst und kann nach den gewöhnlichen hydrostatischen Gesetzen leicht berechnet werden.

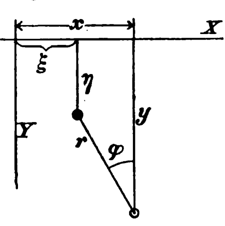


Abb. 24.

Die Koordinaten irgend eines Flüssigkeitsteilchens zur Zeit t seien mit $\xi\eta$, die des Mittelpunktes der von ihm beschriebenen Kreisbahn, wie vorher, mit xy bezeichnet (vgl. Abb. 24). Dann ist

$$\xi = x - r\sin\varphi, \quad \eta = y - r\cos\varphi.$$

Setzt man speziell $y = 0$ und schreibt man für das zugehörige r, d. h. für $\frac{h}{2}$ jetzt der Kürze wegen r_0, so wird dies

$$\xi = x - r_0\sin\varphi, \quad \eta = -r_0\cos\varphi, \tag{404}$$

und wenn man aus diesen Gleichungen φ eliminiert, nachdem man zuvor x mit Hilfe von Gl. (401) in φ ausgedrückt hat, erhält man daraus die Gleichung der Wellenoberfläche zur Zeit t. Anstatt diese Elimination auszuführen, können wir aber auch den Differentialquotienten $\frac{d\eta}{d\xi}$, auf den es allein ankommt, unmittelbar aus den Gleichungen (404) in Verbindung mit Gl. (401) ermitteln. Man hat nämlich

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{d\eta}{dx} : \frac{d\xi}{dx},$$

wobei nach den genannten Gleichungen

$$\frac{d\eta}{dx} = r_0 \sin\varphi \cdot \frac{d\varphi}{dx} = \frac{2\pi}{\lambda} r_0 \sin\varphi,$$

$$\frac{d\xi}{dx} = 1 - r_0\cos\varphi \cdot \frac{d\varphi}{dx} = 1 - \frac{2\pi}{\lambda} r_0 \cos\varphi$$

zu setzen ist. Hiernach wird

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{2\pi r_0 \sin\varphi}{\lambda - 2\pi r_0 \cos\varphi} \quad . \tag{405}$$

und hiermit ist auch die Richtung der Tangente an die Wellenoberfläche an einer Stelle, die der Phase φ entspricht, bekannt.

Auf ein Wasserteilchen, das an dieser Stelle der Wellenoberfläche liegt, wirkt — abgesehen von dem Luftdrucke, der auf der Wasseroberfläche lastet und der überall als konstant und normal zur Oberfläche angesehen werden kann — die Schwerkraft und die zur Herstellung des statischen Problems beizufügende Zentrifugalkraft. Die Resultierende aus den beiden zuletzt genannten Kräften muß senkrecht zur Wellenoberfläche stehen. Zerlegen wir also die Resultierende in eine horizontale Komponente P_1 und in eine vertikale Komponente P_2, wie es in Abb. 25, die ein Stückchen der Wellenoberfläche angibt, angedeutet ist, so muß sich verhalten

Abb. 25.

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{d\eta}{d\xi}. \tag{406}$$

Wir werden also das Verhältnis der Komponenten P_1 und P_2 berechnen und seinen Wert mit dem des Differentialquotienten, der aus Gl. (405) bekannt ist, vergleichen müssen.

Die Masse des Teilchens, das wir betrachten, sei m. Dann ist die an ihm wirkende Zentrifugalkraft C

$$C = \frac{mv^2}{r_0} = mu^2 r_0 .$$

Die Winkelgeschwindigkeit u, die hierin vorkommt, ist

$$u = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{407}$$

Für P_1 erhalten wir daher

$$P_1 = C \sin\varphi = m\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 r_0 \sin\varphi , \tag{408}$$

wenn P_1 als positiv in jener Richtung gerechnet wird, die durch den Pfeil in Abb. 25 angezeigt ist. Bei P_2 kommt außer der Vertikalkomponente der Zentrifugalkraft noch das

Gewicht mg des Teilchens in Betracht; man hat daher, wiederum unter Berücksichtigung der Vorzeichenfestsetzungen,

$$P_2^* = mg - C\cos\varphi = mg - m\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 r_0 \cos\varphi.$$

Gl. (406) geht hiermit und unter Berücksichtigung von Gl. (405) über in

$$\frac{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 r_0 \sin\varphi}{g - \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 r_0 \cos\varphi} = \frac{2\pi r_0 \sin\varphi}{\lambda - 2\pi r_0 \cos\varphi}$$

und diese Gleichung muß, wenn die Bewegung unter den gegebenen Umständen auch dynamisch möglich sein soll, für jeden Punkt der Wellenoberfläche, d. h. für jeden Wert von φ, erfüllt sein. Dies trifft, wie wir sehen, in der Tat zu, falls nur zwischen den in der Gleichung vorkommenden konstanten Größen die Bedingungsgleichung

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 : g = 2\pi : \lambda \tag{409}$$

erfüllt ist. Um dieser Gleichung eine für die weitere Verwendung bequemere Form zu geben, führe ich ferner noch die Schwingungszeit τ ein, also jene Zeit, während deren jedes Flüssigkeitsteilchen seine kreisförmige Bahn einmal durchläuft. Es ist dies zugleich auch die Zeit, während deren sich ein Wellenkamm (oder überhaupt jede bestimmte Phase der Bewegung) in stetiger Folge um die Wellenlänge λ fortbewegt hat. Bezeichnet man demnach die Fortschreitungsgeschwindigkeit der Wellen mit $\tilde{\omega}$, so ist auch

$$\tilde{\omega} = \frac{\lambda}{\tau}. \tag{410}$$

Andererseits läßt sich aber $\frac{d\varphi}{dt}$ in τ ausdrücken. In τ wächst nämlich φ um 2π und daher ist

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi\tilde{\omega}}{\lambda}.$$

Setzt man dies in Gl. (409) ein, so erhält man

$$\lambda \cdot \left(\frac{2\pi\tilde{\omega}}{\lambda}\right)^2 = 2\pi \cdot g$$

und hierauf durch Auflösen nach $\bar{\omega}$

$$\bar{\omega} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \tag{411}$$

Wir sind damit im wesentlichen am Schlusse unserer Betrachtungen angekommen. Es zeigte sich, daß die zuerst auf Grund der unmittelbaren Beobachtung gebildete Vorstellung von der Art der Wellenbewegung insofern zutreffend war, als sie in der Tat im allgemeinen einer geometrisch und dynamisch möglichen Bewegungsform in der reibungsfreien Flüssigkeit entspricht. Es mußten dabei nur die Bedingungsgleichungen (403) und (411) erfüllt sein. Wir haben daher mehr gefunden, als eine bloße Bestätigung für die Zulässigkeit unserer Induktionsschlüsse, denn wir wissen jetzt auch, nach welchem Gesetze die Bewegung nach der Tiefe hin abnimmt und wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit der Wellenlänge zusammenhängt. Besonders beachtenswert ist hierbei, daß die langen Wellen nach Gl. (411) schneller fortschreiten als die kurzen, während es auf die Höhe der Wellen dabei nicht ankommt. Dieses Ergebnis ist durchaus verschieden von dem Gesetze, nach dem die Schallwellen in einem elastischen Körper fortschreiten, denn in diesem Falle ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit unabhängig von der Wellenlänge. Es steht aber mit der Erfahrung ganz gut in Übereinstimmung. Bei bewegtem Meeres- oder Seespiegel kann man oft neben längeren Wellen, die dann gewöhnlich auch von größerer Höhe sind, kleinere Kräuselungen beobachten, die zu Wellen von kleinerer Länge gehören und die sich über die langen Wellenzüge ohne wesentliche gegenseitige Störung superponieren. Man wird dann stets bemerken, daß die langen Wellen viel schneller fortschreiten als die kurzen, die sie schnell hinter sich lassen.

Bei den Wellenbewegungen bestehen, wie schon zuvor bemerkt wurde, Wirbel. Die einzelnen Wirbelfäden sind hier geradlinig und senkrecht zur Bewegungsebene, also parallel zur Z-Achse gerichtet. Die Aufgabe, um die es sich hauptsächlich handelte, konnte zwar schon ohne weitere Beachtung der Wirbel

gelöst werden; es ist aber nicht ohne Interesse, nachträglich auch noch die Wirbel zu berechnen.

Nach Gl. (370) war der Wirbelvektor $\mathfrak{w}$

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{i}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) + \mathfrak{j}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) + \mathfrak{k}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right).$$

Hier ist $v_3 = 0$ und v_1 und v_2 sind unabhängig von z; daher vereinfacht sich $\mathfrak{w}$ zu

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{k}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right),$$

d. h. $\mathfrak{w}$ ist, in Übereinstimmung mit einer zuvor schon gemachten Bemerkung, parallel zur Z-Achse. Es handelt sich daher nur noch um die absolute Größe von $\mathfrak{w}$, nämlich

$$w = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}.$$

Um diesen Wert zu ermitteln, kehren wir zur Betrachtung von Abb. 22 (S. 403) zurück. Im Punkte D des festen Raumes steht die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ in dem Augenblicke, auf den sich die Abbildung bezieht, rechtwinklig zu AD und sie hat die Größe ru, wenn u wieder die Winkelgeschwindigkeit (ihrem absoluten Betrage nach) bezeichnet. Wir nahmen früher an, daß die kreisförmigen Bahnen der einzelnen Wasserteilchen in solcher Richtung durchlaufen würden, daß φ mit der Zeit abnimmt, und wollen an dieser — an sich übrigens gleichgültigen — Annahme auch hier festhalten. Für die Geschwindigkeitskomponenten v_1 und v_2 im Punkte D erhalten wir dann

$$v_1 = ur\cos\varphi, \quad v_2 = -ur\sin\varphi.$$

Es fragt sich jetzt, um wieviel sich diese Komponenten in den Punkten E' und F' von denen im Punkte D zur gleichen Zeit unterscheiden. Unmittelbar bekannt ist die Geschwindigkeit in den Nachbarpunkten E und F von E' und F'. Die Projektionen der Strecke DE auf die Achsenrichtungen sind $dx = rd\varphi\cos\varphi$ und $rd\varphi\sin\varphi$. Die Änderung dv_1 der Geschwindigkeitskomponente v_1, die beim Fortschreiten vom Punkte D zum Punkte E entsteht, kann daher

$$dv_1 = \frac{\partial v_1}{\partial x}(dx - rd\varphi\cos\varphi) + \frac{\partial v_1}{\partial y} rd\varphi\sin\varphi$$

$$= dx\left\{\frac{\partial v_1}{\partial x}\left(1 - \frac{2\pi r}{\lambda}\cos\varphi\right) + \frac{\partial v_1}{\partial y}\frac{2\pi r}{\lambda}\sin\varphi\right\}$$

gesetzt werden, wobei auf Gl. (401) zu achten war. Andererseits ist aber die Geschwindigkeit im Punkte E ebenso groß als im Punkte D und nur die Richtung hat sich um $d\varphi$ geändert. Man hat daher für dv_1 auch den Ausdruck

$$dv_1 = -ur\sin\varphi\cdot d\varphi = -u\frac{2\pi r}{\lambda}\sin\varphi\cdot dx.$$

Die Gleichsetzung beider Werte liefert die erste der vier folgenden Gleichungen

$$\frac{\partial v_1}{\partial x}\left(1 - \frac{2\pi r}{\lambda}\cos\varphi\right) + \frac{\partial v_1}{\partial y}\frac{2\pi r}{\lambda}\sin\varphi = -u\frac{2\pi r}{\lambda}\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x}\left(1 - \frac{2\pi r}{\lambda}\cos\varphi\right) + \frac{\partial v_2}{\partial y}\frac{2\pi r}{\lambda}\sin\varphi = -u\frac{2\pi r}{\lambda}\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x}\cdot\frac{2\pi r}{\lambda}\sin\varphi + \frac{\partial v_1}{\partial y}\left(1 + \frac{2\pi r}{\lambda}\cos\varphi\right) = -u\frac{2\pi r}{\lambda}\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x}\cdot\frac{2\pi r}{\lambda}\sin\varphi + \frac{\partial v_2}{\partial y}\left(1 + \frac{2\pi r}{\lambda}\cos\varphi\right) = u\frac{2\pi r}{\lambda}\sin\varphi.$$

Die zweite dieser Gleichungen wird nämlich gefunden, wenn man in derselben Weise die Änderung untersucht, die v_2 beim Übergange von D nach E erleidet, und die beiden letzten Gleichungen beziehen sich ebenso auf die Verschiebung von D nach F. Durch Auflösen der Gleichungen erhält man

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = u\left\{\frac{2\pi r}{\lambda}\cos\varphi - \left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2\right\} : \left[\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2 - 1\right],$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} = u\left\{\frac{2\pi r}{\lambda}\cos\varphi + \left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2\right\} : \left[\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2 - 1\right].$$

Für die Intensität des Wirbels findet man daher

$$w = 2u\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2 : \left[\left(\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2 - 1\right]. \tag{412}$$

Der Wert von w hängt demnach bei einer gegebenen Wellenbewegung (d. h. bei gegebenem u und λ) nur noch von dem Halbmesser des Kreises ab, den das Teilchen beschreibt, das sich gerade an der betreffenden Stelle befindet. Auch dieses Resultat läßt uns wieder erkennen, was früher schon allgemeiner bewiesen wurde, daß nämlich die Wirbelfäden dauernd an dieselben Teilchen der Flüssigkeit gebunden sind und sich in unveränderter Stärke mit diesen bewegen. Jeder Wirbelfaden beschreibt daher ebenfalls eine kreisförmige Bahn.

Wenn an irgendeiner Stelle $2\pi r = \lambda$ wäre, würde w nach Gl. (412) unendlich groß. Dieser Fall ist indessen bei einer Wellenbewegung ausgeschlossen, wie man aus Gl. (405) erkennt. Wenn nämlich $2\pi r_0$ nicht kleiner als λ wäre, hätte die Wellenoberfläche an irgend einer Stelle eine senkrechte Tangente, da $\frac{d\eta}{d\xi}$ unendlich groß würde. Die Wellenoberfläche würde nach den abgeleiteten Gleichungen oben eine Schleife bilden; ein Fall, der natürlich faktisch ausgeschlossen ist. Die Wellenlänge muß demnach immer wenigstens etwas mehr als das π-fache der Wellenhöhe betragen; sollte sie gerade das π-fache betragen, so müßte der Wellenkamm oben in eine Spitze auslaufen.

Ganz ähnlich wie die hier besprochenen fortschreitenden Wellen sind auch die stehenden Wellen zu beurteilen, die sich unterhalb eines Wehres oder eines ähnlichen Hindernisses in einem Flußlaufe ausbilden. Die Fortschreitungsgeschwindigkeit dieser Wellen relativ zur bewegten Wassermasse ist ebenso groß und entgegengesetzt gerichtet wie die Stromgeschwindigkeit, die die Wassermasse im ganzen genommen nach abwärts führt. Aus dieser Bedingung ergibt sich nach Gl. (411) die Länge der Wellen, wenn ϖ gegeben ist.

Anmerkung. Wenn es sich um sehr kleine Wellen handelt, wirkt außer der Schwere noch eine andere Kraft wesentlich mitbestimmend auf den Vorgang der Wellenbewegung ein: nämlich die an der Wasseroberfläche auftretende Kapillarkraft oder die Oberflächenspannung. Bei den leichten Kräuselungen der Oberfläche, wie sie auf einem Seespiegel durch einen sanften Wind hervorgerufen werden, überwiegt sogar die Kapillarkraft die Schwere bedeutend an Einfluß.

Die Wellenbewegung ist in diesem Falle ganz anderen Gesetzen unterworfen, als bei den hier untersuchten und praktisch natürlich viel wichtigeren Wellen von größeren Abmessungen. Um den Unterschied hervorzuheben und zugleich auf die Ursache hinzuweisen, die diesen Unterschied bedingt, bezeichnet man die kleinen Wellen häufig als „Kapillarwellen“. Außerdem hat Lord Kelvin, dem man ihre Theorie hauptsächlich verdankt, dafür den Namen „ripples“ vorgeschlagen, den man mit geringer Änderung auch ins Deutsche als „Riffeln“ übernommen hat.

Näher auf die Theorie der Kapillarwellen einzugehen, erscheint mir hier nicht nötig; ein Überblick über die Grundlage dieser Theorie soll jedoch nicht fehlen. — Die Wirkung der Kapillarkräfte an der Grenzfläche von zwei Flüssigkeiten überhaupt und insbesondere auch an der hier in Frage kommenden Wasseroberfläche, die an Luft angrenzt, kann dadurch genügend beschrieben werden, daß man in einer sehr dünnen Grenzschicht des Wassers eine nach allen Seiten hin gleiche, bei reinem Wasser nur von der Temperatur abhängige und sonst konstante Zugspannung annimmt, die man als die Oberflächenspannung bezeichnet. Bei einer Temperatur von 20° C beträgt diese Oberflächenspannung s etwa $74 \cdot 10^{-6}$ kg cm^{-1}. Die Dimension ist (ebenso wie bei den Spannungen in einer Scheibe, Band V, § 9) kg cm^{-1} und nicht kg cm^{-2}, weil es sich bei dieser Angabe um eine über die ganze Dicke der Grenzschicht erstreckte Summe handelt.

Vergrößert sich die Wasseroberfläche, so wird von den Kapillarkräften eine Arbeit geleistet, die ganz ähnlich wie eine Arbeit elastischer Kräfte als potentielle Energie und zwar innerhalb der Grenzschicht aufgespeichert wird. Streckt man ein rechteckiges Flächenelement von den Kantenlängen dx und dy in der einen Richtung, so daß die Kantenlänge dy auf dy' anwächst, so wird von den Oberflächenspannungen am Rande, die für den im Rechteck enthaltenen Teil der Grenzschicht äußere Kräfte sind, eine Arbeit

$$s\,dx\,(dy' - dy)$$

geleistet und zugleich erfährt die Oberfläche eine Vergrößerung um

$$dx\,(dy' - dy).$$

Aus dem Vergleiche folgt, daß s zugleich die in der Einheit der Oberfläche aufgespeicherte potentielle Energie angibt.

Wie sich eine gespannte Feder von selbst wieder gerade streckt, wenn sie nicht daran gehindert wird, nimmt auch die Flüssigkeit von selbst eine Gestalt an, bei der ihre Oberflächenenergie und daher

die Oberfläche selbst möglichst klein ist. Daher kommt es, daß ein Wassertropfen eine kugelförmige Gestalt annimmt und zwar bei der Mitwirkung anderer Kräfte um so genauer, je kleiner der Tropfen ist, weil die Oberfläche und daher die Oberflächenenergie im Verhältnisse zum Volumen der Kugel und den der Masse proportionalen Kräften um so größer wird, je kleiner der Kugelradius ist.

Dieselben Bedingungen treffen auch bei den Wasserwellen zu. Die Oberfläche einer Welle ist größer als die Oberfläche des ruhenden Wassers und die Wirkung der Kapillarkräfte kommt darauf hinaus, daß sie eine Rückbildung der Wellenoberfläche zu der dem Gleichgewichtszustande entsprechenden ebenen Oberfläche herbeizuführen suchen. In demselben Sinne wirkt auch die Schwere. Aber während die Schwere und die von ihr herrührende potentielle Energie der über das ursprüngliche Niveau gehobenen Wassermassen dem Volumen proportional ist, wenn man gleiche Hubhöhen voraussetzt, ist die Oberflächenenergie dem Flächeninhalte proportional und sie wächst daher, wie man schon ohne jede Rechnung einsieht, jener gegenüber um so mehr an, je kürzer man (bei gleicher Wellenhöhe) die Wellenlänge annimmt. Bei Wellen von einigen cm Länge überwiegt bereits die Wirkung der Schwere, bei Wellen von 1 cm oder darunter aber die Wirkung der Kapillarkräfte.

Bei der weiteren Ausführung der Theorie betrachtet man die Wasserbewegung als wirbelfrei und setzt ein Geschwindigkeitspotential an, das die Grenzbedingungen erfüllt, wobei man sich freilich mit einer Annäherung begnügen muß. Die Oberflächenspannung spricht sich bei der Grenzbedingung an der Wellenoberfläche darin aus, daß der Druck dort nicht mehr gleich dem als konstant anzusehenden Luftdrucke zu setzen ist, sondern größer oder kleiner, je nachdem die Wellenoberfläche an der betreffenden Stelle nach außen hin konvex oder konkav gekrümmt ist. Bezeichnet man nämlich die laufenden Koordinaten der Wellenoberfläche mit x und y und zwar y positiv, wenn es nach abwärts geht, und den Luftdruck mit p_0, so folgt aus dem Gleichgewichte eines dreieckigen Flüssigkeitselements von den Katheten dx und dy und einer zur Oberfläche gehörenden Hypotenuse gegen Verschieben in der senkrechten Richtung

$$p = p_0 + s\,\frac{d(\sin\varphi)}{dx},$$

wobei mit φ der Winkel bezeichnet ist, den die Hypotenuse mit der X-Achse bildet. Die d'Alembertschen Hilfskräfte und das Gewicht sind gegenüber den hier zu vergleichenden Kräften am Umfange des Elementes klein von höherer Ordnung, so daß sie nicht in Betracht kommen. Wenn die Wellen ziemlich flach sind, der Winkel φ also

klein bleibt, kann man sin φ durch tg φ und hiermit die vorhergehende Gleichung auch durch

$$p = p_0 + s\frac{d^2y}{dx^2}$$

ersetzen; gültig für die Wellenoberfläche.

Auch aus dieser Gleichung erkennt man, ganz unabhängig von der vorher durchgeführten Energievergleichung, wie die Oberflächenspannung auf die Wellenbewegung einwirkt. Denn man kann sie sich hiernach ersetzt denken durch eine dem Krümmungsradius proportionale Steigerung des äußeren Druckes in den Wellenbergen und eine Druckminderung in den Wellentälern. Diese Druckunterschiede wirken ebenso wie die Schwere für sich genommen auf eine Rückkehr in die dem Ruhezustande entsprechende ebene Flüssigkeitsoberfläche hin.

§ 63. Gezeitenwellen.

Von ganz anderer Art als die vorher besprochenen Oberflächenwellen sind jene langgezogenen und daher ihrer Wellenform nach beim bloßen Anblicke nicht übersehbaren Schwingungsbewegungen, die sich in den Gezeiten, also in langsam erfolgenden periodischen Schwankungen des Wasserspiegels kundgeben. Dazu gehört zunächst die Ebbe- und Flutbewegung der Meere, von der man weiß, daß sie von der verschieden starken Anziehung herrührt, die nach dem Newtonschen Gesetze vom Monde (bezw. der Sonne) auf verschieden weit davon gelegene Punkte der Erde ausgeübt wird. Auch die unter dem Namen der „Seiches“ bekannten, zuerst am Genfer See und später auch an anderen Seeen beobachteten Seespiegelschwankungen befolgen, abgesehen davon, daß hier die die Schwingungen erregende Ursache eine andere ist, im wesentlichen das gleiche Gesetz. Ähnliche langsam verlaufende Pendelungen des Wasserspiegels kommen auch in langen Kanalhaltungen und in manchen andern Fällen vor. Die einfachsten Bedingungen für das Fortschreiten dieser Gezeiten-Wellen liegen in einem gradlinigen horizontalen Kanale von überall gleichem Querschnitte vor, der überdies noch von gemauerten senkrechten Seitenwänden begrenzt sein möge. Auf diesen Fall, der überdies dem

Techniker besonders naheliegt, soll sich die hier durchzuführende Betrachtung in erster Linie beziehen.

Dabei mag ganz dahingestellt bleiben, wie die Gezeiten-Welle ursprünglich hervorgerufen wurde. Wir wollen sie nur, nachdem sie auf irgend eine Art entstanden ist und nachdem die erregende Ursache zu wirken aufgehört hat, in ihrem weiteren ungestörten Fortschreiten verfolgen. Namentlich soll also hier nicht auf die Entstehung der Ebbe- und Flutwelle im großen Ozean eingegangen werden, während das Fortschreiten dieser vom Ozean her eintreffenden Welle in einem langgezogenen kleineren Gewässer mit in den Bereich dieser Untersuchung gehört.

Die in der angegebenen Weise beschränkte Theorie der Gezeiten-Wellen ist erheblich einfacher als die Theorie der Oberflächenwellen und zwar weil bei diesen langsam erfolgenden Schwingungen die Beschleunigungen der Wasserteilchen nur sehr gering sind. Darum fallen auch die nach dem d'Alembertschen Prinzip zur Zurückführung des dynamischen Problems auf ein statisches einzuführenden Trägheitskräfte und namentlich deren Vertikal-Komponenten, auf die es hierbei in erster Linie ankommt, äußerst klein aus, so daß sie bei der Berechnung des an irgend einer Stelle der Flüssigkeit auftretenden Druckes ganz vernachlässigt werden können. Der Druck hängt daher nur davon ab, wie tief diese Stelle gerade unter der jeweiligen Wasseroberfläche liegt und er ist ebenso groß wie der hydrostatische Druck bei der gleichen Tiefe. Sieht man von dem als konstant vorauszusetzenden Luftdrucke auf die Wasseroberfläche, der sonst nur als ein konstanter Summand mitzuschleppen wäre, ab, so ist der Druck p an irgend einer Stelle in der Höhe y über der Kanalsohle

$$p = \gamma (h + \eta - y) \tag{413}$$

zu setzen, wenn unter γ das Gewicht der Volumen-Einheit, unter h die Höhe des Wasserspiegels im ungestörten und unter $h + \eta$ im augenblicklichen Zustande verstanden wird. Unter η ist demnach die zur Zeit t stattfindende Erhebung des Wasserspiegels über den normalen Stand infolge der Schwingungs-

bewegung zu verstehen. Rechnet man die Abszissen x in der Richtung der Kanal-Achse, so ist η eine unbekannte Funktion der beiden unabhängigen Variabeln x und t.

Für das Druckgefälle in horizontaler Richtung findet man durch Differentiation

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = -\gamma \frac{\partial \eta}{\partial x}; \tag{414}$$

es ist daher unabhängig von der Tiefe unter dem Wasserspiegel und ebenso wie η nur von x und t abhängig. Hiermit hängt jene Eigentümlichkeit der Gezeiten-Wellen zusammen, durch die sie sich am meisten von den Oberflächenwellen unterscheiden. Die Unabhängigkeit des horizontalen Druckgefälles von der Wassertiefe hat nämlich zur Folge, daß auch die Horizontalkomponenten der Trägheitskräfte in allen Punkten eines Querschnitts jederzeit gleich groß sein müssen, da sich diese Horizontalkomponenten mit dem horizontalen Druckgefälle im Gleichgewichte halten müssen. Hierbei ist noch zu beachten, daß die Horizontalkomponenten der Trägheitskräfte, obschon sie ebenfalls nur sehr gering sind, nicht vernachlässigt werden dürfen, weil sie sich wegen der großen Längsausdehnung des Kanals schließlich doch zu größeren Beträgen summieren. Auch das horizontale Druckgefälle ist nur sehr gering; zwischen weit genug voneinander entfernten Querschnitten besteht aber doch ein merklicher Niveauunterschied und hiermit ein merklicher Druckunterschied zwischen gleich hoch liegenden Punkten beider Querschnitte. Dieser Druckunterschied ist gleich dem Linienintegrale der Trägheitskräfte längs der zwischen beiden Querschnitten liegenden Strecke der Kanalachse. Bezeichnet man die Horizontalkomponente der Geschwindigkeit mit v_1, so ist

$$\frac{\gamma}{g}\frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} = -\gamma \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

denn die Beschleunigung $\frac{d v_1}{d t}$ kann hier ohne in Betracht kommenden Fehler durch $\frac{\partial v_1}{\partial t}$ ersetzt werden. Aus der Gleichung

$$\frac{\partial v_1}{d t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \tag{415}$$

die zu jeder Zeit erfüllt ist, folgt aber, daß ebenso wie η auch $\frac{\partial v_1}{\partial t}$ und hiernach auch v_1, wenn diese Geschwindigkeit lediglich infolge der Schwingungsbewegung aus dem anfänglichen Ruhezustande hervorgegangen ist, für alle Punkte eines Querschnitts zur gleichen Zeit denselben Wert hat. An der Wellenbewegung nehmen daher bei der Gezeitenwelle (abgesehen von den äußerst geringen, durch die hier vernachlässigten Vertikalkomponenten der Trägheitskräfte hervorgebrachten Unterschieden) im Gegensatze zu den Oberflächenwellen alle Wasserteilchen eines Querschnitts mit derselben Geschwindigkeit teil.

Zu Gl. (415) tritt noch die Kontinuitätsgleichung. Man betrachte den zwischen zwei aufeinander folgenden Querschnitten liegenden Raum. Wenn $\frac{\partial v_1}{\partial x}$ positiv ist, strömt aus ihm in der Zeiteinheit die Menge

$$b(h + \eta) \frac{\partial v_1}{\partial x} \cdot dx$$

mehr aus als ein, wenn die Breite des Querschnitts mit b bezeichnet wird, so daß $b(h + \eta)$ den Flächeninhalt des Querschnitts angibt. Wenn mehr ausströmt als einströmt, muß der Wasserinhalt entsprechend abnehmen und dies kann nur dadurch geschehen, daß sich η entsprechend vermindert. Man erhält so die Gleichung

$$b(h + \eta) \frac{\partial v_1}{\partial x} dx = - b dx \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t}.$$

Streicht man auf beiden Seiten die gleichen Faktoren und nimmt man ferner noch an, daß die Spiegelschwankungen η gering sind im Vergleiche zur Tiefe h des Kanals, so daß η gegen h vernachlässigt werden kann, so erhält man die Kontinuitätsgleichung in der vereinfachten Form

$$h \frac{\partial v_1}{\partial x} = - \frac{\partial \eta}{\partial t}. \tag{416}$$

Aus den beiden Differentialgleichungen (415) und (416) kann man nun leicht eine der beiden Veränderlichen v_1 und η eliminieren, indem man die eine Gleichung nach x, die andere

nach t differentiiert und nach Multiplikation der einen oder anderen mit g oder h beide voneinander subtrahiert. Man gelangt so zu den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} &= gh\,\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= gh\,\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \end{aligned}\right\}. \tag{417}$$

Die beiden Veränderlichen v_1 und η müssen daher derselben partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen, die übrigens zu jenen wenigen gehört, deren allgemeine Lösung bekannt ist. Versteht man unter F_1 und F_2 zwei Funktionen von beliebigem Bau, so ist

$$v_1 = F_1(x + ct) + F_2(x - ct) \tag{418}$$

und dieselbe Lösung gilt auch der Form nach für η. Vorausgesetzt wird dabei, daß die Konstante c passend bestimmt wird, und zwar findet man beim Einsetzen des Wertes in die Differentialgleichung, daß

$$c = \sqrt{gh} \tag{419}$$

sein muß. Die Funktionen F_1 und F_2 erhalten ihre nähere Bestimmung durch die im Anfangszustande gegebenen Grenzbedingungen. Es ist aber gar nicht nötig, dies weiter auszuführen, da das Fortpflanzungsgesetz der Welle schon aus Gl. (418) deutlich genug erkannt werden kann und, wie aus dieser Gleichung hervorgeht, von der besonderen Wellenform ganz unabhängig ist. Die Gleichung stellt zwei sich übereinander lagernde und in entgegengesetzter Richtung ohne Formänderung fortschreitende Wellen dar. Betrachten wir zunächst die durch das zweite Glied dargestellte, in der Richtung der positiven X-Achse fortschreitende Welle, setzen also

$$v_1 = F_2(x - ct),$$

so erkennen wir, daß wir nach Ablauf einer Zeit Δt überall wieder zu demselben Werte von v_1 gelangen wie vorher, wenn wir zugleich um eine Strecke Δx fortschreiten, so daß

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = c$$

ist. Dasselbe gilt auch für η. Die Welle hat sich also in $\triangle t$ ohne jede weitere Änderung nur um $\triangle x$ verschoben und die durch Gl. (419) näher bestimmte Konstante c stellt die Fortschreitungsgeschwindigkeit der Welle dar, die natürlich von der Geschwindigkeit v_1 der Wasserteilchen wohl unterschieden werden muß. Damit ist aber die Aufgabe, die wir uns stellten, gelöst, denn man erkennt auf dieselbe Art, daß auch das erste Glied in Gl. (418) eine mit der gleichen Geschwindigkeit c, aber im Sinne der negativen X-Achse fortschreitende Welle von beliebiger Gestalt darstellt, die sich der ersten überlagert.

Die Fortschreitungsgeschwindigkeit ist nach Gl. (419) nur von der Tiefe des Gewässers abhängig und zwar ist sie so groß wie die Fallgeschwindigkeit, die ein Körper beim freien Fall aus einer Höhe annehmen würde, die gleich der halben Tiefe des Kanals ist.

Eine wichtige Folgerung läßt sich aus dieser Untersuchung für den Bewegungswiderstand eines Schiffes ziehen, das auf einem Kanale mit gleichförmiger Geschwindigkeit geschleppt wird. Trifft nämlich die Fahrgeschwindigkeit mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit c der Gezeitenwelle auf diesem Kanale ganz oder nahezu zusammen, so bildet sich eine mit dem Schiffe fortschreitende Welle von besonders großer Höhe aus und damit fällt auch der Bewegungswiderstand besonders groß aus. Bei der Wahl der Schleppgeschwindigkeit auf Kanälen ist hierauf Rücksicht zu nehmen.

Ganz ähnliche Erscheinungen sind auch bei Probefahrten von Torpedobooten oder anderen Seeschiffen öfters beobachtet worden, wenn die Tiefe h des Fahrwassers mit der Fahrgeschwindigkeit c zufällig in dem durch Gl. (419) angegebenen Zusammenhange steht. Überhaupt macht sich der Einfluß der Gewässertiefe auf die bei gleicher Maschinenleistung erreichte Geschwindigkeit stets bemerklich, solange die Tiefe den aus Gl. (419) zu entnehmenden Wert nicht erheblich übersteigt.

§ 64. Die Eulerschen Bewegungsgleichungen in Zylinderkoordinaten.

In der Technik hat man häufig mit Wasserbewegungen zu tun, die zum mindesten näherungsweise um eine Umdrehungsachse herum als symmetrisch angesehen werden können. Das wichtigste Beispiel dafür bilden die Turbinen mit lotrechter Umdrehungsachse und großer, voll beaufschlagter Schaufelzahl. In solchen Fällen gelangt man zur einfachsten analytischen Darstellung des Bewegungsvorganges durch die Anwendung von Zylinderkoordinaten. Wir wollen daher die Eulerschen Gleichungen, die in § 56 für ein rechtwinkliges Koordinatensystem angeschrieben waren, jetzt in der Form aufstellen, wie sie für Zylinderkoordinaten gelten. Man könnte sie aus der früheren Form durch Vornahme einer Koordinatentransformation gewinnen; anstatt dessen ziehe ich aber vor, sie nochmals von neuem abzuleiten.

Die in der Richtung der Zylinderachse gehenden Koordinaten seien mit z bezeichnet. Wenn die Zylinderachse lotrecht steht, soll die positive Richtung der z nach abwärts gehen. Der Winkel ψ, den eine durch den betrachteten Punkt und die Zylinderachse gehende Ebene mit einer im Raume feststehenden Anfangslage bildet, sei in jenem Sinne herum positiv gezählt, der, von der positiven Z-Achse aus gesehen, mit der Uhrzeigerdrehung übereinstimmt. Der Abstand r von der Z-Achse soll stets als positiv betrachtet werden.

Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, bezogen auf das ruhende Koordinatensystem an der Stelle z, r, ψ, zerlege ich in drei Komponenten v_z, v_r, v_t in achsialer, radialer und tangentialer Richtung. Die Richtungen, in denen sie als positiv gelten, ergeben sich aus den vorhergehenden Festsetzungen. Im allgemeinsten Falle, den wir zuerst behandeln wollen, sind die drei Geschwindigkeitskomponenten Funktionen der Koordinaten z, r, ψ und der Zeit t.

Ich betrachte ein keilförmiges Volumenelement, dessen Kanten in den Richtungen von z, r, t gehen und die Längen

dz, dr und $rd\psi$ haben. Durch die obere horizontale — oder allgemeiner gesagt zur Z-Achse senkrechte — Seitenfläche vom Inhalte $rd\psi dr$ strömt auf die Zeiteinheit bezogen die Wassermenge

$$rd\psi dr v_z$$

ein und durch die gegenüberliegende Seitenfläche fließt eine Wassermenge aus, die um

$$rd\psi dr \frac{\partial v_z}{\partial z} dz$$

größer ist, als die vorige. Ebenso tritt durch die beiden Seitenflächen, deren Ebenen sich in der Z-Achse schneiden, mehr aus als ein eine Wassermenge

$$drdz \frac{\partial v_t}{\partial \psi} d\psi$$

und durch die beiden noch übrigen, zum Radius r senkrecht stehenden Seitenflächen die Menge

$$\frac{\partial}{\partial r}(rd\psi dz v_r) dr.$$

Setzt man die Summe dieser Ausdrücke gleich Null, so erhält man nach Streichen der gemeinsamen Faktoren die Kontinuitätsgleichung

$$r\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r}(v_r r) + \frac{\partial v_t}{\partial \psi} = 0. \tag{420}$$

Etwas übersichtlicher kann man dafür auch schreiben

$$\frac{\partial (v_z r)}{\partial z} + \frac{\partial (v_r r)}{\partial r} + \frac{\partial (v_t r)}{r \partial \psi} = 0. \tag{421}$$

Um ferner die aus der dynamischen Grundgleichung hervorgehenden Eulerschen Gleichungen abzuleiten, zerlege ich die Beschleunigung der Wasserbewegung an der Stelle z, r, ψ zur Zeit t in drei Komponenten b_z, b_r, b_t. Es handelt sich zunächst darum, diese Komponenten in den Differentialquotienten der Geschwindigkeitskomponenten auszudrücken. Die Änderung, die z. B. v_r für ein bestimmtes Wasserteilchen im Zeitelemente dt erfährt, kann zunächst geschrieben werden

$$dv_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} dt + \frac{\partial v_r}{\partial z} dz + \frac{\partial v_r}{\partial r} dr + \frac{\partial v_r}{\partial \psi} d\psi,$$

wobei jedoch die Koordinatenänderungen dz usf. mit den Geschwindigkeitskomponenten, die zur Ortsveränderung führen, durch die Beziehungen

$$dz = v_z dt, \qquad dr = v_r dt, \qquad d\psi = \frac{v_t\, dt}{r}$$

zusammenhängen. Hieraus ergibt sich eine der drei nachstehenden Gleichungen, von denen die beiden anderen aus der gleichen Überlegung hervorgehen, nämlich

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dv_z}{dt} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_t \frac{\partial v_z}{r \partial \psi} \\
\frac{dv_r}{dt} &= \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_t \frac{\partial v_r}{r \partial \psi} \\
\frac{dv_t}{dt} &= \frac{\partial v_t}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_t}{\partial z} + v_r \frac{\partial v_t}{\partial r} + v_t \frac{\partial v_t}{r \partial \psi}
\end{aligned}\right\}. \qquad (422)$$

Aber diese totalen Differentialquotienten nach der Zeit geben noch nicht die Beschleunigungskomponenten an, wenigstens nicht die beiden letzten. Man bedenke nämlich, daß auch dann, wenn die Geschwindigkeitskomponenten v_z, v_r, v_t eines bestimmten Wasserteilchens konstant bleiben, trotzdem eine Richtungsänderung der sich aus diesen Komponenten zusammensetzenden resultierenden Geschwindigkeit und daher eine Beschleunigung stattfindet, weil die Richtungen von v_r und v_t an der später erreichten Stelle andere sind als an dem früheren Platze. Die hier in Frage kommenden Richtungsänderungen hängen nur von der Verschiebung in tangentialer Richtung ab, während eine Verschiebung in achsialer oder radialer Richtung nichts dazu beiträgt. Im Zeitmomente dt drehen sich nämlich die Richtungen, nach denen die Komponenten v_r und v_t gerechnet werden, um einen Winkel $d\psi$, der schon vorher zu

$$d\psi = \frac{v_t\, dt}{r}$$

angegeben war. Um nun das der Zeit nach konstant bleibende v_r in die neue Richtung überzuführen, muß dazu ein in tangentialer Richtung gehendes Differential von der Größe $v_r d\psi$ geometrisch addiert werden. Ebenso entspricht einer Drehung von v_t um den Winkel $d\psi$ ein in radialer Richtung und zwar

nach innen, oder in negativer Richtung gehender Geschwindigkeitszuwachs von der Größe $v_t d\psi$. Diese Änderungen müssen den in den Gleichungen (422) allein berücksichtigten Zuwüchsen der Absolutwerte der Geschwindigkeitskomponenten zugefügt werden, um daraus die Beschleunigungskomponenten zu erhalten. Und zwar findet man auf Grund dieser Überlegung

$$\left.\begin{aligned} b_z &= \frac{dv_z}{dt} \\ b_r &= \frac{dv_r}{dt} - \frac{v_t^2}{r} \\ b_t &= \frac{dv_t}{dt} + \frac{v_r v_t}{r} \end{aligned}\right\} \qquad (423)$$

mit dem Vorbehalte, daß für die totalen Differentialquotienten die in den Gleichungen (422) angeschriebenen Werte zu setzen sind.

Wir wenden uns jetzt zur Betrachtung der Kräfte, die an dem vorher angegebenen keilförmigen Volumenelemente angreifen. Die auf die Volumeneinheit bezogene Massenkraft zerlegen wir in drei Komponenten P_z, P_r, P_t. Außerdem handelt es sich noch um den auf die Seitenflächen wirkenden Flüssigkeitsdruck. Dieser ist an jeder Stelle nach allen Richtungen hin gleich, da die Flüssigkeit als reibungsfrei vorausgesetzt wird. Der Druck p ist daher nur als eine Funktion von z, r, ψ und t und als rechtwinklig zu den Seitenflächen des Volumenelements stehend anzunehmen.

Auf die beiden horizontalen Seitenflächen kommt hiernach ein in achsialer Richtung und zwar von unten nach oben gehender Drucküberschuß von dem Betrage

$$r d\psi dr \cdot \frac{\partial p}{\partial z} dz.$$

Für die achsiale Richtung erhält man daher nach der dynamischen Grundgleichung, wenn das Gewicht der Raumeinheit der Flüssigkeit mit γ bezeichnet wird,

$$\frac{\gamma}{g} \frac{dv_z}{dt} = P_z - \frac{\partial p}{\partial z}. \qquad (424)$$

Für die radiale Richtung kommt zunächst der nach innen oder in negativer Richtung gehende Drucküberschuß an den zu r rechtwinklig stehenden Seitenflächen vom Betrage

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\,d\psi\,dz\,p)\,dr$$

in Betracht. Dazu kommt die Resultierende der nicht genau in die gleiche Richtungslinie fallenden Druckkräfte an den beiden Keilflächen, die gleich

$$p\,dr\,dz\,d\psi$$

ist und nach außen, also in positiver Richtung geht. Beide Kräfte zusammen liefern

$$-\,r\,d\psi\,dz\,dr\,\frac{\partial p}{\partial r}$$

und die dynamische Grundgleichung für die radiale Richtung lautet demnach

$$\frac{\gamma}{g}\left(\frac{dv_r}{dt}-\frac{v_t^2}{r}\right)=P_r-\frac{\partial p}{\partial r}. \tag{425}$$

Endlich findet man in derselben Weise für die tangentiale Richtung

$$\frac{\gamma}{g}\left(\frac{dv_t}{dt}+\frac{v_r v_t}{r}\right)=P_t-\frac{\partial p}{r\,\partial\psi}. \tag{426}$$

Hiermit ist das zunächst gesteckte Ziel erreicht.

§ 65. Die Wirbelkomponenten in Zylinderkoordinaten.

Wenn die Flüssigkeitsbewegung wirbelfrei ist, läßt sie, wie wir bereits wissen, ein Geschwindigkeitspotential Φ zu, aus dem die Geschwindigkeitskomponente in irgendeiner Richtung durch Differentiation nach dieser Richtung abgeleitet werden kann. Für die wirbelfreie Bewegung hat man daher

$$v_z=\frac{\partial\Phi}{\partial z},\quad v_r=\frac{\partial\Phi}{\partial r},\quad v_t=\frac{\partial\Phi}{r\,\partial\psi}. \tag{427}$$

Bildet man die zweiten Differentialquotienten von Φ nach zwei der drei Variabeln in zwei verschiedenen Aufeinanderfolgen der Differentiationen und setzt die beiden zusammen-

gehörigen einander gleich, so erhält man die folgenden Bedingungsgleichungen für eine wirbelfreie Bewegung

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{r\partial\psi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(v_t r)}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial v_t}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{r\partial\psi} &= 0 \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (428)$$

Wenn diese Gleichungen nicht erfüllt sind, ist die Bewegung eine wirbelbehaftete. In diesem Falle bilden wir einen Vektor $\mathfrak{w}$ mit den Komponenten w_z, w_r, w_t, indem wir setzen

$$\left.\begin{aligned} w_z &= \frac{\partial v_r}{r\partial\psi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(v_t r)}{\partial r} \\ w_r &= \frac{\partial v_t}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{r\partial\psi} \\ w_t &= \frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial z} \end{aligned}\right\}. \qquad (429)$$

Der auf diese Weise definierte Vektor $\mathfrak{w}$ stimmt genau überein mit dem früher für rechtwinklige Koordinaten durch Gl. (370) S. 356 definierten Wirbelvektor $\mathfrak{w}$, wovon man sich durch eine Koordinatentransformation leicht überzeugen kann. Wir können ihn daher ebenso wie früher zur Kennzeichnung des Wirbels an der Stelle z, r, ψ zur Zeit t nach Richtung und Größe benutzen. Dabei ist es gleichgültig, muß aber noch einmal erwähnt werden, daß von anderen Verfassern die Hälften dieser Werte als Wirbelkomponenten benutzt werden.

§ 66. Stationäre und achsensymmetrische Bewegung.

Die in den beiden vorhergehenden Paragraphen abgeleiteten Formeln gelten ganz allgemein für jede Bewegung einer reibungsfreien und raumbeständigen Flüssigkeit. Der Vorteil der gewählten Darstellung tritt aber erst hervor, wenn es sich um eine Bewegung handelt, die um die Zylinderachse herum symmetrisch ist. Für diesen Fall vereinfachen sich die Gleichungen erheblich und zwar um so mehr, wenn wir überdies eine statio-

näre Strömung voraussetzen, bei der die partiellen Differentialquotienten der Geschwindigkeitskomponenten nach der Zeit gleich Null sind.

An Stelle von Gl. (421) erhalten wir in diesem Falle die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial (v_z r)}{\partial z} + \frac{\partial (v_r r)}{\partial r} = 0 \tag{430}$$

Die Gleichungen (422) gehen über in

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d v_z}{dt} &= v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} \\
\frac{d v_r}{dt} &= v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \\
\frac{d v_t}{dt} &= v_z \frac{\partial v_t}{\partial z} + v_r \frac{\partial v_t}{\partial r}
\end{aligned}\right\} . \tag{431}$$

und die drei Gleichungen (424 bis 426) lauten, wenn man die soeben angegebenen Werte sofort einsetzt,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\gamma}{g}\left(v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) &= P_z - \frac{\partial p}{\partial z} \\
\frac{\gamma}{g}\left(v_z \frac{\partial v_r}{d z} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_t^2}{r}\right) &= P_r - \frac{\partial p}{\partial r} \\
\frac{\gamma}{g}\left(v_z \frac{\partial v_t}{\partial z} + v_r \frac{\partial v_t}{\partial r} + \frac{v_r v_t}{r}\right) &= P_t
\end{aligned}\right\} . \tag{432}$$

Hierbei sind die Komponenten der äußeren Massenkraft noch willkürlich belassen, abgesehen davon, daß sie natürlich auch symmetrisch um die Zylinderachse verteilt sein müssen. Auch der Druck p muß unabhängig von ψ sein.

Die Gleichungen (429) für die Wirbelkomponenten endlich gehen über in

$$\left.\begin{aligned}
w_z &= -\frac{1}{r} \frac{\partial (v_t r)}{\partial r} \\
w_r &= \frac{\partial v_t}{\partial z} \\
w_t &= \frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial z}
\end{aligned}\right\} . \tag{433}$$

Durch die Ausschaltung der Koordinate ψ haben wir es jetzt nur noch mit einem zweidimensionalen Problem zu tun, da der Bewegungszustand schon vollständig gegeben ist, wenn man die Komponenten v_z, v_r und v_t für alle Punkte irgendeines Meridianschnittes kennt.

Der Kontinuitätsgleichung (430) genügt man durch Einführung einer Stromfunktion Ψ, die zunächst eine beliebige Funktion von z und r sein kann, indem man setzt

$$v_z r = \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad v_r r = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}. \tag{434}$$

Um die für Ψ gebrauchte Beziehung als „Stromfunktion" zu rechtfertigen, betrachte man eine Linie in der Meridianebene, die der Gleichung

$$\Psi = C_1$$

genügt, in der C_1 irgendeine Konstante oder ein „Parameter" ist. Geht man auf dieser Linie um ein Längenelement weiter, so besteht zwischen den dazu gehörigen Koordinatenänderungen die Gleichung

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Psi}{dr} dr = 0.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (434) folgt daraus

$$-v_r dz + v_z dr = 0,$$

wofür man auch schreiben kann

$$\frac{dz}{dr} = \frac{v_z}{v_r}.$$

Diese Gleichung spricht aus, daß die Resultierende aus den in der Meridianebene enthaltenen Geschwindigkeitskomponenten v_z und v_r in jedem Punkt der Linie $\Psi = C_1$ in die Richtung der an diese Linie gelegten Tangente fällt. Die Gleichung $\Psi = C_1$ kann ferner auch als Gleichung einer Rotationsfläche angesehen werden, von der die vorher betrachtete Linie eine Meridiankurve bildet. Die Geschwindigkeitskomponente v_t fällt in die Richtung der Tangente eines Parallelkreises und die Gesamtgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$, die sich aus v_z, v_r und v_t zusammensetzt, ist daher ebenfalls in der Tangentialebene an die Rotationsfläche enthalten. Hiermit ist bewiesen,

daß die betrachtete Rotationsfläche an keiner Stelle von der Flüssigkeitsströmung durchsetzt wird, daß also alle Stromlinien, die von einem ihrer Punkte ausgehen, ganz auf ihr enthalten sind.

Wenn man eine beliebige Funktion von z und r als Stromfunktion wählt, gelangt man zu einer möglichen Flüssigkeitsbewegung. Die Gleichungen (432) dienen nur dazu, die Druckverteilung, die mit dieser Strömung verbunden ist, näher zu bestimmen, enthalten aber in sich keine einschränkende Bedingung. Wenn die Randbedingungen entsprechend gewählt werden, läßt sich daher jede durch irgendeine Stromfunktion Ψ angegebene Bewegung verwirklichen.

Gehört dagegen zu den Randbedingungen die Zuführung der Flüssigkeit im wirbelfreien Zustande, so darf man nach den Helmholtzschen Wirbelsätzen schließen, daß die Bewegung auch weiterhin wirbelfrei bleibt, falls die äußeren Massenkräfte $P_z P_r P_t$ zu einem Potentiale gehören, also etwa nur Komponenten des Eigengewichtes enthalten. Dann muß Ψ einer Differentialgleichung genügen, die sich aus der letzten der Gleichungen (433) mit $w_t = 0$ leicht ableiten läßt. Durch Einsetzen der Werte von v_z und v_r aus den Gleichungen (434) geht nämlich die Gleichung über in

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0,$$

wofür man nach weiterer Ausrechnung auch schreiben kann

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0. \qquad (435)$$

Dieser Gleichung muß also Ψ schon dann genügen, wenn nur die tangentiale Wirbelkomponente w_t überall verschwindet, gleichgültig ob dies von w_z und w_r ebenfalls zutrifft oder nicht. Ist dagegen die Flüssigkeit vollkommen wirbelfrei, so folgt außerdem aus den beiden ersten der Gleichungen (433), daß entweder

$$v_t = 0$$

ist, oder auch allgemeiner

$$v_t = \frac{c}{r}$$

sein kann, wenn c eine Integrationskonstante bedeutet.

Von den vorhergehenden Formeln lassen sich bereits manche nützliche Anwendungen machen. Professor Prasil in Zürich, dem das erhebliche Verdienst zukommt, die Eulerschen Gleichungen in Zylinderkoordinaten auf die Untersuchung von technisch wichtigen Flüssigkeitsbewegungen, namentlich auf die Theorie der Turbinen zuerst angewendet zu haben, hat z. B. von diesen Betrachtungen Gebrauch gemacht, um eine geeignete Gestalt für das Saugrohr einer Turbine daraus abzuleiten. Setzt man

$$\Psi = ar^2(h - z), \tag{436}$$

worin a und h Konstanten bedeuten, so wird mit diesem Ansatze, wie die einfache Ausrechnung lehrt, Gl. (435) erfüllt. Für die Geschwindigkeitskomponenten erhält man nach den Gleichungen (434)

$$v_z = 2a(h - z), \qquad v_r = ar,$$

also eine nach abwärts und außen hin erfolgende Strömung, bei der die vertikale Geschwindigkeitskomponente v_z und auch die resultierende Geschwindigkeit beim Abwärtssteigen immer mehr abnimmt. Hierin besteht gerade die Absicht, da es sich darum handelt, möglichst wenig kinetische Energie mit dem aus der Turbine und hierauf aus dem Saugrohre austretenden Wasser ungenützt entweichen zu lassen.

Die Gleichungen der Stromlinien lauten

$$ar^2(h - z) = \text{const}.$$

Die Stromlinien sind also algebraische Kurven dritten Grades. Um den beabsichtigten Stromverlauf zu ermöglichen, muß man jedenfalls die Meridiankurve der Rohrwand mit einer dieser Kurven zusammenfallen lassen. Außerdem muß auch noch dafür gesorgt werden, daß das Wasser an beiden Rohrenden mit den von der Lösung verlangten Geschwindigkeiten zu- und abgeführt wird. — Auf weitere Einzelheiten gehe ich hier nicht ein; ich bemerke nur, daß man auch noch eine Anzahl weiterer Lösungen der partiellen Differentialgleichung (435) anzugeben vermag, von denen ein ähnlicher Gebrauch gemacht werden kann.

§ 67. Die Zwangsbeschleunigungen.

Ein wichtiger Fortschritt der von Prasil zuerst angebahnten neueren Turbinentheorie wurde von Professor H. Lorenz in Danzig durch die Aufstellung und Verwendung des Begriffes der sogenannten „Zwangsbeschleunigungen" herbeigeführt. Es handelt sich dabei um einen Kunstgriff, dessen Zulässigkeit anfänglich viel bestritten wurde, weil er auf Mißverständnisse stieß, der aber ganz wohl begründet ist.

Man betrachte die Wasserbewegung im Laufrade einer Turbine, etwa einer Francis-Turbine, die in der neueren Technik hauptsächlich angewendet wird. Das Laufrad der Turbine drehe sich um eine lotrechte Achse und die Kanäle seien alle gleichmäßig und voll beaufschlagt. In jedem Kanale ist die Wasserbewegung dieselbe wie in jedem anderen und da die Zahl der Kanäle groß ist, kann man sagen, daß wenigstens ungefähr die Bewegung ringsum symmetrisch um die Umdrehungsachse ist. Trotzdem sind aber die Voraussetzungen des vorigen Paragraphen nicht streng erfüllt und sie können es auch gar nicht sein. Innerhalb jedes Kanals ist nämlich die Symmetrie um die Umdrehungsachse gestört; namentlich aber findet man infolgedessen beim Übergange aus einem Kanale in den benachbarten nicht genau den gleichen Bewegungszustand in der unmittelbaren Nachbarschaft der Wand zu beiden Seiten vor, wie es bei einer ringsum streng symmetrischen Flüssigkeitsbewegung sein müßte. Mit der Dicke der Schaufel hat dies übrigens nichts zu tun. Wenn man sich die Schaufel unendlich dünn vorstellt, so behält sie immer noch die Bedeutung einer Unstetigkeitsfläche, bei deren Überschreitung die Geschwindigkeit und der Druck einen plötzlichen Sprung erfahren. Daß der Druck diesen Sprung jedenfalls erfahren muß, wenn die Turbine ihren Zweck erfüllen soll, ergibt sich sofort aus der Überlegung, daß gerade diese Druckunterschiede zu beiden Seiten der Schaufel das Laufrad in Bewegung erhalten und daß von ihnen die Arbeit geleistet wird, die von der Turbine nach außen hin abgegeben wird.

Um nun der Vereinfachungen nicht verlustig zu gehen, die eine achsensymmetrische Bewegung auszeichnen, kann man an Stelle der wirklichen Bewegung eine ideale setzen, die sich ihr möglichst eng anschließt. Zu diesem Zwecke denke man sich zunächst die Zahl der Schaufeln oder vielmehr der Unstetigkeitsflächen, die sie zu vertreten haben, unendlich groß. Je weiter wir mit der Vermehrung der Schaufelzahl gehen, desto geringer wird der Sprung sowohl der Geschwindigkeit als des Druckes, der mit der Überschreitung einer Unstetigkeitsfläche verbunden ist, also schließlich unendlich klein. Soweit es sich um die Geschwindigkeit handelt, verliert damit die Schaufelfläche die Bedeutung einer Unstetigkeitsfläche und behält nur noch die Bedeutung einer Stromfläche der Relativbewegung des Wassers gegeu den Raum des Schaufelrades. Zugleich freilich geht die stetige Strömung, die wir auf diese Weise erhalten, in eine wirbelbehaftete über. Bei endlicher Schaufelzahl und Unstetigkeitsflächen haben wir die Bewegung innerhalb jedes Kanals als wirbelfrei anzusehen, während die Unstetigkeitsfläche wegen des zu beiden Seiten bestehenden Geschwindigkeitsunterschiedes eine Wirbelfläche bildet. Wenn die Zahl der Schaufelflächen unbegrenzt vermehrt wird, verteilt sich der vorher nur in einzelnen Flächen vereinigte Wirbel schließlich gleichmäßig über die ganze strömende Flüssigkeit.

Nicht so einfach werden wir mit der Unstetigkeit des Druckes an den Schaufelflächen fertig. Wenn wir die Wasserbewegung in der Turbine durch eine Flüssigkeitsströmung ersetzen wollen, in der keine trennenden Wände mehr vorkommen, die Schaufelflächen also nur noch die Bedeutung von Relativstromflächen behalten sollen, muß der Druck zu beiden Seiten der Stromflächen gleich groß sein, d. h. $\frac{\partial p}{\partial \psi}$ muß gleich Null sein. Durch die Vermehrung der Schaufelzahl allein kann dies aber, wie wir vorher sahen, nicht erreicht werden. Um dem abzuhelfen, kann man sich nun die ideelle Flüssigkeitsströmung einer äußeren Massenkraft unterworfen denken, die bei der wirklich vorhandenen Turbine fehlt und die willkürlich zugefügt wird, gerade so, wie etwa eine d'Alembertsche Trägheits-

kraft zugefügt wird, um eine Aufgabe auf eine andere mit ihr verwandte zurückzuführen. Die einzige Bedingung, der wir diese hinzuzufügende Massenkraft zu unterwerfen haben, besteht darin, daß die Strömung unter ihrer Mitwirkung in dem nicht mehr durch undurchdringliche Wände unterbrochenen Raume gerade so erfolgt, wie in der Turbine mit unendlicher Schaufelzahl, bei der jede Schaufel einen unendlich kleinen Druckunterschied aufzunehmen hat, der jetzt durch die zugefügte Massenkraft ersetzt wird.

Da dieser ganz richtige und sehr fruchtbare Gedanke von Lorenz so viele Anfechtungen erfahren hat, halte ich es für nützlich, zur besseren Erläuterung noch den folgenden Vergleich anzustellen. Man betrachte einen gewichtslosen Faden, an dem in gleichen Abständen kleine Bleikugeln befestigt sind. Hängt man diesen Faden an beiden Enden auf, so bildet er ein Seilpolygon. Wenn die Zahl der Bleikugeln groß ist, wird sich das Seilpolygon nicht viel von einer Kurve unterscheiden. Diese Kurve findet man, indem man sich die Bleikugeln entfernt und ihr Gewicht gleichmäßig über die Fadenlänge verteilt denkt. An Stelle der unstetigen Belastung, die man entfernt, bringt man also eine stetig verteilte Massenkraft an, die vorher fehlte. Genau derselbe Gedanke ist es, der auch dem Lorenzschen Ansatze zugrunde liegt.

Da die Zwangskräfte die Druckunterschiede an den Schaufeln ersetzen, diese aber bei Vernachlässigung der Flüssigkeitsreibung senkrecht zu den Schaufelflächen stehen, folgt, daß auch die Zwangskräfte jedenfalls senkrecht zu diesen Flächen angenommen werden müssen.

Daß Lorenz nicht von „Zwangskräften“ redet, wie ich es hier der besseren Anschaulichkeit wegen getan habe, sondern von „Zwangsbeschleunigungen“, ist natürlich ganz unwesentlich. Aus den Zwangsbeschleunigungen findet man die Massenkräfte, von denen vorher die Rede war, durch Multiplikation mit der auf die Raumeinheit bezogenen Masse.

Wir sind demnach berechtigt, die Formeln des vorhergehenden Paragraphen ohne weiteres auf die Flüssigkeitsbewegung

im Laufrade der Turbine anzuwenden, wenn wir unter den P_z, P_r, P_t die Komponenten der Resultierenden aus der tatsächlich vorhandenen Massenkraft, also dem Gewichte und der willkürlich zugefügten Zwangskraft verstehen, mit dem Vorbehalte, daß die Zwangskraft nachträglich so gewählt werden muß, daß die verlangte Bewegung herauskommt. Übrigens kommt das Gewicht wegen der lotrechten Stellung der Z-Achse nur in P_z als Anteil vor.

Die Zwangskräfte müssen wir uns von den Schaufelflächen ausgehend denken, da diese es sind, die die besondere Bewegung der Flüssigkeit erzwingen. Die Reaktionen der Zwangskräfte greifen daher an dem Schaufelrade an und liefern das die Turbine umtreibende Kräftepaar. Um das Moment dieses Kräftepaars zu berechnen, wählen wir die Umdrehungsachse als Momentenachse. Die Momente von P_z und P_r verschwinden für diese Achse und für das Moment M erhalten wir

$$M = \int P_t r\, d\tau, \tag{437}$$

wenn unter $d\tau$ ein Volumenelement verstanden und die Integration über den ganzen, von der Flüssigkeit durchströmten Raum des Schaufelrades ausgedehnt wird. Für P_t kann man den aus der dritten der Gleichungen (432) hervorgehenden Wert

$$P_t = \frac{\gamma}{g}\left(v_z \frac{\partial v_t}{\partial z} + \frac{v_r}{r}\frac{\partial (v_t r)}{\partial r}\right) \tag{428}$$

einsetzen, womit der Ausdruck für M übergeht in

$$M = \frac{\gamma}{g}\int\left(v_z \frac{\partial (v_t r)}{\partial z} + v_r \frac{\partial (v_t r)}{\partial r}\right) d\tau, \tag{439}$$

der sich auch noch auf verschiedene Weise umformen läßt. Führt man mit Hilfe der Gleichungen (433) die Wirbelkomponenten ein, so erhält man

$$M = \frac{\gamma}{Q}\int (v_z w_r - v_r w_z) r\, d\tau. \tag{440}$$

In dieser Form läßt die Gleichung erkennen, daß die Strömung notwendig mit Wirbeln behaftet sein muß, wenn ein Drehmoment M herauskommen soll. Auf den „Ringwirbel", d. h. auf die tangentiale Komponente w_t des Wirbelvektors,

kommt es dabei übrigens nicht an. Lorenz schließt auf Grund einer Überlegung, der ich jedoch nicht beizutreten vermag, daß der Ringwirbel w_t überhaupt gleich Null zu setzen sei. Daraus folgert er dann, daß die Stromfunktion Ψ der partiellen Differentialgleichung (435) genügen müsse. In den auf Gl. (435) folgenden Bemerkungen war ja auch schon darauf hingewiesen worden, daß das Verschwinden des „Ringwirbels" in der Tat zu dieser Gleichung führt, auch wenn w_r und w_z von Null verschieden sind. — Ich will aber hier dahingestellt sein lassen, ob es in der Tat richtig ist, w_t allgemein oder auch nur in dem besonderen Falle der Francis-Turbine gleich Null zu setzen.

Zu einer anderen Form der Gleichung für das Moment M gelangt man durch die folgende Überlegung. Man betrachte den Drall der Wassermasse bezogen auf die Umdrehungsachse als Momentenachse. Die im Volumenelemente $d\tau$ enthaltene Masse liefert dazu den Beitrag

$$\frac{\gamma}{g}\, d\tau \cdot v_t r,$$

da das Moment der beiden anderen Geschwindigkeitskomponenten v_z und v_r für die Umdrehungsachse verschwindet. Der Drall der ganzen im Laufrade befindlichen Wassermasse wird daraus durch eine Integration über alle $d\tau$ gefunden. Dieser Drall ist in jedem späteren Augenblicke ebenso groß wie in einem vorhergehenden, wenn er jedesmal für die gerade im Laufrade befindlichen Wassermassen berechnet wird. Etwas anderes ist es aber, wenn man nach der Änderung fragt, die der Drall der etwa zur Zeit $t = 0$ im Laufrade enthaltenen Wassermassen in einem darauf folgenden Zeitteilchen erfährt. Bezeichnen wir den Drall mit B und den in diesem Sinne genommenen Differentialquotienten mit $\frac{dB}{dt}$, so ist nach dem Flächensatz

$$M = \frac{dB}{dt}$$

oder, wenn man den Wert von B einsetzt,

$$M = \frac{\gamma}{g} \int \frac{d}{dt}(v_t r)\, d\tau. \tag{441}$$

Beachtet man aber, daß auf Grund der Überlegung, die bereits bei der Ableitung der Gleichungen (422) angestellt wurde,

$$\frac{d}{dt}(v_t r) = v_z \frac{\partial (v_t r)}{\partial z} + v_r \frac{\partial (v_t r)}{\partial r}$$

gesetzt werden kann, so erkennt man, daß Gl. (439) auch als gleichbedeutend mit der unmittelbar aus dem Flächensatze hergeleiteten Gl. (441) anzusehen ist. Soweit es sich nur um das übrigens sehr wichtige, durch Gl. (441) dargestellte Ergebnis handelt, wäre daher die ganze hydrodynamische Betrachtung entbehrlich gewesen; in der Tat ist dieses Ergebnis auch schon in Bd. IV, § 21, S. 162 der 3. Aufl. vorweg genommen worden.

§ 68. Relativbewegung der Flüssigkeit gegen das Schaufelrad.

Man könnte die hydrodynamischen Gleichungen für die Relativbewegung aus den für den absoluten Raum geltenden durch Zufügung der Ergänzungskräfte der Relativbewegung ableiten. Aber das wäre ein Umweg. In § 7 haben wir uns bereits davon überzeugt, daß man auf diesem Wege genau zu denselben Bewegungsgleichungen gelangt, die man auch viel einfacher durch eine hier sehr leicht auszuführende Koordinatentransformation erlangt. Als relative Koordinaten verwenden wir wie damals z, r, φ. Dabei stimmen z und r mit den gleichbezeichneten, auf den festen Raum bezogenen Größen überein, während zwischen φ und ψ die Beziehung besteht

$$\psi = \varphi + ut. \tag{442}$$

Die Relativgeschwindigkeiten bezeichnen wir durch Beifügung eines Striches zu den sich auf den festen Raum beziehenden Bezeichnungen. Dann ist

$$v_z = v_z', \quad v_r = v_r', \quad v_t = v_t' + ur. \tag{443}$$

Wir stellen zunächst fest, welche Änderungen die Ausdrücke für die Wirbelkomponenten erfahren. Diese werden für die Relativbewegung durch dieselbe Rechenvorschrift aus den Relativgeschwindigkeiten gefunden, wie früher bei der absoluten

Bewegung. Für die stationäre und achsensymmetrische Relativbewegung erhalten wir daher nach Maßgabe der Gleichungen (433)

$$w_z' = -\frac{1}{r}\frac{\partial(v_t' r)}{\partial r},$$

$$w_r' = \frac{\partial v_t'}{\partial z},$$

$$w_t' = \frac{\partial v_z'}{\partial r} - \frac{\partial v_r'}{\partial z}.$$

Drücken wir hierin die Relativgeschwindigkeiten mit Hilfe der vorhergehenden Gleichungen in den Absolutgeschwindigkeiten aus, so finden wir

$$w_z' = w_z + 2u, \quad w_r' = w_r, \quad w_t' = w_t. \tag{444}$$

Hiernach unterscheidet sich nur die achsiale Wirbelkomponente um $2u$ von der auf den absoluten Raum bezogenen. Hätte ich, wie es sonst gewöhnlich geschieht, nur die Hälfte der w als Maß für die Stärke des Wirbels benutzt, so würde der Unterschied gleich der Winkelgeschwindigkeit u selbst sein.

Ersetzen wir ferner die Geschwindigkeitskomponenten in den übrigen Gleichungen von § 66 durch ihre in den Gleichungen (443) gegebenen Werte, so erhalten wir die Kontinuitätsgleichung in der mit Gl. (430) übereinstimmenden Form

$$\frac{\partial(v_z' r)}{\partial z} + \frac{\partial(v_r' r)}{\partial r} = 0 \tag{445}$$

und die Gleichungen (432) gehen über in

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\gamma}{g}\left(v_z'\frac{\partial v_z'}{\partial z} + v_r'\frac{\partial v_z'}{\partial r}\right) &= \gamma + P_z - \frac{\partial p}{\partial z}\\
\frac{\gamma}{g}\left(v_z'\frac{\partial v_r'}{\partial z} + v_r'\frac{\partial v_r'}{\partial r} - \frac{(v_t' + ur)^2}{r}\right) &= P_r - \frac{\partial p}{\partial r}\\
\frac{\gamma}{g}\left(v_z'\frac{\partial v_t'}{\partial z} + v_r'\frac{\partial v_t'}{\partial r} + \frac{v_r' v_t'}{r} + 2v_r' u\right) &= P_t
\end{aligned}\right\}. \tag{446}$$

In der ersten Gleichung ist dabei das Gewicht γ der Volumeneinheit besonders herausgehoben, so daß unter P_z, P_r, P_t jetzt nur noch die Komponenten der Lorenzschen Zwangskraft zu verstehen sind.

An der Stromfunktion Ψ und den Gleichungen (434) wird durch den Übergang zur Relativbewegung nichts geändert.

Multipliziert man die Gleichungen (446) der Reihe nach mit v_s', v_r' und v_t' und addiert sie hierauf, so erhält man eine Gleichung, die die Veränderlichkeit des Druckes innerhalb eines Stromfadens kennen lehrt. Schreibt man nämlich zur Abkürzung

$$v'^2 = v_s'^2 + v_r'^2 + v_t'^2,$$

versteht also unter v' den Absolutbetrag der Relativgeschwindigkeit und beachtet, daß

$$P_s v_s' + P_r v_r' + P_t v_t' = 0$$

ist, weil die Zwangskraft, wie wir schon früher feststellten, senkrecht zur Schaufelfläche, also auch senkrecht zur Relativgeschwindigkeit steht, so läßt sich die auf dem angegebenen Wege abgeleitete Gleichung nach geeigneter Zusammenziehung der Glieder schreiben

$$\frac{1}{2}\frac{\gamma}{g}\left(v_s' \frac{\partial v'^2}{\partial z} + v_r' \frac{\partial v'^2}{\partial r}\right) - \frac{\gamma}{g} v_r' u^2 r = \gamma v_s' - v_s' \frac{\partial p}{\partial z} - v_r' \frac{\partial p}{\partial r}.$$

Führen wir für die relative lebendige Kraft, bezogen auf die Volumeneinheit, die Beziehung L' ein, setzen also

$$L' = \frac{1}{2}\frac{\gamma}{g} v'^2$$

und bezeichnen mit dem Differentialzeichen d den Zuwachs, den die betreffende Größe beim Fortschreiten längs einer Stromlinie erfährt, so lautet die vorhergehende Gleichung

$$\frac{dL'}{dt} - \frac{\gamma}{g} v_r' u^2 r = \gamma v_s' - \frac{dp}{dt},$$

wofür man auch kürzer

$$dp + dL' - \frac{\gamma}{g} u^2 r dr - \gamma dz = 0$$

schreiben kann, woraus man durch eine Integration

$$p + L' - \frac{\gamma}{g}\frac{u^2 r^2}{2} - \gamma z = C \tag{447}$$

erhält. Eine solche Gleichung gilt für jede Stromlinie; die Integrationskonstante hat indessen für jede Stromlinie im allgemeinen einen anderen Wert.

Übrigens hätte zur Ableitung von Gl. (447) auch schon dieselbe einfache Überlegung genügt, die bereits in Band I, § 58 der 3. Aufl. zur Untersuchung der Veränderlichkeit des Druckes längs eines Stromfadens verwendet wurde. Mit der dort auf S. 365 abgeleiteten Gl. (139) stimmt nämlich Gl. (447) im wesentlichen überein, abgesehen davon, daß jetzt noch ein weiteres Glied hinzugetreten ist, das der Arbeit der Zentrifugalkraft entspricht.

§ 69. Die Strömungsaufgabe der Turbinentheorie.

Die nächstliegende Aufgabe der Theorie besteht in der Ermittelung der Flüssigkeitsbewegung in einer Turbine, deren Schaufelflächen gegeben sind. Als letztes Ziel aller dieser Betrachtungen gilt freilich gerade die Ermittelung der besten Form für diese Schaufelflächen und die bisherigen Arbeiten gingen darauf hinaus, dieses Ziel unmittelbar zu erreichen. Aber mir scheint, daß man damit nicht auf dem richtigen Wege war. Um so vorgehen zu können, mußte man nämlich willkürliche oder nicht genügend begründete Annahmen über die Art der Flüssigkeitsströmung machen, also anstatt die Lösung der hier gestellten Aufgabe ernstlich zu versuchen, vermutungsweise eine Lösung voraussetzen, von der ich aber nachweisen werde, daß sie wenig Zutrauen verdient. In der Tat wird man erst dann zu einer stichhaltigen Entscheidung über die beste Schaufelform gelangen können, wenn man zuerst nicht auf Grund unbewiesener Annahmen, sondern als Ergebnis einer eingehenderen Betrachtung anzugeben vermag, wie die Wasserbewegung ausfällt, die durch eine beliebig gegebene Schaufelform hervorgebracht wird.

Mit dieser Aufgabe werde ich mich hier ausschließlich beschäftigen. Ich muß freilich hinzufügen, daß es mir nicht möglich sein wird, sie allgemein und vollständig zu lösen. Ich muß mich vielmehr damit begnügen, eine ziemlich ver-

wickelte Differentialgleichung aufzustellen, von der diese Lösung abhängt. Die vollständige Lösung wird sich nur für einzelne einfachere Fälle daraus finden lassen.

Die Gestalt einer der Schaufelflächen mag analytisch durch eine Gleichung zwischen den Koordinaten

$$\Omega(z, r, \varphi) = 0 \tag{448}$$

gegeben sein. Zieht man vom Punkte z, r, φ aus ein Linienelement auf der Fläche in beliebiger Richtung, das zu den Koordinatenzuwüchsen $dz, dr, d\varphi$ führt, so gilt die vorhergehende Gleichung auch für die Koordinaten des Endpunktes und als Bedingung dafür, daß das Linienelement auf der Fläche enthalten ist, hat man daher die Gleichung

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} dz + \frac{\partial \Omega}{\partial r} dr + \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} d\varphi = 0.$$

Insbesondere gilt daher auch eine Gleichung von dieser Form für die Komponenten der Relativgeschwindigkeit, nämlich

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} v_z' + \frac{\partial \Omega}{\partial r} v_r' + \frac{\partial \Omega}{r \partial \varphi} v_t' = 0.$$

Für die weitere Untersuchung wird es aber in der Regel vorzuziehen sein, Gl. (448) nach vorhergehender Auflösung nach φ auf die Form

$$F(z, r) + \varphi + \alpha = 0 \tag{449}$$

zu bringen, worin F eine bekannte Funktion von z und r allein und die Konstante α einen sogenannten Parameter bedeutet, nämlich eine Konstante, die verschieden gewählt werden kann, so daß jeder Wahl eine dadurch näher bestimmte Schaufelfläche entspricht und zwar jedem zwischen 0 und 2π liegenden Werte von α eine andere. Hiermit gehen die vorhergehenden Gleichungen über in

$$\frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial r} dr + d\varphi = 0. \tag{450}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} v_z' + \frac{\partial F}{\partial r} v_r' + \frac{v_t'}{r} = 0. \tag{451}$$

Drückt man die achsiale und die radiale Geschwindigkeitskomponente nach den Gleichungen (434) in der Stromfunktion Ψ aus, nämlich

$$v_z' = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r}, \qquad v_r' = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

so erhält man durch Einsetzen dieser Werte in Gl. (451)

$$v_t' = \frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial r}. \tag{452}$$

Hiermit sind alle Geschwindigkeitskomponenten in der Stromfunktion ausgedrückt und die Lösung unserer Strömungsaufgabe kommt daher darauf hinaus, diese Stromfunktion Ψ zu ermitteln.

In § 66 wurde schon erwähnt, daß Ψ der Differentialgleichung (435)

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0$$

genügen muß, wenn man voraussetzen darf, daß der Ringwirbel w_t oder auch, was nach den Gleichungen (444) auf dasselbe hinauskommt, die tangentiale Komponente w_t' des Relativwirbels verschwindet. Sowohl Prasil als Lorenz haben bei ihren Untersuchungen diese Annahme entweder willkürlich oder mit unzulänglicher Begründung gemacht, womit für sie die Frage des Stromverlaufs bei gegebener Schaufelform im wesentlichen bereits entschieden war. Aber schon in den auf Gl. (440) S. 437 folgenden Bemerkungen habe ich erklärt, daß ich mich dieser Annahme nicht anzuschließen vermöchte. Ich werde jetzt meinen Widerspruch näher begründen und eine Differentialgleichung für Ψ aufstellen, die meiner Ansicht nach an die Stelle der vorstehenden gesetzt werden muß.

Zu diesem Zwecke greife ich auf die einleitenden Betrachtungen von § 67 zurück. Dort wurde ausgeführt, daß die Absolutbewegung des Wassers in jedem Kanale und zwar sowohl des feststehenden Leitrades als des umlaufenden Schaufelrades zum mindesten näherungsweise als wirbelfrei anzusehen ist. Und zwar gilt dies so lange, als man noch nicht zur Annahme unendlich vieler Schaufeln übergegangen ist. Jede Schaufel ist dabei als eine Unstetigkeitsfläche zu betrachten, die zugleich eine Wirbelfläche ist, indem sie den Sitz von Wirbeln bildet,

die aber nicht ins Innere der durch den Kanal strömenden Flüssigkeit hineinreichen. Nach den Helmholtzschen Wirbelsätzen wäre diese Aussage bei einer endlichen Schaufelzahl sogar als streng gültig zu betrachten, wenn die Flüssigkeit vollkommen reibungsfrei wäre. Wegen der Reibung an der Kanalwand wird nun freilich an die Stelle der Wirbelfläche zunächst eine der Kanalwand entlanglaufende dünne Wirbelschicht treten, die aber für eine hinlänglich genaue Beschreibung des ganzen Vorgangs immer noch durch jene Wirbelfläche vertreten werden kann.

Das gilt zunächst für das Leitrad. In dem umlaufenden Schaufelrade kommt noch hinzu, daß sich jede bereits im Leitrade ausgebildete Wirbelfläche in das Laufrad hinein fortsetzt. Wegen des stetigen Anschlusses verlaufen aber auch diese Wirbelflächen zum mindesten ungefähr parallel mit den Schaufelflächen.

Sobald man nun zur Vereinfachung der theoretischen Darstellung die Schaufelzahl unbegrenzt vermehrt und damit die Flüssigkeitsbewegung auf eine stetige und achsensymmetrische zurückführt, rücken die Wirbelflächen und die ihnen entsprechenden Wirbelschichten immer dichter zusammen und die ideelle Flüssigkeitsbewegung, zu der man durch diesen Grenzübergang gelangt, ist daher notwendig mit Wirbeln behaftet. Das hat Lorenz schon vollständig klar erkannt und auch noch ausdrücklich nachgewiessn. Dagegen hat er den weiteren Schluß, der aus dieser Betrachtung ebenfalls folgt, und der meiner Meinung nach der Lösung der Strömungsaufgabe zugrunde gelegt werden muß, nicht mehr gezogen, obschon mir dieser Schluß ganz unvermeidlich und unanfechtbar erscheint. Aus dem vorgenommenen Grenzübergange schließe ich nämlich, daß die Wirbelflächen auch bei der ideellen Flüssigkeitsbewegung mit den Schaufelflächen zusammenfallend anzunehmen sind.[1])

1) Während des Druckes habe ich bemerkt, daß dieser Schluß schon vor mir von Herrn R. v. Mises in einer umfangreichen Abhandlung „Theorie der Wasserräder“ gezogen wurde, die in der Z. f. Math. u. Phys. 57, S. 1, 1909 erschienen ist.

Um dieser Überlegung in Form einer Gleichung Ausdruck zu geben, muß man zwischen der Relativbewegung und der Absolutbewegung des Wassers im Schaufelrade unterscheiden. Was ich vorher ausführte, bezog sich auf die Absolutbewegung. Will man mit der Relativbewegung des Wassers rechnen, so ist zu beachten, daß sich die achsialen Wirbelkomponenten w_z und w_z' um $2u$ voneinander unterscheiden. Man hat daher, wenn man die Relativbewegung verfolgen will, von w_z' diesen Betrag erst abzuspalten und hierauf auszudrücken, daß der übrigbleibende Wirbelvektor überall tangential zu den Schaufelflächen gerichtet sein muß. Das kommt aber auf dasselbe hinaus, als wenn man sofort mit dem auf den festen Raum bezogenen Wirbel rechnet und diesem die Bedingung auferlegt, daß er in jedem Augenblicke tangential zur Schaufelfläche gerichtet ist. Wir erhalten damit die Gleichung

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} w_z + \frac{\partial \Omega}{\partial r} w_r + \frac{\partial \Omega}{r \partial \varphi} w_t = 0$$

oder auch, wenn Ω durch die in Gl. (449) eingeführte Funktion F ersetzt wird,

$$\frac{\partial F}{\partial z} w_z + \frac{\partial F}{\partial r} w_r + \frac{w_t}{r} = 0 . \tag{453}$$

Drückt man nach den Gleichungen (433) die Wirbelkomponenten in den Geschwindigkeitskomponenten der Absolutbewegung aus, so geht die Gleichung über in

$$-\frac{\partial F}{\partial z} \frac{1}{r} \frac{\partial (v_t r)}{\partial r} + \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial v_t}{\partial z} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial z}\right) = 0 . \tag{454}$$

Da nun die Geschwindigkeitskomponenten in der Stromfunktion Ψ ausgedrückt werden können, erhält man damit die gesuchte Differentialgleichung, der die Funktion Ψ genügen muß. Man hat nämlich

$$\left.\begin{aligned} v_z &= v_z' = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \\ v_r &= v_r' = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \\ v_t &= v_t' + ur = ur + \frac{\partial F}{\partial r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{aligned}\right\} . \tag{455}$$

Es hätte keinen Zweck, Gl. (454) nach Einsetzen dieser Werte nochmals von neuem anzuschreiben. Man sieht schon, daß sie zu verwickelt ist, als daß man sie für ein beliebig gegebenes F allgemein lösen könnte. In solchen Fällen bleibt nichts anderes übrig, als sich auf die Untersuchung von einfacheren Sonderfällen zu beschränken.

Als erstes Beispiel dafür betrachte ich ein sogenanntes Radialrad, nämlich ein Rad mit zylindrischen Schaufelflächen, deren gerade Erzeugende parallel zur Umdrehungsachse sind. In diesem Falle wird

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

und Gl. (454) vereinfacht sich zu

$$\left(r^2\left(\frac{dF}{dr}\right)^2 + 1\right)\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0. \qquad (456)$$

Je nach der Gestalt der Schaufel kann F noch eine beliebige Funktion von r sein. Man kann natürlich nachträglich auch umgekekrt danach fragen, wie F gewählt werden muß, damit eine bestimmte Strömung zustande kommt, die durch eine vorgeschriebene Stromfunktion Ψ gekennzeichnet wird.

Als zweites Beispiel betrachte ich den Fall einer schraubenförmigen Schaufelfläche, deren Gleichung in Zylinderkoordinaten, wenn c eine Konstante bedeutet,

$$cz + \varphi + \alpha = 0$$

lautet. Man hat daher in diesem Falle

$$\frac{\partial F}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = c$$

zu setzen und hiermit vereinfacht sich Gl. (454) zu

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + (1 + c^2 r^2)\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r}(1 - c^2 r^2) - 2cur^2 = 0. \qquad (457)$$

Partikuläre Lösungen, aus denen sich nützliche Schlüsse ziehen lassen, werden sich voraussichtlich leicht finden lassen; ich halte mich damit aber jetzt nicht auf.

Schließlich bemerke ich noch, daß es mir bei der Abfassung der letzten Paragraphen nur darauf ankam, den Leser so weit in die Be-

handlungsweise der neueren Turbinentheorie einzuführen, daß er sich ohne Schwierigkeit in die Originalarbeiten vertiefen kann und diesen auch mit einem selbständigen Urteil entgegenzutreten vermag, was auf diesem eben erst noch in der Entwicklung begriffenen Gebiete, auf dem die Meinungen vorläufig noch sehr weit auseinandergehen, besonders nötig ist. Was mir minder wichtig oder noch zweifelhaft erschien, habe ich fortgelassen. Eine Gewähr dafür, daß mir nicht vielleicht auch manches entgangen ist, was eigentlich hierher gehört hätte, vermag ich freilich nicht zu übernehmen, da ich mich mit der Turbinentheorie früher nicht beschäftigt hatte und sie auch jetzt nur so weit, als es mir für die Zwecke dieses Lehrbuchs nötig erschien, durchstudiert habe. — Über mein ursprüngliches Vorhaben bin ich nur im letzten Paragraphen hinausgegangen, da mir eine Berichtigung der bisher über die Strömungsaufgabe geäußerten Ansichten notwendig erschien.

§ 70. Die Bewegungsgleichungen für zähe Flüssigkeiten.

In Band IV, § 54 der 3. Aufl. habe ich bereits die Strömung einer Flüssigkeit in einer Rohrleitung besprochen und dabei auseinandergesetzt, daß man für geringere Geschwindigkeiten, bei denen die „Mischbewegung“ zurücktritt, zu Folgerungen gelangt, die mit der Erfahrung recht gut übereinstimmen, wenn man die Eigenschaft der Zähigkeit durch einen Ansatz zum Ausdruck bringt, wonach Schubspannungen oder innere Reibungen in der fließenden Wassermasse anzunehmen sind, die dem Geschwindigkeitsgefäll an der betreffenden Stelle proportional gesetzt werden. Bildet man diesen Ansatz sinngemäß weiter aus, so daß er sich auf eine in beliebiger Weise bewegte Flüssigkeit bezieht, so gelangt man zu den Bewegungsgleichungen für zähe Flüssigkeiten. Man darf nach den darüber vorliegenden Erfahrungen annehmen, daß diese Gleichungen in allen Fällen, bei denen die Mischbewegung keine merkliche Störung der regelmäßigen Strömung herbeiführt, also namentlich bei kleinen Geschwindigkeiten, die übrigens um so größer werden dürfen, je zäher die Flüssigkeit an sich ist, eine der Wirklichkeit sehr nahe kommende Beschreibung des Strömungsvorganges liefern.

Beim Auftreten von Reibungen ist der Flüssigkeitsdruck nach verschiedenen Richtungen hin verschieden groß. Um die inneren Kräfte in übersichtlicher

Weise zu bezeichnen, greift man daher am besten auf die aus der Festigkeitslehre her bekannte Darstellungsweise zurück. Für das Gleichgewicht eines Volumenelements erhielten wir in Band III, S. 23 der 3. Aufl. die Bedingungsgleichungen

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z = 0.$$

Diese können auch hier sofort verwendet werden, wenn man den σ und τ ihre frühere Bedeutung läßt, unter den τ also die Komponenten der inneren Reibungen versteht. Zugleich ist in die Komponenten der äußeren Massenkraft XYZ die Trägheitskraft mit einzurechnen, die man beifügen muß, um das dynamische Problem auf ein statisches zurückzuführen.

Bei den Aufgaben, die man über die Flüssigkeitsbewegungen mit Berücksichtigung der Zähigkeit zu lösen hat, kommt es gewöhnlich auf die Schwere nicht an. Man fragt vielmehr nur danach, wie sich der Vorgang gestaltet, wenn das Gewicht außer acht gelassen wird. Dann sind unter XYZ nur noch die Komponenten der Trägheitskraft zu verstehen und die vorhergehenden Gleichungen gehen über in

$$\left.\begin{aligned}
\mu \frac{dv_1}{dt} &= \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\
\mu \frac{dv_2}{dt} &= \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \\
\mu \frac{dv_3}{dt} &= \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}
\end{aligned}\right\}. \qquad (458)$$

Diese Gleichungen treten jetzt an die Stelle der Eulerschen Gleichungen (368), wenn man sich die totalen Differentialquotienten der Geschwindigkeitskomponenten $v_1 v_2 v_3$ in derselben Weise ausgedrückt denkt, wie es damals geschehen war. Daß sich das Vorzeichen von $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$ gegenüber dem ihm entsprechenden Gliede $-\frac{\partial p}{\partial x}$ in den Gleichungen (368) umgekehrt hat, rührt

davon her, daß in der Festigkeitslehre Zugspannungen stets positiv gerechnet wurden, während in der Hydrodynamik ein positives p einen Druck bedeutet.

Wir haben jetzt die Annahme über den Zusammenhang zwischen den inneren Reibungen und den Geschwindigkeitsunterschieden, von der vorher die Rede war, durch Gleichungen auszudrücken. Hierbei ist vor allem zu beachten, daß die aus der Festigkeitslehre bekannten Gleichungen zwischen den zugeordneten Schubspannungen

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \qquad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

auch hier unverändert bestehen bleiben. Die innere Reibung τ_{xy} ist zunächst in Zusammenhang zu bringen mit dem Differentialquotienten $\frac{\partial v_2}{\partial x}$, denn v_2 ist gleichgerichtet mit τ_{xy}, und für diese Reibung kommt die Änderung in Betracht, die v_2 erfährt, wenn man in der Richtung der Flächennormalen, also in der Richtung von x weitergeht. Wenn aber eine Reibung τ_{xy} entsteht, so entspricht ihr zugleich eine gleichgroße Reibung τ_{yx} und umgekehrt. Andererseits steht die Reibung τ_{yx} nach unserer Annahme im nächsten Zusammenhange mit dem Differentialquotienten $\frac{\partial v_1}{\partial y}$. Wir erkennen hieraus, daß für den gemeinschaftlichen Wert von τ_{xy} und τ_{yx} beide Differentialquotienten maßgebend sind, und setzen demnach

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} = k\left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x}\right) \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = k\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = k\left(\frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\}. \tag{459}$$

Dieser Ansatz bildet daher nur eine sinngemäße und folgerichtige Ausgestaltung des schon in Band IV bei der Strömung in Röhren gewählten, der zuerst von Newton aufgestellt wurde.

Wenn die Schubspannungen von Null verschieden sind, können die Normalspannungen nicht mehr für alle Schnittrichtungen gleich groß sein. Wir wissen vielmehr bereits aus den in der Festigkeitslehre angestellten Betrachtungen über

das Gleichgewicht an einem Volumenelemente, daß die Ausdrücke für die Normalspannungen von den für die Schubspannungen gegebenen abhängig sind. Anstatt diese Betrachtungen hier von neuem zu wiederholen, ist es am einfachsten, die Beziehungen zwischen den Spannungen durch einen Vergleich mit einem gleichbeschaffenen Spannungszustande in einem deformierten elastischen festen Körper abzuleiten. Dieser Weg empfiehlt sich um so mehr, als dabei zugleich eine sehr anschauliche Darstellung des in der strömenden Flüssigkeit bestehenden Spannungszustandes gewonnen wird.

Man betrachte die Flüssigkeit zur Zeit t und in einem kurz darauf folgenden Augenblicke $t + t_0$. Während der kurzen Zeitdauer t_0 hat sich ein der Flüssigkeit angehöriger materieller Punkt um die Strecken $v_1 t_0$, $v_2 t_0$, $v_3 t_0$ in den Koordinatenrichtungen verschoben. Wir wollen uns nun einen elastischen Körper denken, der im spannungslosen Zustande genau mit der Gestalt der Flüssigkeit zur Zeit t übereinstimmt. Dieser Körper sei einer Gestaltänderung unterworfen, so daß die Verschiebungskomponenten $\xi \eta \zeta$ genau mit den Strecken übereinstimmen, um die sich die entsprechenden Punkte der Flüssigkeit während der Zeitdauer t_0 verschoben hatten. Wir setzen also

$$\xi = v_1 t_0, \quad \eta = v_2 t_0, \quad \zeta = v_3 t_0$$

und fragen nach den Spannungen, die in dem elastischen Körper infolge der angenommenen Gestaltänderung entstehen. Diese Spannungen ergeben sich nach dem Elastizitätsgesetze. Nach den Gleichungen (279) und (283) von Band III, S. 360 der 3. Aufl. hat man dafür die Ausdrücke

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = G t_0 \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x}\right),$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) = G t_0 \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial x}\right),$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = G\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) = G t_0 \left(\frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial y}\right),$$

$$\sigma_x = 2G\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{e}{m-2}\right) = 2Gt_0\frac{\partial v_1}{\partial x},$$

$$\sigma_y = 2G\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{e}{m-2}\right) = 2Gt_0\frac{\partial v_2}{\partial y},$$

$$\sigma_z = 2G\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{e}{m-2}\right) = 2Gt_0\frac{\partial v_3}{\partial z}.$$

Beim Einsetzen der Werte von $\xi\eta\zeta$ in diese Formeln war zu beachten, daß nach der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0$$

ist und daß daher bei dem hier zu untersuchenden Formänderungszustand des elastischen Körpers die kubische Ausdehnung e ebenfalls verschwindet.

Wenn der Schubelastizitätsmodul G des elastischen Körpers beliebig gegeben ist, wird man die Zeit t_0 stets so wählen können, daß

$$Gt_0 = k$$

wird. In diesem Falle stimmen, wie der Vergleich der Formeln lehrt, die Schubspannungskomponenten im elastischen Körper genau mit den inneren Reibungen in der Flüssigkeit überein.

Darum brauchen aber die beiden miteinander verglichenen Spannungszustände noch nicht in allen Stücken übereinzustimmen. Sie können sich noch voneinander unterscheiden in der Art, daß der Unterschied einem Spannungszustande entspricht, für den die Schubspannungen zu Null werden. Und zwar gelten die vorhergehenden Betrachtungen für jede beliebige Richtung der Koordinatenachsen, so daß also auch bei dem Differenz-Spannungszustande die Schubspannungen für jede Schnittrichtung verschwinden müssen. Dann muß aber jede Schnittrichtung eine Hauptschnittrichtung und jede Spannung eine Hauptspannung sein, d. h. der gesuchte Differenz-Spannungszustand kann nur in einer nach allen Richtungen hin gleichen Flüssigkeitspressung p bestehen oder in einem Zustande der Zugspannung, wie er daraus hervorgeht, wenn man p negativ setzt.

Auf Grund dieser Betrachtungen vermögen wir jetzt auch die Ausdrücke für die Normalspannungen in der zähen Flüssigkeit aus den für den elastischen Körper gültigen herzuleiten, indem wir das Glied $-p$ hinzufügen und Gt_0 wiederum durch k ersetzen. Damit erhalten wir

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= -p + 2k\frac{\partial v_1}{\partial x}\\ \sigma_y &= -p + 2k\frac{\partial v_2}{\partial y}\\ \sigma_z &= -p + 2k\frac{\partial v_3}{\partial z}\end{aligned}\right\}. \tag{460}$$

Die Bedeutung von p folgt hieraus leicht durch Addition der drei Gleichungen unter Beachtung der Kontinuitätsbedingung; man erhält nämlich

$$p = -\frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3},$$

d. h. p ist der arithmetische Mittelwert des Flüssigkeitsdruckes auf irgend drei zueinander senkrecht stehende Schnittflächen. Die Glieder, die zu $-p$ hinzutreten, geben demnach die Abweichungen des Spannungszustandes in der bewegten zähen Flüssigkeit von der nach allen Seiten hin gleichen Pressung einer dafür an die Stelle gesetzten reibungsfreien Flüssigkeit an.

Auch die Arbeiten, die von den Spannungskomponenten an der Oberfläche eines Raumelements bei der vorher betrachteten Formänderung der Flüssigkeit geleistet werden, können im wesentlichen nach derselben Formel berechnet werden wie die Formänderungsarbeit am elastischen Körper. Man muß nur beachten, daß bei den Formeln der Festigkeitslehre für die Formänderungsarbeit überall der Faktor $\frac{1}{2}$ zu dem Produkt aus Kraft und zugehöriger Verschiebung beizufügen ist, weil die Kraft erst allmählich und proportional mit der Verschiebung anwächst, während bei der Bewegung der zähen Flüssigkeit die Spannungen bei der ganzen in der kurzen Zeit t_0 erfolgenden Formänderung ihre Werte von Anfang an entweder ganz oder doch nahezu unverändert beibehalten. Die Gestaltänderungsarbeit in der zähen Flüssigkeit ist daher doppelt so

groß als die Formänderungsarbeit, die bei den Verschiebungen $\xi \eta \zeta$ im elastischen Körper aufgespeichert wird. Natürlich bedeutet die Gestaltänderungsarbeit für die Flüssigkeit keine aufgespeicherte mechanische Energie, sondern einen Verlust an mechanischer Energie, indem diese durch die Reibungen in Wärme verwandelt wird.

Wenn $k = 0$ ist, wird die Arbeit der Spannungen an jedem Raumelemente zu Null, d. h. in der reibungsfreien Flüssigkeit kann keine mechanische Energie verloren gehen. Man kann daher eine vollkommene Flüssigkeit auch geradezu durch die Eigenschaft definieren, daß in ihr keine mechanische Energie in Wärme verwandelt werden kann. Aber selbst bei einer Flüssigkeit mit noch so kleiner Reibung hört dieser Satz auf, auch nur näherungsweise gültig zu sein, wenn Mischbewegungen vorkommen. Denn bei einer Mischung von Flüssigkeitsteilchen, die verschiedene Geschwindigkeiten mitbringen, gleicht sich die Geschwindigkeit nach dem Schwerpunktssatze aus und damit ist allemal ein Verlust an lebendiger Kraft verbunden, von derselben Größe wie beim Stoße starrer Körper in der ersten Stoßperiode, da ja hierbei in der Tat auch nur der Geschwindigkeitsausgleich nach dem Schwerpunktssatze für den Verlust an lebendiger Kraft maßgebend ist. Die Mitwirkung einer, wenn auch nur sehr kleinen, Flüssigkeitsreibung ist übrigens zur Herbeiführung eines Geschwindigkeitsausgleichs der sich mischenden Flüssigkeitsteilchen auf jeden Fall erforderlich.

Setzt man die Werte für die Spannungskomponenten in die erste der Gleichungen (458) ein, so erhält man

$$\mu \frac{dv_1}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + k\left(2\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial z}\right).$$

Nach der Kontinuitätsgleichung ist aber

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0$$

und daher auch

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial z} = 0.$$

Hiernach heben sich in der Klammer der vorhergehenden Gleichung drei Glieder gegeneinander fort. Mit Einführung des Zeichens ∇^2 für die Laplacesche Operation läßt sich daher die Gleichung schreiben

$$\mu \frac{d v_1}{d t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + k \nabla^2 v_1 . \tag{461}$$

Entsprechende Gleichungen gelten auch für die anderen Koordinatenrichtungen. Setzt man noch für die Beschleunigungskomponenten ihre ausführlicher angegebenen Werte ein, so erhält man die Bewegungsgleichungen für zähe Flüssigkeiten, um deren Ableitung es sich hier handelt, in der Form

$$\left.\begin{aligned}
\mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + k \nabla^2 v_1 \\
\mu\left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + k \nabla^2 v_2 \\
\mu\left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + k \nabla^2 v_3
\end{aligned}\right\} . \tag{462}$$

Mit $k = 0$ umfassen diese Gleichungen zugleich die Eulerschen für die reibungsfreie Flüssigkeit. Mann kann auch alle drei Gleichungen in eine einzige Vektorgleichung zusammenfassen, wie es früher mit den Eulerschen Gleichungen in Gl. (229), S. 378 der 3. Aufl. des 4. Bandes geschehen war. Diese Gleichung lautet hier

$$\mu\left(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v} \nabla)\, \mathfrak{v}\right) = -\nabla p + k \nabla^2 \mathfrak{v} \tag{463}$$

Wegen der verwickelten Gestalt dieser Gleichungen macht die Lösung von Aufgaben über die Bewegung zäher Flüssigkeiten weit mehr Schwierigkeiten, als die Lösung der entsprechenden Aufgaben für reibungsfreie Flüssigkeiten. Um *diese Schwierigkeiten zu vermindern, begnügt man sich meist damit, den Bewegungsvorgang nur unter der Voraussetzung zu untersuchen, daß die Geschwindigkeiten sehr klein seien.* Diese Einschränkung hat zugleich den Vorteil, daß der störende Einfluß der Mischbewegungen dadurch um so sicherer ausgeschlossen wird.

Denkt man sich $\mathfrak{v}$ in der Grenze unendlich klein, so wird das Glied $(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{v}$ in der vorhergehenden Gleichung von der zweiten Ordnung klein, so daß es gegenüber den im allgemeinen nur von der ersten Ordnung kleinen Gliedern $\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t}$ und $\nabla^2\mathfrak{v}$ vernachlässigt werden kann. Die Gleichung lautet dann

$$\mu \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} = -\nabla p + k\nabla^2\mathfrak{v}.$$

Ist die Bewegung überdies auch noch stationär, so fällt die linke Seite ganz fort und man erhält

$$k\nabla^2\mathfrak{v} = \nabla p, \tag{464}$$

wozu noch die Kontinuitätsgleichung kommt. Bei dieser Gleichung ist daher der auf die Beschleunigung entfallende Teil des Druckgefälles gegenüber dem für die Überwindung der Reibungen erforderlichen vernachlässigt. Ausführlicher angeschrieben zerfällt Gl. (464) in die drei Komponentengleichungen

$$k\nabla^2 v_1 = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad k\nabla^2 v_2 = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad k\nabla^2 v_3 = \frac{\partial p}{\partial z}. \tag{465}$$

Differentiiert man diese drei Gleichungen der Reihe nach nach xyz und addiert, so erhält man mit Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung

$$\nabla^2 p = 0. \tag{466}$$

Da p der einfachen Laplaceschen Gleichung genügt, vermag man beliebig viele partikuläre Lösungen dafür leicht anzugeben. Der Strömungszustand, der einer solchen Annahme entspricht, ist dann aus den Gleichungen (465) abzuleiten.

§ 71. Anwendungen.

Eine der bekanntesten Anwendungen der im vorhergehenden Paragraphen aufgestellten Gleichungen bezieht sich auf die langsame Bewegung einer Kugel in einer zähen Flüssigkeit. Diese Untersuchung schließt sich eng an die schon in Band IV, § 53 der 3. Aufl. für die Bewegung einer Kugel in einer vollkommenen Flüssigkeit durchgeführte an. Wie damals denken wir uns, um auf eine gleichwertige statio-

näre Strömung zu kommen, auch jetzt wieder die Kugel an ihrem Platze festgehalten, während die Flüssigkeit um sie herumströmt. Die Kraft, die zum Festhalten erforderlich ist, gibt dann zugleich den Widerstand an, den die Kugel bei gleichförmiger Bewegung in der in größeren Abständen von ihr ruhenden Flüssigkeit findet.

Die Lösung wird durch die folgenden Ausdrücke für die Geschwindigkeitskomponenten angegeben

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{3}{4}\, a\, \frac{\varrho x z}{r^3}\left(\frac{\varrho^2}{r^2} - 1\right) \\ v_2 &= \frac{3}{4}\, a\, \frac{\varrho y z}{r^3}\left(\frac{\varrho^2}{r^2} - 1\right) \\ v_3 &= \frac{3}{4}\, a\, \frac{\varrho z^2}{r^3}\left(\frac{\varrho^2}{r^2} - 1\right) + a - a\,\frac{\varrho}{4r}\left(\frac{\varrho^2}{r^2} + 3\right) \end{aligned}\right\}. \tag{467}$$

Für alle Punkte auf der Oberfläche der Kugel vom Halbmesser ϱ, also für $r = \varrho$ verschwinden diese Geschwindigkeitskomponenten. Für $r = \infty$ verschwinden v_1 und v_2, während $v_3 = a$ wird, d. h. die Flüssigkeit bewegt sich in größerer Entfernung von der Kugel parallel zur Z-Achse mit der Geschwindigkeit a. Für die Differentialquotienten der Komponenten $v_1 v_2 v_3$ erhält man

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x} &= \frac{3}{4}\, a \varrho z\left(\frac{\varrho^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} - 5\,\frac{x^2}{r^7}\,\varrho^2 + 3\,\frac{x^2}{r^5}\right) \\ \frac{\partial v_2}{\partial y} &= \frac{3}{4}\, a \varrho z\left(\frac{\varrho^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} - 5\,\frac{y^2}{r^7}\,\varrho^2 + 3\,\frac{y^2}{r^5}\right) \\ \frac{\partial v_3}{\partial z} &= \frac{3}{4}\, a \varrho z\left(\frac{3\varrho^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} - 5\,\frac{z^2}{r^7}\,\varrho^2 + 3\,\frac{z^2}{r^5}\right) \end{aligned}\right\}. \tag{468}$$

Addiert man die drei Werte zueinander, so erhält man Null; die Kontinuitätsbedingung ist also erfüllt und durch die Gl. (467) wird in der Tat eine geometrisch mögliche Flüssigkeitsbewegung beschrieben, die, wie wir vorher schon sahen, auch die Grenzbedingungen an der Oberfläche der ruhenden Kugel und im Unendlichen erfüllt.

Hierauf sind die Ausdrücke für die Geschwindigkeitskomponenten in die Gleichungen (465) einzusetzen. Zur Aus-

führung der Laplaceschen Operation ∇^2 sind etwas längere Rechnungen erforderlich. Es ergibt sich dabei, daß z. B.

$$\nabla^2 \frac{xz}{r^3} = -\frac{6xz}{r^5}, \quad \nabla^2 \frac{xz}{r^5} = 0, \quad \nabla^2 \left(\frac{1}{r^5}\right) = \frac{20}{r^7}$$

ist. Dieselben Formeln gelten auch bei Vertauschung von x mit y.

Mit Rücksicht hierauf ergibt sich aus den Gleichungen (467)

$$\nabla^2 v_1 = \frac{9}{2} a\varrho \frac{xz}{r^5}, \qquad \nabla^2 v_2 = \frac{9}{2} a\varrho \frac{yz}{r^5},$$

$$\nabla^2 v_3 = \frac{9}{2} a\varrho \frac{z^2}{r^5} - \frac{3}{2} \frac{a\varrho}{r^3}.$$

Trägt man diese Werte in die Gl. (465) ein, so erhält man nach Ausführung der leicht zu bewerkstelligenden Integration

$$p = p_0 - \frac{3}{2} ak\varrho \frac{z}{r^3}. \tag{469}$$

Die Integrationskonstante p_0 bedeutet den Flüssigkeitsdruck in großem Abstande von der Kugel, auf den es aber im übrigen nicht ankommt.

Es fragt sich jetzt nur noch, wie groß der resultierende Druck ist, den die Flüssigkeit auf die ihr im Wege stehende Kugel ausübt. Aus Symmetriegründen muß diese Kraft parallel zur Z-Achse sein. Bezeichnen wir sie mit P, so ist zunächst

$$P = \int dF \cdot p_{nz},$$

wenn mit p_{nz} die Z-Komponente des spezifischen Flüssigkeitsdruckes im Oberflächenelemente dF der Kugel bezeichnet und die Integration über die ganze Kugelfläche erstreckt wird.

Für p_{nz} hat man aber nach Gl. (6), S. 25 von Band III

$$p_{nz} = \sigma_z \cos(nz) + \tau_{xz} \cos(nx) + \tau_{yz} \cos(ny).$$

Dabei kann man die Richtungscosinus der Normalen zur Kugeloberfläche in unserem Falle leicht in den Koordinaten von dF ausdrücken, womit der vorige Ausdruck übergeht in

$$p_{nz} = \frac{z}{\varrho} \sigma_z + \frac{x}{\varrho} \tau_{xz} + \frac{y}{\varrho} \tau_{yz}.$$

Für die Spannungskomponenten σ_z usf. an der Kugeloberfläche findet man aus den Gleichungen (459) und (460), nachdem man in diese die Geschwindigkeitskomponenten aus den Gleichungen (467) eingesetzt und hierauf $r = \varrho$ gemacht hat,

$$\sigma_z = -p_0 + \frac{3ak}{2}\left(\frac{3z}{\varrho^2} - \frac{2z^3}{\varrho^4}\right)$$

$$\tau_{xz} = \frac{3ak}{2}\left(\frac{x}{\varrho^2} - \frac{2xz^2}{\varrho^4}\right)$$

$$\tau_{yz} = \frac{3ak}{2}\left(\frac{y}{\varrho^2} - \frac{2yz^2}{\varrho^4}\right)$$

Hiermit wird endlich

$$P = \frac{1}{\varrho}\int dF\left\{-p_0 z + \frac{3ak}{2}\left[\frac{3z^2}{\varrho^2} - \frac{2z^4}{\varrho^4} + \frac{x^2}{\varrho^2} - \frac{2x^2z^2}{\varrho^4} + \frac{y^2}{\varrho^2} - \frac{2y^2z^2}{\varrho^4}\right]\right\}.$$

Beachtet man, daß

$$\int dF \cdot z = 0$$

ist, und daß sich die Glieder in der eckigen Klammer zu 1 zusammenziehen, so vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$P = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{3ak}{2}\int dF,$$

oder wenn man für die Kugeloberfläche $\int dF$ ihren Wert $4\pi\varrho^2$ einführt,

$$P = 6\pi ak\varrho, \tag{470}$$

d. h. der resultierende Flüssigkeitsdruck wird proportional der ersten Potenz der Geschwindigkeit und zugleich auch proportional der ersten Potenz des Kugelhalbmessers gefunden.

Bei der Anwendung dieser Formel darf man aber nicht vergessen, daß sie nur für kleine Geschwindigkeiten gültig ist, da wir bei der Ableitung vorausgesetzt haben, daß der zur Beschleunigung erforderliche Anteil des Druckgefälles gegenüber dem zur Überwindung der Reibung dienenden zu vernachlässigen sei. Damit dies zutrifft, muß bei Wasser, das einen verhältnismäßig niedrigen Zähigkeitskoeffizienten hat, die Geschwindigkeit, wie eine Überschlagsrechnung lehrt,

jedenfalls sehr gering sein, so daß das Anwendungsgebiet der Formel für Wasser sehr beschränkt ist, und man in der Tat nicht leicht praktisch Gebrauch davon machen kann. Erst bei sehr viel zäheren Flüssigkeiten, die indessen praktisch ebenfalls von Wichtigkeit werden können, darf man auch für etwas größere Geschwindigkeiten erwarten, daß die Formel hinlänglich genau zutrifft.

Eine andere Anwendung der Theorie der zähen Flüssigkeiten, die eine nähere Betrachtung verdient, bezieht sich auf die Zapfenreibung bei „vollkommener“ Schmierung, nämlich bei einer Schmierung, die ausreicht, um den Zapfen von den Lagerschalen durch eine Ölschicht vollständig zu trennen, so daß der Zapfen im Öle schwimmt. In Band I, § 35 der 3. Aufl. habe ich bereits auseinandergesetzt, daß die Zapfenreibung bei dieser Schmierung ganz anders und viel niedriger ausfällt, als wenn eine unmittelbare Berührung zwischen Zapfen und Lagerschalen eintritt. Die Reibung kann nämlich bei vollkommener Schmierung nur durch die Schmierschicht selbst übertragen werden und befolgt daher die Gesetze der Flüssigkeitsreibung, die von denen der Reibung zwischen festen Körpern ganz verschieden sind. Der Hauptunterschied besteht darin, daß die Reibung bei der vollkommenen Schmierung vom Drucke, also von der Belastung des Zapfens wenigstens unmittelbar nicht abhängt und mittelbar nur insofern, als die Dicke der Schmierschicht durch den Druck, der sich darin überträgt und der die Flüssigkeit seitlich zu verdrängen sucht, eine Verminderung erfahren kann.

Wenn auch der Fortschritt in der Konstruktion möglichst reibungsfreier Zapfenlager in erster Linie durch die Anstellung von Versuchen und die Verwertung ihrer Ergebnisse herbeigeführt worden ist, wird es doch für den mit diesen Dingen Beschäftigten von Nutzen sein, auf die Flüssigkeitsbewegungen in der Schmierschicht theoretisch noch etwas näher einzugehen. Dazu mögen die folgenden Betrachtungen eine Anleitung geben.

Abb. 26 gibt in starker Vergrößerung ein kleines Stück vom Querschnitt der Schmierschicht eines Tragzapfens an.

Mit Z ist der Zapfen, mit L die Lagerschale bezeichnet und zwischen beiden liegt die Ölschicht von der sehr geringen Dicke h. Eigentlich sind die Oberflächen von Z und L kreisförmig gebogen. Der Halbmesser des Kreisbogens ist aber bei dem in der Zeichnung angewendeten Maßstabe so groß, daß auf die kurze Strecke, die in der Abbildung herausgegriffen ist, die Krümmung nicht merklich wird, so daß Z und L als geradlinig begrenzt angesehen werden können.

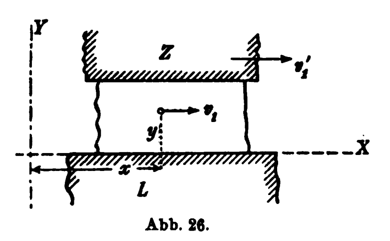


Abb. 26.

Die Lagerschale L liegt fest und an ihr haftet die daran grenzende Flüssigkeit, während Z mit einer Geschwindigkeit v_1', nämlich mit der gegebenen Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens im Sinne der X-Achse und zwar nach rechts hin bewegt sein möge. Die an Z unmittelbar angrenzende Flüssigkeit haftet an Z und wird davon mit der Geschwindigkeit v_1' mitgenommen. An irgendeiner Stelle im Abstande y von L hat die Flüssigkeit eine Geschwindigkeit v_1 im Sinne der X-Achse, die voraussichtlich zwischen 0 und v_1' liegen wird. Eine Bewegung im Sinne der Y-Achse ist nicht zu erwarten und außerdem wollen wir uns hier auch auf die Untersuchung des Falles beschränken, daß die Flüssigkeit keine Bewegung senkrecht zur Querschnittsebene ausführt.

Wir haben demnach hier

$$v_2 = 0, \quad v_3 = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial z} = 0 \tag{471}$$

zu setzen und außerdem anzunehmen, daß es sich um eine stationäre Bewegung handelt. Von den Bewegungsgleichungen (462) vereinfacht sich mit diesen Annahmen die erste zu

$$\frac{\partial p}{\partial x} = k \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}, \tag{472}$$

während die beiden anderen

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \tag{473}$$

liefern. Differentiiert man Gl. (472) nach y und beachtet die erste der Gleichungen (473), so folgt

$$\frac{\partial^3 v_1}{\partial y^3} = 0.$$

Durch Integration erhält man daraus

$$v_1 = ay^2 + by + c.$$

Da v_1 für $y = 0$ verschwinden muß, folgt $c = 0$ und die andere Grenzbedingung liefert

$$v_1' = ah^2 + bh.$$

Entnimmt man hieraus b, so folgt

$$v_1 = ay^2 + \left(\frac{v_1'}{h} - ah\right)y. \tag{474}$$

Die Bedeutung der noch stehen gebliebenen Integrationskonstanten a ergibt sich durch Einsetzen des Wertes in Gl. (472). Man hat

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 2ak \tag{475}$$

und a ist demnach proportional mit dem Druckanstieg in der X-Richtung.

Die Flüssigkeitsmenge, die in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt fließt, dessen eine Seite die Dicke h der Schmierschicht ist, während die andere senkrecht zur Zeichenebene in Abb. 26 stehende Seite gleich der Längeneinheit sein möge, sei mit Q bezeichnet. Man findet dafür

$$Q = \int_0^h v_1 dy = \frac{ah^3}{3} + \left(\frac{v_1'}{h} - ah\right)\frac{h^2}{2}$$

oder kürzer und mit Einsetzen des Wertes von a aus Gl. (475)

$$Q = \frac{v_1' h}{2} - \frac{h^3}{12k}\frac{dp}{dx}. \tag{476}$$

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir jetzt den Fall betrachten, daß der Zapfen genau konzentrisch mit der Lagerschale liegt, so daß die Schmierschicht ringsum dieselbe Dicke h

hat. Dann ist alles ringsum symmetrisch und es kann daher kein Druckanstieg $\frac{dp}{dx}$ bestehen. Wenn p überall gleich ist, wird aber die Resultierende der Flüssigkeitsdrucke auf den Zapfen zu Null, d. h. dieser Zustand ist nur für den unbelasteten Zapfen möglich. Dabei ist von den geringen Druckunterschieden, die durch die Schwere in verschiedenen Höhen des horizontal liegenden Zapfens hervorgebracht werden, abgesehen worden.

Wenn der Zapfen eine Belastung zu übertragen hat, muß die Resultierende der Flüssigkeitsdrucke am Zapfenumfange mit dieser Belastung Gleichgewicht halten. Daher kann $\frac{dp}{dx}$ nicht überall Null und h nicht überall gleich groß sein. Der Querschnitt der Schmierschicht muß daher durch zwei exzentrisch zueinander liegende Kreise begrenzt sein. In Abb. 27 sind diese Kreise angegeben, wobei der Deutlichkeit wegen die Dicke der Schmierschicht viel größer gezeichnet wurde, als sie in Wirklichkeit anzunehmen ist. Wir dürfen vielmehr annehmen, daß sowohl die Differenz der beiden Radien δ als die Exzentrizität e der Kreise und hiermit alle h genau genug als unendlich klein gegen jeden der beiden Radien betrachtet werden können.

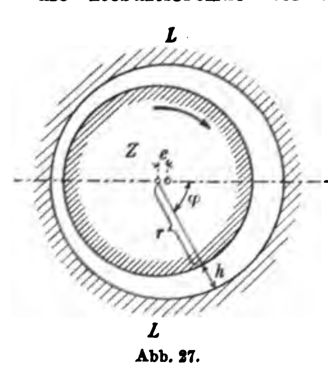


Abb. 27.

Man kann dann h als Funktion des in der Abbildung angegebenen Richtungswinkels φ durch die Gleichung

$$h = \delta + e \cos \varphi \tag{477}$$

darstellen. Da auch der Differentialquotient von h nach φ klein von derselben Ordnung ist, sind an jeder Stelle die die Ölschicht begrenzenden Wände nahezu parallel miteinander und wir dürfen daher die vorher für parallele Wände abgeleitete Gl. (476) für die zum Winkel φ gehörige Durchflußmenge Q hier ebenfalls anwenden. Dabei ist $dx = r d\varphi$ und daher

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{r}\frac{dp}{d\varphi}$$

zu setzen. Aus Gl. (476) erhalten wir daher

$$\frac{dp}{d\varphi} = \frac{12kr}{h^3}\left(\frac{v_1'h}{2} - Q\right). \tag{478}$$

In dieser Gleichung ist auf der rechten Seite alles bekannt bis auf die der Kontinuitätsbedingung wegen konstante Durchflußmenge Q. Um diese zu erhalten, benutzen wir die Bedingung, daß

$$\int_0^{2\pi} \frac{dp}{d\varphi}\, d\varphi = 0$$

sein muß. Setzt man für h seinen Wert aus Gl. (477) ein, so geht die Gleichung über in

$$\frac{v_1'}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\delta + e\cos\varphi)^2} - Q\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\delta + e\cos\varphi)^3} = 0.$$

Um die bestimmten Integrale zu berechnen, ermittle ich zuerst das Integral

$$J_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\delta + e\cos\varphi} = \frac{1}{e}\left[\frac{2}{\sqrt{\frac{\delta^2}{e^2} - 1}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\delta - e}{\delta + e}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$J_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\delta^2 - e^2}}.$$

Daraus erhält man durch Differentiation nach δ

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\delta + e\cos\varphi)^2} = -\frac{dJ_1}{d\delta} = \frac{2\pi\delta}{\sqrt{(\delta^2 - e^2)^3}}$$

und in derselben Weise wird auch

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\delta + e\cos\varphi)^3} = \frac{\pi(2\delta^2 + e^2)}{\sqrt{(\delta^2 - e^2)^5}}$$

gefunden. Setzt man diese Werte in die vorhergehende Gleichung ein und löst sie nach Q auf, so erhält man

$$Q = v_1' \frac{\delta(\delta^2 - e^2)}{2\delta^2 + e^2}, \tag{479}$$

womit Q in lauter gegebenen Größen ausgedrückt ist. Zur Probe für die Richtigkeit der Rechnung kann es dienen, daß Q für $e = 0$ zu $\frac{1}{2} v_1' \delta$ und für $e = \delta$ gleich Null wird, wie es sein muß.

Setzt man Q in Gl. (478) ein, so ist damit die Druckverteilung rings um den Zapfen bis auf die Ausführung der Integration, die man aber genau genug auch durch eine mechanische Quadratur ersetzen kann, vollständig bestimmt. Um die Stellen zu erhalten, an denen p ein Maximum oder Minimum wird, setzen wir $\frac{dp}{d\varphi} = 0$ und erhalten dafür nach Gl. (478) die Bedingungsgleichung

$$\cos\varphi = -\frac{3\delta e}{2\delta^2 + e^2}. \tag{480}$$

Bei einem schwach belasteten Zapfen, für den e klein gegen δ ist, liegen die beiden Stellen des kleinsten und des größten Flüssigkeitsdruckes nahezu diametral einander gegenüber. Bei einem Zapfen, der so stark belastet ist, daß die Flüssigkeit an der engsten Stelle schon fast ganz verdrängt ist, wird e nahezu gleich δ und hiermit $\cos\varphi$ nahezu gleich -1, d. h. der größte und der kleinste Flüssigkeitsdruck tritt zu beiden Seiten der engsten Stelle ganz in deren Nähe auf. Da an den engsten Stellen große Gleitgeschwindigkeiten (oder genauer gesagt große Werte von $\frac{dv_1}{dy}$) auftreten müssen, denen große Reibungen entsprechen, folgt aus dieser Theorie, daß die Zapfenreibung auch bei vollkommener Schmierung von der Zapfenbelastung nicht unabhängig sein kann, obschon die Flüssigkeitsreibung an sich unabhängig vom Drucke ist.

Für eine Einführung in den Gegenstand reichen die hier abgeleiteten Ergebnisse bereits aus. Ich sehe daher von einer weiteren Besprechung der gefundenen Lösung, die mehr Schwierigkeiten verursacht, ab und verweise den Leser, der

sich mit dem Gegenstande noch weiter beschäftigen möchte, auf die Abhandlung von Prof. Sommerfeld „Hydrodynamische Theorie der Schmiermittelreibung“, Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 50, S. 97, 1904. Ich füge hinzu, daß ich mich in den vorhergehenden Entwickelungen ebenfalls schon an diese Arbeit angeschlossen habe.

§ 72. Der Satz von Carnot über den Verlust an lebendiger Kraft in der technischen Hydraulik.

Bei einer Reihe von Fragen über Flüssigkeitsbewegungen, die beim heutigen Stande unseres Wissens keine genauere Beantwortung zulassen, stützt man sich, um wenigstens zu einer näherungsweise zutreffenden Lösung zu gelangen, auf eine Annahme, die in manchen Fällen bis zu einem gewissen Grade durch unmittelbare Versuchsergebnisse gerechtfertigt erscheint, auf andere Fälle aber zugleich in ziemlich willkürlicher Weise übertragen wird. Diese Annahme ist unter der Bezeichnung des Carnotschen Satzes bekannt. Der Umstand, daß sich die Aussage des Satzes im wesentlichen mit jener deckt, zu der wir in Band IV, § 31 der 3. Aufl. bei der Untersuchung des unelastischen Stoßes starrer Körper auf Grund einer Betrachtung gelangten, die sich für den dort vorausgesetzten Fall als eine streng beweisbare Folgerung aus den zuverlässigsten Grundgesetzen der Mechanik darstellte, erweckt leicht die Meinung, als ob dem Satze auch bei den Anwendungen, die er in der Hydrodynamik findet, eine ähnliche Bedeutung zukomme. Davor ist aber entschieden zu warnen. Vielmehr sind alle Versuche, die man seither unternommen hat, den Carnotschen Satz für Flüssigkeitbewegungen aus den Grundgesetzen der Mechanik abzuleiten, mißglückt; die angeblichen Beweise sind nur Scheinbeweise, insofern als dabei Annahmen mit unterlaufen, die selbst wieder ebenso willkürlich und unberechtigt sind, als der Satz selbst, den man beweisen will.

Es ist nötig, daß man sich hierüber im klaren ist, um sich vor einer Überschätzung der Zuverlässigkeit der aus dem Carnotschen Satze abgeleiteten Rechnungen zu bewahren. Da-

gegen ist es ganz gerechtfertigt, unter dem Vorbehalte des Zweifels an der Genauigkeit der erlangten Resultate in solchen Fällen, bei denen eine hinlängliche Bestätigung durch die Ergebnisse von Versuchen fehlt, die Rechnungen unter Annahme des Carnotschen Satzes durchzuführen, um überhaupt ein Resultat zu erlangen, dem eine ungefähre Wahrscheinlichkeit zukommt, indem man sonst bei Verwerfung dieser Annahme der Frage überhaupt ganz ratlos gegenüberstehen würde. Eine selbst nur ganz bedingungsweise und ungefähr zutreffende Theorie ist, sofern man sie nur mit der nötigen Vorsicht benutzt, immer noch besser als gar keine.

Die einfachste Erscheinung, auf die man den Carnotschen Satz anzuwenden pflegt und für die er auch durch die darüber vorliegenden Versuchsergebnisse als hinlänglich bestätigt zu erachten ist, besteht in dem Druckhöhenverluste, der infolge einer plötzlichen Erweiterung des Rohrquerschnitts beim Strömen des Wassers in einer Rohrleitung eintritt.

In Abb. 28 sei AB ein Längsschnitt durch das engere, BC ein Schnitt durch das weitere Rohr, das sich bei B in schroffem Übergange an jenes ansetzt. In den Querschnitten A und C der beiden Rohre, die weit genug von der Übergangsstelle abliegen, erfolgt die Strömung, abgesehen von den auch dort vorkommenden Mischbewegungen, ungefähr in parallelen Stromfäden. Bei B gehen die Stromfäden, wie man annimmt, etwa in der aus der Abbildung ersichtlichen Weise auseinander. Zwischen den äußersten Stromfäden dieses Bündels und den Rohrwänden liegt an der Übergangsstelle ein Raum, dessen Wasserinhalt an der fortschreitenden Wasserströmung nicht teilnimmt, sondern in wirbelnder Bewegung begriffen ist, die einerseits durch die Reibung der angrenzenden Stromfäden fortdauernd unterhalten wird, während andererseits die Energie dieser wirbelnden Bewegung durch die inneren Reibungen

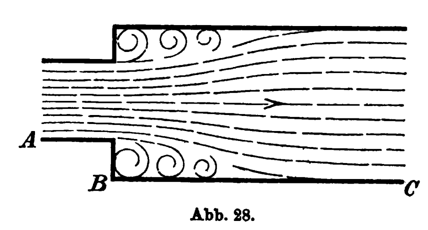


Abb. 28.

der Wassermasse und durch die Reibungen an der Gefäßwand aufgezehrt wird. Wenn der Vorgang auch nicht von ganz so einfacher Art sein kann, wie er in dieser Schilderung dargestellt wird, spielt er sich doch, wie unmittelbare Beobachtungen erkennen lassen, ungefähr in der angegebenen Weise ab und namentlich kann kaum ein Zweifel darüber erhoben werden, daß der tatsächlich nachweisbare Verlust an mechanischer Energie bei der Erweiterungsstelle auf Rechnung der wirbelnden Bewegungen zu setzen ist, die dort eintreten.

Bei einem ganz allmählichen Übergange des engeren Rohrquerschnitts in den weiteren wird dieser Energieverlust vermieden; nur jener, im Vergleiche dazu wesentlich kleinere Energieverlust bleibt auch hier noch bestehen, der schon in den zylindrischen Teilen der Rohrleitung überall auftritt. Von diesem möge der Einfachheit halber jetzt abgesehen werden; er läßt sich nachträglich ohnehin leicht berücksichtigen. Bezeichnet man dann mit v_0 und p_0 die Geschwindigkeit und den Druck im engeren Rohre beim Querschnitte A, mit v_1 und p_1 dieselben Größen für den Querschnitt C des weiteren Rohres und mit h den etwa bestehenden Höhenunterschied zwischen beiden Querschnitten (wobei C tiefer liegen soll als A, wenn h positiv ist), so besteht für den Fall eines allmählichen Übergangs aus dem engeren in den weiteren Rohrquerschnitt nach Gl. (139) des ersten Bandes zwischen diesen Größen die Beziehung

$$p_1 + \frac{\gamma v_1^2}{2g} = p_0 + \frac{\gamma v_0^2}{2g} + \gamma h. \tag{481}$$

Für den Fall des durch Abb. 28 dargestellten schroffen Übergangs wird dagegen der Druck p' im weiteren Rohre kleiner, als das nach dieser Gleichung berechnete p_1 und der Unterschied $p_1 - p'$ gibt den durch die plötzliche Erweiterung hervorgebrachten Druckverlust an.

Jeder Druck p kann übrigens mit Hilfe der Beziehung

$$p = \gamma H$$

stets auch in einer ihm zugehörigen Druckhöhe H ausgedrückt werden und der Unterschied

$$H_1 - H' = \frac{p_1 - p'}{\gamma}$$

gibt den Druckhöhenverlust an, wenn unter γ, wie schon in der vorigen Gleichung, das Gewicht der Raumeinheit der Flüssigkeit verstanden wird. Auch der zugehörige Energieverlust Verl läßt sich in den vorigen Größen sofort ausdrücken, indem der dem Herabsinken einer Wassermasse M vom Gewichte Mg um die Höhe $H_1 - H'$ entsprechende Energieunterschied

$$\text{Verl} = Mg(H_1 - H') = \frac{Mg}{\gamma}(p_1 - p') \tag{482}$$

ist. — Zur Berechnung des Druckes p' fehlt es im vorliegenden Falle an einer einwandfreien Unterlage; man bedient sich daher hierzu der Hypothese, daß der Energieverlust bei dem Geschwindigkeitswechsel von v_0 auf v_1 ebenso groß sei, wie beim Stoße plastisch-starrer Körper nach der Carnotschen Formel. Man setzt also

$$\text{Verl} = \frac{M(v_0 - v_1)^2}{2} \tag{483}$$

und diese Gleichung gestattet, in Verbindung mit den vorhergehenden, sowohl $p_1 - p'$, als p' selbst zu berechnen. Zunächst erhält man aus dem Vergleiche von (483) mit (482)

$$p_1 - p' = \frac{\gamma(v_0 - v_1)^2}{2g},$$

woraus nach Einsetzen von p_1 aus Gl. (481)

$$\begin{aligned} p' &= p_0 + \frac{\gamma(v_0^2 - v_1^2)}{2g} + \gamma h - \frac{\gamma(v_0 - v_1)^2}{2g} \\ &= p_0 + \gamma h + \frac{\gamma}{g} v_1(v_0 - v_1) \end{aligned} \tag{484}$$

gefunden wird. Die Geschwindigkeiten v_0 und v_1 sind als gegeben zu betrachten, wobei nur zu beachten ist, daß sich beide umgekehrt wie die zugehörigen Querschnittsflächen verhalten. Liegen beide Rohrquerschnitte A und C in gleicher Höhe wie in Abb. 28, so ist das Glied γh zu streichen.

Um ferner zu zeigen, in welcher Weise man gewöhnlich eine Begründung für den hier willkürlich eingeführten Ansatz

in Gl. (483) zu geben versucht, wähle ich eine Darstellung, die geeignet ist, den Kern der Sache möglichst deutlich hervortreten zu lassen. In Abb. 29, die sich auf denselben Fall bezieht, wie schon Abb. 28, seien wieder zwei Querschnitte A und C im engeren und weiteren Rohre von den Flächeninhalten F_0 und F' ausgewählt, die man jetzt am besten in ziemlich großem Abstande von der Erweiterungsstelle B annimmt.

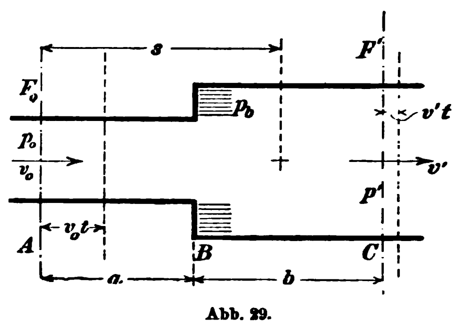


Abb. 29.

Wir betrachten die ganze Wassermasse, die in einem gegebenen Augenblicke zwischen den Querschnitten F_0 und F' enthalten ist, und berechnen den Abstand s_0 des Schwerpunktes dieser Masse vom Anfangsquerschnitte F_0. Dieser wird leicht zu

$$s_0 = \frac{aF_0 \cdot \frac{a}{2} + bF'\left(a + \frac{b}{2}\right)}{aF_0 + bF'}$$

gefunden. Nach Ablauf einer Zeit t, die nicht zu groß gewählt werden darf, befindet sich dieselbe Wassermasse, wenn von Geschwindigkeitsunterschieden der parallelen Stromfäden innerhalb der Querschnitte A und C abgesehen werden kann, zwischen zwei anderen Querschnitten, die sich gegen die Anfangslage um $v_0 t$ bezw. $v't$ verschoben haben. Berechnet man auch jetzt wieder den Schwerpunktsabstand s derselben Wassermasse von dem ursprünglichen Anfangsquerschnitte, so erhält man

$$s(aF_0 + bF') = (a - v_0 t)F_0 \cdot \frac{a + v_0 t}{2} + (b + v't)F' \cdot \left(a + \frac{b + v't}{2}\right).$$

Durch diese Gleichung wird der Schwerpunktsweg s der ins Auge gefaßten Wassermenge als Funktion der Zeit t dargestellt. Durch zweimalige Differentiation nach der Zeit erhält man daraus die Beschleunigung (bezw. Verzögerung), die der Schwerpunkt erfährt. Man findet

$$(aF_0 + bF')\frac{d^2s}{dt^2} = -v_0^2F_0 + v'^2F'$$

oder wenn man mit der spezifischen Masse $\frac{\gamma}{g}$ beiderseits multipliziert und auf der linken Seite die zwischen beiden Querschnitten enthaltene Wassermasse, auf die sich die Gleichung bezieht, der Kürze halber mit m bezeichnet,

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -\gamma\left(\frac{v_0^2F_0 - v'^2F'}{g}\right). \tag{485}$$

Hierbei ist noch zu beachten, daß $v_0F_0 = v'F'$ ist, da jedes dieser Produkte das in der Zeiteinheit die Röhre durchfließende Wasservolumen darstellt. Bezeichnet man daher, wie schon in den früheren Entwickelungen, die Masse dieses Volumens mit M, so geht die Gleichung auch über in

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -M(v_0 - v'). \tag{486}$$

Nach dem Satze von der Bewegung des Schwerpunkts ist das auf der linken Seite stehende Produkt gleich der Summe aller äußeren Kräfte, die auf die gesamte Wassermasse einwirken. Dabei brauchen wir nur auf jene Komponenten der äußeren Kräfte zu achten, die in die Bewegungsrichtung fallen. Der Bewegung entgegen wirkt der Druck $F'p'$, der im Querschnitte C als äußere Kraft auf die betrachtete Wassermasse übertragen wird. Gleichgerichtet mit der Bewegung ist der Druck F_0p_0 im Querschnitte A und der Druck, den die zur Rohrachse senkrechte Abschlußwand an der Erweiterungsstelle B auf die Wassermasse ausübt. Der Flächeninhalt dieser Abschlußwand ist gleich $F' - F_0$. Wie sich der Flüssigkeitsdruck über diese Wand verteilt, ist unbekannt. Bezeichnen wir den ebenfalls unbekannten Mittelwert dieses Flüssigkeitsdruckes mit p_b, so ist der von der Abschlußwand B herrührende Druck auf die Wassermasse gleich $(F' - F_0)p_b$. Sieht man, wie es zunächst geschehen sollte, von der Reibung zwischen der Flüssigkeit und den Rohrwänden ab, so steht an allen anderen Stellen der von der Rohrwand auf die Flüssigkeit ausgeübte Druck senkrecht zur Rohrachse und liefert keine Komponente in der Richtung der Schwerpunktsbewegung. Wenn

das Rohr, wie hier ferner angenommen werden soll, horizontal liegt, hat auch das Eigengewicht keine Komponente in der Bewegungsrichtung und der Satz von der Bewegung des Schwerpunkts führt daher zu der Gleichung

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -F'p' + F_0p_0 + (F' - F_0)p_b, \tag{487}$$

aus der durch Vergleich mit Gl. (486) folgt

$$F'p' - F_0p_0 - (F' - F_0)p_b = M(v_0 - v'). \tag{488}$$

Abgesehen von der vorher zur Vereinfachung der Betrachtungen eingeführten Annahme, daß auf die Geschwindigkeitsunterschiede zwischen den parallelen Wasserfäden innerhalb der Querschnitte A und C nicht geachtet zu werden brauche (welche Annahme aber an sich unwesentlich ist und leicht auch vermieden werden könnte), sowie der vorläufig als zulässig angenommenen Vernachlässigung der Reibung des Wassers an den Rohrwänden, läßt sich gegen die strenge Gültigkeit dieser Betrachtungen bis hierher in der Tat nichts einwenden. Zur Ermittelung der Unbekannten p' ist aber Gl. (488) noch nicht verwendbar, da in ihr außerdem noch die zweite Unbekannte p_b vorkommt. Hier muß nun, um zu einem greifbaren Resultate zu gelangen, außerdem noch eine willkürliche Annahme hinzutreten. Man setzt willkürlich voraus, daß

$$p_b = p_0 \tag{489}$$

gesetzt werden könne. Schließen wir uns dem an, so finden wir aus Gl. (488)

$$p' = p_0 + \frac{M}{F'}(v_0 - v') = p_0 + \frac{\gamma v'}{g}(v_0 - v') \tag{490}$$

in Übereinstimmung mit der aus der Carnotschen Annahme abgeleiteten Gleichung (484). Natürlich kann, nachdem diese Gleichung auf solche Art gefunden ist, daraus auch rückwärts wieder die Carnotsche Formel (483) hergeleitet werden, von der die Gleichung früher als eine Folgerung erschien. Die durch Gl. (489) ausgesprochene Annahme ist daher gleichbedeutend mit der Voraussetzung der Gültigkeit der Carnot-

schen Formel (483); die eine ist aber ebenso willkürlich als die andere und ein Beweis des Carnotschen Satzes, der sich auf die Annahme (489) stützt, ist daher nicht nur wertlos, sondern auch schädlich, da er solche, die den Fehler nicht merken, zu weiteren falschen Schlüssen verführen kann.

Hierzu bemerke ich noch, daß man den Beweisgang im einzelnen noch mannigfach verändern kann, ohne daß davon der Kern der Sache berührt würde. Man kann z. B. zur Herleitung von Gl. (490) an Stelle des Satzes von der Bewegung des Schwerpunkts auch den Satz vom Antrieb benutzen, wodurch die Entwickelung zudem noch etwas abgekürzt wird. Aber auch in diesem Falle bildet die willkürliche Annahme, die durch Gl. (489) ausgesprochen wird, die wesentliche Unterlage des Schlußresultats.

Die vorhergehenden Betrachtungen beziehen sich stets auf den Fall, daß das Wasser aus dem engeren Rohre in das weitere übertritt. Auf den Fall der umgekehrten Strömungsrichtung sind die aufgestellten Formeln nicht anwendbar. Man hilft sich, um für diesen Fall eine Näherungsformel für den Druckverlust zu erhalten, damit, daß man zunächst die Kontraktion ins Auge faßt, die der Strahl beim Übergange in das engere Rohr erfährt. Im engsten Querschnitte des kontrahierten Strahls ist die Geschwindigkeit am größten und von da ab nimmt sie in dem Maße wieder ab, als sich der Strahlquerschnitt vergrößert, bis er nach einiger Zeit den vollen Querschnitt des engeren Rohres ausfüllt. Der Energieverlust, der dem Übergange aus der größten Geschwindigkeit in die normale Geschwindigkeit im engeren Rohre entspricht, wird dann wiederum nach der Carnotschen Formel berechnet. Unter der Voraussetzung, daß der Kontraktionskoeffizient bekannt ist, steht der Durchführung dieser Rechnung, die sich ganz so abspielt, wie im vorigen Falle, kein Hindernis im Wege.

Auch in einer Reihe von anderen Fällen über Wasserbewegungen gelangt man in ganz ähnlicher Art unter Zugrundelegung des Carnotschen Satzes zu einer annähernden Lösung. Als Beispiel hierfür möge noch die Berechnung eines Strahl-

apparates angeführt werden. Mischen sich nämlich zwei Wasserstrahlen, die in parallelen Richtungen zugeführt werden und von denen der eine vorher mit der Geschwindigkeit v_1 unter dem Drucke p_1 strömte, während sich die Buchstaben $v_2 p_2$ auf den zweiten Strahl und vp auf den vereinigten Strahl beziehen sollen, so setzt man den Verlust an mechanischer Energie bei der Vereinigung, dem Carnotschen Satze entsprechend, zu

$$\text{Verl} = m_1 \frac{(v_1 - v)^2}{2} + m_2 \frac{(v - v_2)^2}{2}$$

an. Dabei bedeuten m_1 und m_2 die auf die Zeiteinheit bezogenen Wassermassen beider Strahlen, die sich selbst wieder in den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 und den Querschnitten der beiden Zuführungsrohre ausdrücken lassen. An der Vereinigungsstelle ist $p_1 = p_2$ zu setzen und der Druck p nach der Vereinigung (am Ende des „Mischungsraumes“, wie man sich ausdrückt) kann auf Grund des gewählten Ansatzes so wie vorher berechnet werden. Wegen der weiteren Ausrechnung, auf die hier nicht eingegangen werden kann, sei auf das Werk von Zeuner über die Theorie der Turbinen, Leipzig 1899, verwiesen.

§ 73. Grundwasserströmungen.

Wesentlich verschieden von den bisher besprochenen Fällen ist die Bewegung des Wassers durch ein Filter oder durch eine wasserdurchlässige Bodenschicht, die gleichfalls als ein Filter betrachtet werden kann. Am nächsten verwandt ist diese Bewegung mit der schon in Band IV besprochenen Strömung durch ein sehr enges Rohr. Die Wasserteilchen müssen sich durch die engen und unregelmäßig aufeinander folgenden Hohlräume des Filters hindurchwinden und können auch bei großen Druckunterschieden wegen der Reibung an den dicht beieinanderliegenden Sandkörnern o. dgl. verhältnismäßig nur sehr geringe Geschwindigkeiten annehmen.

Wenn zum Zwecke der Wassergewinnung ein Schacht in eine wasserführende Schicht des Bodens abgeteuft und das

Wasser durch eine Pumpe daraus stetig entnommen wird, senkt sich der Grundwasserspiegel an dieser Stelle. Hierdurch entsteht ein Gefäll nach dem Brunnen hin von solcher Größe, daß der dadurch bewirkte Zufluß des Grundwassers im Beharrungszustande ebenso groß ist, als die Wasserentnahme aus dem Brunnen. Die Zuflußgeschwindigkeit übersteigt hierbei selten einige Meter in der Stunde und ist in einiger Entfernung vom Brunnen noch erheblich geringer. Die lebendige Kraft des strömenden Wassers ist daher sehr gering und die durch die Spiegelsenkung ausgelöste potentielle Energie wird fast ausschließlich zur Überwindung der Reibungen verbraucht.

Es läßt sich hiernach schon vermuten, daß das zur Aufrechterhaltung der Strömung erforderliche Druckgefäll wie bei den engen Röhren, die mit geringer Geschwindigkeit durchströmt werden, der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportional ist. Dies steht auch in guter Übereinstimmung mit der Erfahrung. Im übrigen kommt es natürlich wesentlich auf die Zusammensetzung des Filters, auf die Größe, Gestalt und Lagerung der Sandkörner usf. an, wie groß das zu einer gegebenen Strömungsgeschwindigkeit erforderliche Druckgefäll sein muß. Die Zusammensetzung des Bodens kann längs der wasserführenden Schicht starken und unregelmäßigen Schwankungen unterworfen sein, durch die Abweichungen in der Wasserbewegung herbeigeführt werden, die sich nicht voraussehen lassen. Immerhin wird man sich zunächst ein Urteil darüber verschaffen müssen, welche Bewegung unter regelmäßigen Umständen zustande käme.

Wie man Aufgaben dieser Art behandelt, wird sich aus dem folgenden einfachen Beispiele ergeben, auf dessen Untersuchung ich mich hier beschränke. In Abb. 30 sei AB der horizontale Grundwasserspiegel vor dem Betriebe des Brunnens. Die Terrainoberfläche ist gleichgültig und daher in der Abbildung weggelassen. CD sei die Oberfläche der undurchlässigen Schicht, die den Grundwasserstrom nach unten hin begrenzt. Die Oberfläche CD möge eine horizontale Ebene bilden. JK sei die Achse und LM, NO seien die Seiten-

wände des im Grundrisse kreisförmigen Brunnenschachtes. EF sei der Wasserspiegel im Brunnen, der sich im Beharrungszustande einstellt, wenn die Wassermenge Q in der Zeiteinheit entnommen wird. FH und EG sind Teile des gesenkten Grundwasserspiegels im Beharrungszustande.

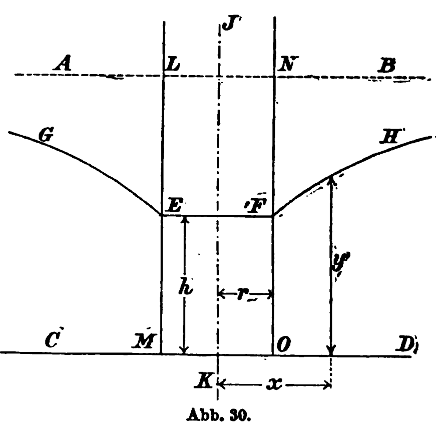


Abb. 30.

Da wir überall gleiche Bodenbeschaffenheit voraussetzen, bildet der gesenkte Grundwasserspiegel eine Rotationsfläche, deren Achse JK ist. Die Geschwindigkeit v der Grundwasserströmung im Abstande x von der Achse kann nach unserer Annahme

$$v = k\frac{dy}{dx} \tag{491}$$

gesetzt werden, wenn k einen von der Bodenbeschaffenheit abhängigen Koeffizienten bedeutet, der im einzelnen Falle aus besonderen Versuchen zu ermitteln ist. Die Geschwindigkeit v ist übrigens in allen auf derselben Lotrechten liegenden Punkten als gleich groß anzusehen. Für die Wassermenge Q, die von außen her durch den Zylindermantel vom Halbmesser x strömt, hat man daher

$$Q = 2\pi xyv = 2\pi kxy\frac{dy}{dx}.$$

Der Kontinuitätsbedingung wegen muß durch jeden Zylindermantel von einem beliebigen Halbmesser x, der zwischen r und ∞ liegt, dieselbe Menge strömen. In der vorausgehenden Gleichung ist daher Q eine Konstante. Schreiben wir die Gleichung in der Form

$$\frac{dx}{x} = \frac{2\pi k}{Q}y\,dy,$$

so kann sie ohne weiteres integriert werden und liefert

$$\lg x = C + \frac{\pi k}{Q} y^2. \tag{492}$$

Für $x = r$ wird $y = h$, d. h. gleich der Höhe des Wasserspiegels im Brunnen über der undurchlässigen Schicht. Daraus folgt für die Integrationskonstante C

$$C = \lg r - \frac{\pi k}{Q} h^2.$$

Setzt man das ein und löst nach Q auf, so erhält man

$$Q = \pi k \cdot \frac{y^2 - h^2}{\lg \frac{x}{r}}. \tag{493}$$

In einem Abstande R vom Brunnenschachte sei ein Bohrloch niedergetrieben, in dem man die Höhe H des Grundwasserspiegels beobachtet. Das gesamte Gefäll $H - h$ vom Bohrloche bis zum Brunnen sei ferner noch zur Abkürzung mit s bezeichnet. Dann liefert die vorige Gleichung mit $x = R$ und $y = H$

$$Q = \pi k \frac{H^2 - h^2}{\lg \frac{R}{r}} = \frac{\pi k}{\lg \frac{R}{r}} s (2H - s). \tag{494}$$

Aus dieser Gleichung erkennt man den Zusammenhang zwischen dem Gefälle s und der Ergiebigkeit des Brunnens. Wenn die undurchlässige Schicht CD sehr tief liegt, H also sehr groß gegen s ist, wächst die Ergiebigkeit des Brunnens zunächst proportional mit der Spiegelsenkung.

Es möge schließlich noch darauf hingewiesen werden, daß man zu ungereimten Resultaten käme, wenn man die Spiegelkurve FH auf Grund der vorausgehenden Gleichungen bis ins Unendliche verfolgen wollte. Das ist auch ganz selbstverständlich. Nach unserem Ansatz wurde nirgends ein Zufluß zum Grundwasser vorausgesetzt, vielmehr angenommen, daß der Grundwasserspiegel vor Betrieb des Brunnens überall horizontal und das Grundwasser ohne eigene Bewegung gewesen sei. Wenn dies so wäre, könnte aber nach Betrieb des Brunnens ein Beharrungszustand überhaupt nicht

eintreten, da die fortgeschaffte Wassermenge durch stets weiter fortschreitende und sich schließlich bis auf die größten Entfernungen hin merklich machende Spiegelsenkungen ausgeglichen werden müßte. In Wirklichkeit wird vielmehr in größerer Entfernung vom Bohrloche durch den Zusammenhang mit anderen Gewässern eine Speisung des Grundwassers stattfinden, die den Abgang ohne merkliche fernere Spiegelsenkung stets wieder ersetzt. Das Bohrloch, von dem vorher die Rede war, sollte demnach nur eine Stelle bezeichnen, bis zu der hin die Gültigkeit der gemachten Voraussetzungen noch genau genug angenommen werden kann.

Als bemerkenswertes Beispiel für den Nutzen, der aus Rechnungen solcher Art gezogen werden kann, darf ein Vortrag des Herrn A. Thiem bereichnet werden, der in „Schillings Journal für Gasbeleuchtung und Wasserversorgung", 1898, erschienen ist. Ich kann mir es nicht versagen, aus der Abhandlung dieses hervorragenden Ingenieurs, der auf dem Gebiete der Wasserversorgung auf praktische Leistungen und auf Erfahrungen zurückblicken konnte, wie kaum ein anderer, hier einen Satz anzuführen, der mir so recht geeignet erscheint, dieses Buch abzuschließen.

Nach der Beschreibung einer Wasserfassung, die er bei Essen a d. Ruhr ausführte, sagt Thiem:

„Es möge dieser Vorgang als Beispiel dafür dienen, daß der Theoretiker mit Hilfe eines zuverlässigen Gesetzes und der daraus gewonnenen Ableitungen auch auf dem Gebiete der Hydrologie mit Sicherheit und sehenden Auges Wege beschreiten kann, die der bloße Praktiker nur mit verbundenen Augen tastend zurücklegt, wenn ihm dies überhaupt gelingt."

Zusammenstellung der wichtigsten Formeln.

Erster Abschnitt.

Die relative Bewegung.

Seite

$$L = L' + \tfrac{1}{2}u^2\theta + \tfrac{1}{2}a^2 M. \qquad (7)$$ **14**

L die auf ein beliebiges Koordinatensystem, L' die auf das Hauptbezugssystem bezogene lebendige Kraft eines Punkthaufens, u Winkelgeschwindigkeit, a Translationsgeschwindigkeit beider Koordinatensysteme gegeneinander, θ das auf die durch den Schwerpunkt gehende Drehachse bezogene Trägheitsmoment und M die Gesamtmasse des Haufens.

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2 z}{dt^2} &= P_1 \\ m\left(\frac{d^2 R}{dt} - R\left(u + \frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right) &= P_2 \\ m\left(R\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dR}{dt}\left(u + \frac{d\varphi}{dt}\right)\right) &= P_3 \end{aligned}\right\}, \qquad (19)$$ **37**

Grundgleichungen für die Bewegung eines materiellen Punktes von der Masse m relativ zu einem mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit u rotierenden Fahrzeuge; z, R, φ Zylinderkoordinaten des Punktes relativ zum Fahrzeuge, z in achsialer, R in radialer Richtung, φ Winkelabstand der durch den Punkt und die Drehachse gelegten Ebene von einer im Fahrzeuge festen Ebene; $P_1 P_2 P_3$ die Komponenten der am Punkte angreifenden physikalisch existierenden Kraft.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m a^3}{K}}, \qquad (31)$$ **44**

Drittes Keplersches Gesetz für die Umlaufzeit T eines Planeten um die Sonne, a große Halbachse der elliptischen Bahn; $\frac{m}{K}$ eine Konstante des Sonnensystems.

Seite

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \cdot \frac{\cos\beta}{1 + 3\cos^2\beta}}, \qquad (44) \quad 54$$

T Dauer der kleinen Schwingungen um die durch β angegebene Gleichgewichtslage bei der Bewegung eines sphärischen Pendels, die der Bewegung als Zentrifugalpendel eng benachbart bleibt; β der Winkel, den der Faden von der Länge l für das Zentrifugalpendel mit der Lotrechten einschließt.

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}\cos\beta + u^2 \frac{a}{l}\sin\beta - u^2 \cos 2\beta}}, \qquad (53) \quad 60$$

T Schwingungsdauer des in einem gleichförmig rotierenden Raum zwangläufig geführten Pendels, β wie vorher die Gleichgewichtslage im rotierenden Raume, u Winkelgeschwindigkeit, a Abstand des Pendeldrehpunktes von der Rotationsachse.

$$u_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{und} \quad u_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{c}{m}}, \qquad (63) \quad 72$$

u_1 und u_2 Grenzen für die Umlaufgeschwindigkeit einer biegsamen Hängespindel, zwischen denen die lotrechte Gleichgewichtslage labil ist, während sie sowohl bei Unterschreitung von u_1 als bei Überschreitung von u_2 stabil wird; l Stangenlänge, m Masse am Stangenende, c Kraft, die einer elastischen Ausbiegung um die Längeneinheit entspricht.

Zweiter Abschnitt.

Mehrläufige Verbände.

$$L = \frac{1}{2}\sum m\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_1}\cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_2}\cdot \dot{q} + \cdots + \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_n}\cdot \dot{q}_n\right)^2, \qquad (69) \quad 88$$

L lebendige Kraft eines Verbandes von n Freiheitsgraden, die q allgemeine Koordinaten zur Beschreibung einer Stellung des Verbandes, $\dot{q}$ die zugehörigen Geschwindigkeiten, $\mathfrak{r}$ Radiusvektor nach einem Massenteilchen m von einem festen Anfangspunkte.

Seite

$$F_i = \sum \mathfrak{P} \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_i}, \qquad (72) \quad 87$$

F_i die auf die Koordinate q_i reduzierte äußere Kraft, $\mathfrak{P}$ eine der äußeren Kräfte, die zu F_i beitragen

$$F_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}, \qquad (78) \quad 91$$

Gleichung von Lagrange für die Koordinate q_i.

$$\left.\begin{aligned} a\varphi + b\frac{d^2\varphi}{dt^2} + c\frac{d^2\psi}{dt^2} &= 0 \\ d\psi + e\frac{d^2\psi}{dt^2} + c\frac{d^2\varphi}{dt^2} &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (91) \quad 103$$

Bewegungsgleichungen für die kleinen Schwingungen eines Doppelpendels, φ und ψ Winkel der beiden Glieder mit der Lotrichtung, $a\ b\ c\ d\ e$ Konstanten.

$$x = w\left(1 - \frac{g}{4\pi^2 L} T_1^2\right), \qquad (113) \quad 115$$

x Amplitude der Schwingungen, die der Aufhängepunkt eines etwa als Seismograph verwendeten Fadenpendels ausführt, T_1 Schwingungsdauer dieser Schwingungen, L Fadenlänge, w beobachteter Schwingungsausschlag.

$$u = \sqrt{\frac{2g}{r \sin\psi (1 + 3\sin^2\psi)}}, \qquad (153) \quad 156$$

u Rollgeschwindigkeit eines Rades bei der rein rollenden (regulären) Radbewegung, ψ Winkel der Radebene mit der horizontalen Fußbodenebene, r Radhalbmesser.

$$u_0 = \sqrt{\frac{g}{2r}}, \qquad (158\,\text{b}) \quad 162$$

u_0 kritische Geschwindigkeit des in aufrechter Stellung rollenden Rades; wenn die Winkelgeschwindigkeit über u_0 liegt, ist diese Bewegung stabil, im entgegengetzten Falle labil.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r \sin\psi_0}{2g \cos^2\psi_0}}, \qquad (165) \quad 170$$

T Dauer der kleinen Schwingungen bei der pseudoregulären Radbewegung um die durch den Winkel ψ_0 beschriebene, der zugehörigen regulären Bewegung entsprechende Mittellage.

Seite

$$\delta\int_0^{t_1}(L - V)\,dt = 0, \qquad (167) \quad 178$$

spricht das Prinzip von Hamilton aus, L lebendige Kraft des Verbandes, V dessen potentielle Energie.

Dritter Abschnitt.

Der Kreisel.

$$\left.\begin{aligned} u_1 w \theta_1 \sin\psi + \theta_2\left(\frac{d^2\psi}{dt^2} - w^2 \sin\psi\cos\psi\right) - mgs\sin\psi = 0 \\ -u_1\theta_1\frac{d\psi}{dt} + \theta_2\left(\sin\psi\frac{dw}{dt} + 2w\cos\psi\frac{d\psi}{dt}\right) = 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (172) \quad 184$$

Bewegungsgleichungen für den schweren symmetrischen Kreisel mit festgehaltener Spitze, u_1 die während der Bewegung konstante in die Richtung der Figurenachse fallende Winkelgeschwindigkeitskomponente, w Winkelgeschwindigkeit der Präzessionsbewegung, ψ Winkel zwischen der Figurenachse und der Vertikalen, θ_1 Trägheitsmoment für die Figurenachse, θ_2 für eine dazu senkrecht stehende, durch den festen Punkt gehende Achse.

$$w_0 = \frac{u_1\theta_1 \pm \sqrt{u_1^2\theta_1^2 - 4mgs\theta_2\cos\psi_0}}{2\theta_2\cos\psi_0}, \qquad (187) \quad 191$$

w_0 Winkelgeschwindigkeit der regulären Präzession, ψ_0 der zugehörige konstante Wert von ψ. Das obere Wurzelvorzeichen entspricht der schnellen, das untere der langsamen Präzession.

$$T = \frac{\pi\theta_2}{u_1\theta_1}, \qquad (192) \quad 194$$

T Dauer der Nutationsschwingungen bei der langsamen pseudoregulären Präzession (Näherungsformel für ein großes u_1).

$$\theta_2 V \mathfrak{s}_1 \frac{d^2\mathfrak{s}_1}{dt^2} - u_1\theta_1\frac{d\mathfrak{s}_1}{dt} + sV\mathfrak{Q}\mathfrak{s}_1 = 0, \qquad (199) \quad 201$$

Hauptgleichung in Vektorform, ersetzt die Bewegungsgleichungen (172), s Schwerpunktsabstand, $\mathfrak{s}_1$ Einheitsvektor in Richtung der Figurenachse, $\mathfrak{Q}$ Gewicht des Kreisels.

Seite

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\theta_2 + cw^2\theta_1^2}{mgs}}, \qquad (215) \quad 218$$

T Schwingungsdauer eines Pendels, das einen Kreisel trägt, c ein der Biegungssteifigkeit der Aufhängeachse proportionaler Faktor, mg Gewicht, s Schwerpunktsabstand und θ_2 Trägheitsmoment des Pendels samt Kreisel, $w\theta_1$ Drall des Kreisels.

$$Jw = \frac{1}{5}\varphi_0\sqrt{Qs\theta}, \qquad (220) \quad 280$$

$$Jw = \frac{\varphi_0'}{1800}QsT, \qquad (222) \quad 282$$

Formeln für die erforderliche Stärke Jw des Schlickschen Schiffskreisels, φ_0 größter Ausschlag des Schiffes ohne Kreisel, φ_0' dasselbe in Gradmaß ausgedrückt, Q Gewicht, s metazentrische Höhe, θ Trägheitsmoment des Schiffes für die Längsachse, T volle Schwingungsdauer der Rollbewegungen des Schiffes ohne Kreisel.

$$\frac{Qs}{\theta} = \frac{pr}{\vartheta}, \qquad (274) \quad 263$$

Bedingungsgleichung für die günstigste Aufhängung des Schiffskreisels, pr statisches Moment und ϑ Trägheitsmoment des Kreisels mit Rahmen für die Aufhängeachse;

$$k \geqq 2Jw\sqrt{\frac{\vartheta}{\theta}}, \qquad (276) \quad 264$$

ergänzende Bedingung für die günstigste Wirkung des Kreisels, k Dämpfungsfaktor oder Bremsstärke.

$$k = 0{,}1\,Jw, \qquad (284) \quad 270$$

Abschätzung für die praktisch in Aussicht zu nehmende Bremsstärke k bei stark bewegter See.

Vierter Abschnitt.

Verschiedene Anwendungen.

$$u_0 k \sin^3\varphi_0 > \frac{K\cos\varphi_0}{g}(Q + 2G\sin^2\varphi_0), \qquad (312) \quad 306$$

Bedingung für den stabilen Gang einer mit einem Zentrifugalregulator ausgerüsteten Kraftmaschine bei Vernachlässigung

Seite

der konstanten Regulatorreibung, k Dämpfungsfaktor der Regulatorschwingungen, u_0 Mittelwert der Winkelgeschwindigkeit des Regulators, φ_0 mittlere Regulatorstellung bei der gegebenen Belastung, Q Gewicht einer Schwungkugel, G an der Regulatorhülse angebrachtes Gewicht, K eine von der Steuerungseinrichtung abhängige, durch Gl. (305) näher bestimmte Konstante.

$$R = \sum\nolimits_2 m \frac{d\mathfrak{v}_0}{dt}\mathfrak{p} + M\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{dM}{dt}\frac{dx}{dt}, \qquad (325) \quad 319$$

R Rückdruck der Steuerung am Regulator. Die Summe bezieht sich auf die zum Steuerungsgestänge gehörigen Massen m, $\mathfrak{v}_0$ Geschwindigkeit von m unter der Voraussetzung, daß der Regulatorhub x konstant ist, $\mathfrak{p}\dot{x}$ der zu $\mathfrak{v}_0$ bei veränderlichem x hinzutretende Geschwindigkeitsanteil, M die auf die Koordinate x reduzierte Masse des Steuerungsgestänges (mit der Zeit veränderlich).

$$a_2 a_3 > a_1 a_2 c' + a_1 a_4 K, \qquad (331) \quad 325$$

Bedingung für die Möglichkeit eines ungestörten Parallelbetriebs von zwei elastisch gekuppelten Maschinen bei Vernachlässigung der konstanten Regulatorreibung; die Konstante c' hängt von der Torsionssteifigkeit der Kuppelung ab, während die übrigen Konstanten dieselbe Bedeutung haben, wie bei den Regulatorschwingungen einer einzelnen Maschine.

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{r}_1\left(\frac{d^2r}{dt^2} - ru^2\right), \qquad (346) \quad 336$$

Gleichung für die Beschleunigung eines materiellen Punktes, der eine beliebige Zentralbewegung ausführt, $\mathfrak{r}$ vom Anziehungszentrum ausgehender Radiusvektor, $\mathfrak{r}_1$ Einheitsvektor in dessen Richtung, r Größe von $\mathfrak{r}$, u Winkelgeschwindigkeit, mit der sich $\mathfrak{r}_1$ dreht.

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = -\mathfrak{r}_1\frac{4\pi^2a^3}{r^2T^2}, \qquad (353) \quad 339$$

besondere Form, in die die vorige Gleichung für den Fall der Planetenbewegung übergeht, T Umlaufzeit des Planeten, a große Halbachse der elliptischen Bahn.

Seite

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}, \qquad (356) \quad 348$$

Formel für die Masse des Zentralkörpers in astronomischen Masseneinheiten.

$$\mathfrak{K} = \frac{3c}{r^5} V \mathfrak{r}_1 \sum m\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}\mathfrak{r}_1, \qquad (366) \quad 352$$

$\mathfrak{K}$ Momentenvektor des Kräftepaars, das von einem Anziehungszentrum auf einen starren Körper außer der im Schwerpunkt angreifenden Anziehungskraft übertragen wird; c anziehende Masse in astronomischen Einheiten, $\mathfrak{r}$ Radiusvektor vom Anziehungszentrum nach dem Schwerpunkte des starren Körpers, $\mathfrak{p}$ ein von diesem aus nach einem Massenteilchen m gezogener Vektor.

Fünfter Abschnitt.

Hydrodynamik.

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0, \qquad (367) \quad 355$$

Kontinuitätsgleichung in der Eulerschen Form für die unzusammendrückbare Flüssigkeit.

$$\left.\begin{aligned} \mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2\frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3\frac{\partial v_1}{\partial z}\right) &= X - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \mu\left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2\frac{\partial v_2}{\partial y} + v_3\frac{\partial v_2}{\partial z}\right) &= Y - \frac{\partial p}{\partial y} \\ \mu\left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_3}{\partial x} + v_2\frac{\partial v_3}{\partial y} + v_3\frac{\partial v_3}{\partial z}\right) &= Z - \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}\right\}, \qquad (368) \quad 355$$

Eulersche Gleichungen für die reibungsfreie Bewegung, μ bezogene Masse, p Druck, XYZ Komponenten der äußeren Kraft.

$$v_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad v_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \qquad (369) \quad 356$$

für die wirbelfreie Bewegung, Φ Geschwindigkeitspotential.

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{i}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) + \mathfrak{j}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) + \mathfrak{k}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right), \quad (370) \quad 356$$

Definitionsgleichung für den Wirbelvektor $\mathfrak{w}$.

Seite

$$\tfrac{1}{2}\mu \mathfrak{v}^2 + V + p = C, \tag{372}$$ 356

für die wirbelfreie stationäre Bewegung, V Potential der äußeren Massenkraft, C eine für den ganzen Raum konstante Größe.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \tag{376}$$ 360

Beziehungen zwischen dem Geschwindigkeitspotentiale Φ und der Stromfunktion Ψ bei der ebenen wirbelfreien Strömung.

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= ax\left(1 + \frac{\varrho^2}{r^2}\right) \\ \Psi &= ay\left(1 - \frac{\varrho^2}{r^2}\right) \end{aligned}\right\}, \tag{382}$$ 366

Formeln für die Strömung um einen Zylinder vom Halbmesser ϱ, wenn die in der Richtung der X-Achse gehende ungestörte Strömung mit der Geschwindigkeit a erfolgt; x, y Koordinaten und r Abstand eines Punktes des Außenraums von der Zylinderachse.

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial w_3}{\partial z} = 0, \tag{393}$$ 392

Kontinuitätsgleichung für die Komponenten $w_1 w_2 w_3$ des Wirbelvektors.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dw_1}{dt} &= w_1\frac{\partial v_1}{\partial x} + w_2\frac{\partial v_1}{\partial y} + w_3\frac{\partial v_1}{\partial z} \\ \frac{dw_2}{dt} &= w_1\frac{\partial v_2}{\partial x} + w_2\frac{\partial v_2}{\partial y} + w_3\frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{dw_3}{dt} &= w_1\frac{\partial v_3}{\partial x} + w_2\frac{\partial v_3}{\partial y} + w_3\frac{\partial v_3}{\partial z} \end{aligned}\right\}, \tag{397}$$ 396

Gleichungen, auf denen die Helmholtzschen Sätze über die Wirbelbewegungen beruhen.

$$r = \frac{h}{2} e^{-\frac{2\pi}{\lambda} y}, \tag{403}$$ 407

r Radius des Kreises, den ein materieller Punkt bei den Wasserwellen nach der Gerstner-Hagenschen Theorie beschreibt, h Wellenhöhe, λ Wellenlänge, y Tiefe unter dem Wasserspiegel.

Seite

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}, \qquad (411) \quad 411$$

$\tilde{\omega}$ Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Wellen.

$$c = \sqrt{gh}, \qquad (419) \quad 421$$

c Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gezeitenwellen, h Tiefe des Gewässers.

$$\left.\begin{aligned} w_z &= \frac{\partial v_r}{r\partial\psi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(v_t r)}{\partial r} \\ w_r &= \frac{\partial v_t}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{r\partial\psi} \\ w_t &= \frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial z} \end{aligned}\right\} \qquad (429) \quad 428$$

w_z, w_r, w_t Wirbelkomponenten bezogen auf Zylinderkoordinaten in achsialer, radialer und tangentialer Richtung, v_z, v_r, v_t Geschwindigkeitskomponenten und z, r, ψ Koordinaten in diesen Richtungen.

$$\frac{\partial(v_z r)}{\partial z} + \frac{\partial(v_r r)}{\partial r} = 0, \qquad (430) \quad 429$$

Kontinuitätsgleichung in Zylinderkoordinaten für die achsensymmetrische stationäre Bewegung.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\gamma}{g}\left(v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) &= P_z - \frac{\partial p}{\partial z} \\ \frac{\gamma}{g}\left(v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_t^2}{r}\right) &= P_r - \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\gamma}{g}\left(v_z\frac{\partial v_t}{\partial z} + v_r\frac{\partial v_t}{\partial r} + \frac{v_r v_t}{r}\right) &= P_t \end{aligned}\right\}, \qquad (432) \quad 429$$

Eulersche Gleichungen für diese Bewegung, p Druck, P_z, P_r, P_t Komponenten der äußeren Massenkraft.

$$v_z r = \frac{\partial\Psi}{\partial r}; \quad v_r r = -\frac{\partial\Psi}{\partial z}, \qquad (434) \quad 430$$

Einführung der Stromfunktion Ψ, wodurch die Kontinuitätsgleichung (430) befriedigt wird.

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} = 0, \qquad (435) \quad 431$$

Differentialgleichung für die Stromfunktion unter der Voraussetzung, daß die tangentiale Wirbelkomponente w_t verschwindet.

Seite

$$\left(r^2\left(\frac{dF}{dr}\right)^2+1\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}=0, \qquad (456) \quad 446$$

Diff.-Gl. für die Stromfunktion im Laufrade einer Radialturbine, wenn durch $\varphi = F(r)$ die Gestalt der Schaufeln angegeben wird.

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} = k\left(\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial v_2}{\partial x}\right) \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = k\left(\frac{\partial v_1}{\partial z}+\frac{\partial v_3}{\partial x}\right) \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = k\left(\frac{\partial v_2}{\partial z}+\frac{\partial v_3}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (459) \quad 449$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -p+2k\frac{\partial v_1}{\partial x} \\ \sigma_y &= -p+2k\frac{\partial v_2}{\partial y} \\ \sigma_z &= -p+2k\frac{\partial v_3}{\partial z} \end{aligned}\right\}, \qquad (460) \quad 452$$

Gleichungen für die Spannungskomponenten in einer strömenden zähen Flüssigkeit, k Zähigkeitskoeffizient; p Mittelwert des Druckes an der betrachteten Stelle.

$$\mu\left(\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial t}+(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{v}\right)=-\nabla p+k\nabla^2\mathfrak{v}, \qquad (463) \quad 454$$

Bewegungsgleichung für die zähe Flüssigkeit in Vektorform, $\mathfrak{v}$ Geschwindigkeit, μ bezogene Masse.

$$P = 6\pi a k\varrho, \qquad (470) \quad 458$$

P Widerstand, den eine Kugel bei der Bewegung in einer zähen Flüssigkeit mit der sehr kleinen Geschwindigkeit a findet, ϱ Kugelradius.

$$Q=\frac{\pi k}{\lg\frac{R}{r}}s(2H-s), \qquad (494) \quad 476$$

Q Ergiebigkeit eines Brunnens vom Halbmesser r, H Höhe des Grundwasserspiegels im Abstande R vom Brunnen, s Gefäll bis dahin, k Erfahrungskoeffizient.

Nachtrag
(vom 15. November 1909).

Einige Tage bevor mir der Korrekturabzug dieses letzten Bogens zuging, hat Herr A. Scherl in Berlin einen Modellwagen seiner Einschienenbahn öffentlich vorgeführt. Da nach den Zeitungsberichten die Versuche befriedigt haben und voraussichtlich viele Beachtung finden werden, sehe ich mich veranlaßt, noch einmal auf die schon in der Anmerkung auf S. 275 flüchtig erwähnte Einschienenbahn zurückzukommen. Über die Scherlsche Kreiselanordnung ist auch bis heute noch nichts veröffentlicht. Ich vermute jedoch, daß sie sich eng an die von Schlick anlehnen wird, wobei nur der Schwerpunkt des Kreiselrahmens über die Aufhängeachse gelegt sein dürfte. Für diesen Fall erhält man die Bewegungsgleichungen aus denen des Schiffskreisels, Gl. (225), S. 238, indem man darin r und s negativ setzt. Aus den auf S. 240 durchgeführten Rechnungen, die sich mit dieser Änderung ohne weiteres übernehmen lassen, folgt dann, daß die Bewegung des Wagens in aufrechter Stellung für den ungebremsten und hinreichend starken Kreisel stabil ist. Der Betriebssicherheit wegen ist jedenfalls, wie schon früher angegeben war, eine besondere selbsttätige Kreiselsteuerung erforderlich. Eine Vermutung darüber auszusprechen, wie diese etwa angeordnet sein könnte, hätte in diesem Augenblicke keinen Zweck.

Bei dieser Gelegenheit berichtige ich zugleich, daß der erste Erfinder einer Einschienenbahn nicht Bryan heißt, wie auf S. 275 fälschlich gedruckt ist, sondern Brennan.

Sachverzeichnis.



Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

Rinkel, R.,
technik
Elektr
1908. G
Schlink, Dr
schule z
Abbildu
Leinwar
Schwaiger,
Reguli
[VI u. 10
Starke, Dr.
Elektr
Anschau
gedruck
wand g
Stephan, I
bausch
Lehrbu
buch f
gr. 8.
I. Teil.
II. —
Taschenbu
von Fr
heraus
Lord K
Tesař, L.
Wien,
Nachw
n. *M*
Weber, E
aus
Weber,
Straß
Ein
In L
I. Ba
II.
III.
Webste
the
Bo
zahl
Phy
[In
I.
II.

